文章编号：1674-8085(2016)02-0001-05

Γ-超半群的(*m*,*n*)超理想

*谢祥云，翟孟丽

（五邑大学数学与计算科学学院，广东，江门 529020）

摘 要：首先引入Γ-超半群的(m,n)超理想的概念，给出了Γ-超半群的(m,n)超理想的刻画和(m,n)超理想的生成表示，并利用(m,n)超理想给出(m,n)单Γ-超半群和(m,n)正则Γ-超半群的刻画。利用本文的结果，当Γ只有一个元素且超运算是一般的二元运算时，半群的(m,n)理想以及利用(m,n)理想对正则半群的刻画可以相应得出。

关键词：Γ-超半群；(m,n)超理想；(m,n)单Γ-超半群；(m,n)正则Γ-超半群

中图分类号：O152. 7 **文献标识码**：A DOI:10.3969/j.issn.1674-8085.2016.02.001

ON (*m*,*n*) HYPERDEALS IN Γ-HYPERSEMIGROUPS

*XIE Xiang-yun, ZHAI Meng-li

(School of Mathematics and Computation Science, Wuyi University，Jiangmen, Guangdong 529020, China)

Abstract: Firstly, we introduce the concept of (m,n) hyperideals of Γ-hypersemigroups, the characterizations of (m,n) hyperideals of Γ-hypersemigroups and the generalized theorem of (m,n) hyperideals is obtained by every nonempty set of Γ-hypersemigroups. Secondly, the characterizations of (m,n) simple Γ-hypersemigroups, and (m,n) regular Γ-hypersemigroups are given by (m,n) hyperideals. Finally, some characterizations of regular semigroups are obtained in terms of (m,n) ideals.

Key words: Γ-hypersemigroup; (m,n)-hyperideal; (m,n)-simple Γ-hypersemigroup; (m,n)regular Γ-hypersemigroup

1 准备知识

众所周知，一个满足结合律的代数系统称为半群。半群代数理论从研究的基本对象、核心概念、主要课题的提出到它的行之有效的研究方法的建立，都得到了数学内部和外部（特别是计算机科学）的强烈推动，至今系统研究了近80年。特别是，近几十年与新兴学科如形式语言与自动机理论、码论、信息安全理论中的应用等交叉发展，半群理论得到了迅速发展[1]。

作为泛代数理论的一个研究特例，印度数学家M.K. Sen在1986年首先提出了Γ-半群的概念[2]。作为一般半群的推广，半群中的很多重要结论都能在Γ−半群中找到了类似物[3-6]。例如， Ansari等首先研究了Γ−半群的(m,n)双理想[7]，该理论思想很快能进一步推广去研究序Γ−半群(m,n)理想[8]。后来很多数学家对双理想的研究拓展到不同的代数结构中，例如研究Γ-半群上的双理想，序半群上的双理想，单Γ-半群上的双理想，正则Γ−半群上的双理想，Γ-超半群上的双理想等。

1934年，法国数学家F.Marty提出了超结构[9]的概念，作为经典代数结构的泛化。在超结构中两个元素的运算不在是一个元素而是一个子集合。随后，超结构思想在投影、画法和球面几何格，倍群

收稿日期：2015-11-06；修改日期：2015-12-03
基金项目：国家自然科学基金项目(11361027，11271040)；广东省自然科学基金项目(2014A030313625)；广东省教育厅省级重大项目(自然科学类)(2014KZDXM055)
作者简介：*谢祥云(1964-)，男，安徽舒城人，教授，博士，硕士生导师，主要从事序半群的代数理论、模糊代数、粗糙集理论研究(E-mail:xyxie0@126.com);
翟孟丽(1990-)，女，河南襄城人，硕士生，主要从事半群的代数理论研究(E-mail:1029419030@qq.com).

和线性几何等数学领域的交叉发展中孕育而生。真正地将半群代数理论和超结构完美结合的是印度数学家M.K.Sen，他研究了模糊超半群的相关理论[10]。从1999年以来，伊朗数学家B.Davvaz等在Γ-超半群的基本理论的建立，如Γ-超半群的双理想、拟理想、素理想、格林关系、同余[10-13]等上做了一些基础工作。

在此基础上，本文将Γ-半群的(m,n)理想的推广到Γ-超半群(m,n)超理想，研究它的生成，并给出(m,n)单Γ-超半群和(m,n)正则Γ-超半群的刻画。在开始讨论之前，先引入一些基本概念。

定义1[11] 映射$\circ: H\times H\to P(H)$称为H上的一个超运算，其中H是非空集，$P^*(H)$是H的不包含空集的H的所有子集集。如果“$\circ$” H上的一个超运算，$(H,\circ)$称为一个超结构。

定义2[11] 对于超结构$(H,\circ)$，若满足

$(\forall x,y,z\in H)\ \ (x\circ y)\circ z = x\circ(y\circ z)$，

即$\cup_{u\in x\circ y} u\circ z = \cup_{v\in y\circ z} x\circ v$，则称$(H,\circ)$为一个超半群。

定义3[11] 设 $S=\{x,y,z,\ldots\}$，$\Gamma=\{\alpha,\beta,\gamma,\ldots\}$是两个非空集合。集合$S$称为Γ−超半群，若$S$满足下列条件:

1) $(\forall\ \alpha\in\Gamma)\,(\forall\ x,y\in S)\ \ x\alpha y\subseteq S$；

2) $(\forall\ \alpha,\beta,\gamma\in\Gamma)\,(\forall\ x,y,z\in S)$

$(x\alpha y)\beta z = x\alpha(y\beta z)$。

简单起见，对S的任意非空子集A,B, 记

$A\Gamma B=\cup_{\gamma\in\Gamma} A\gamma B=\cup\{a\gamma b\mid a\in A,b\in B,\gamma\in\Gamma\}$；

$A^m = A\Gamma A\Gamma\cdots\Gamma A$，

$\mathrm{A}^0\Gamma S\Gamma B^0 = S$ $\mathrm{A}^0\Gamma S\Gamma B^n = S\Gamma B^n$，

$\mathrm{A}^m\Gamma S\Gamma B^0 = A^m\Gamma S$, $\mathrm{A}^0\Gamma B = B$ $\mathrm{A}\Gamma B^0 = A$，

其中m,n为任意的非负整数。

Γ−超半群S的一个非空子集I称为S的左Γ-超理想，若满足$S\Gamma I\subseteq I$。对偶地，若满足$I\Gamma S\subseteq I$，则非空子集I称为S的右Γ-超理想。

Γ−超半群S的一个非空子集K称为S的子Γ-超半群，若满足$K\Gamma K\subseteq \mathrm{K}$。

例 1 设S是一个非空集合，Γ是S的非空子集合，若取$\gamma\in\Gamma$。对于任意的$x,y\in S$，$\delta\in\Gamma$，我们定义S上的二元Γ超运算如下：$x\delta y=\{x,\gamma,y\}$。则S为一个Γ-超半群。

2 Γ-超半群上的(m,n)超理想

定义 4 设S是Γ-超半群，B是S的任意一个非空子集，若有$B\Gamma S\Gamma B\subseteq B$，则$B$是$S$的一个双超理想。

定义 5 对于Γ-超半群S的任意一个非空子集B，若有$B^m\Gamma S\Gamma B^n\subseteq B$，则$B$是$S$的一个$(m,n)$超理想。

注 1：从(m,n)超理想的定义不难看出，Γ-超半群S的双超理想是S的$(1,1)$超理想。当m=1,n=0(或m=0,n=1)时，相应的(m,n)超理想是S的左Γ-超理想（或右Γ-超理想），Γ-超半群S的(m,n)超理想是对单边Γ-超理想概念的一种推广；对任意的$k\ge m$和$l\ge n$，如果B是S的任意一个$(k,1)$超理想，有

$B^k\Gamma S\Gamma B^l\subseteq B^m\Gamma B^{k-m}\Gamma S\Gamma B^{l-n}\Gamma B^n\subseteq B^m\Gamma S\Gamma B^n\subseteq B$，

得出B是S的一个(m,n)超理想。

定理 1 设S是Γ-超半群，B是S的一个双超理想，则$A\Gamma B$，$B\Gamma A$均是S的(m,n)超理想。

证明 由B是Γ-超半群S的一个双超理想，且B是Γ-超半群S的一个双超理想，得

$B\Gamma A\Gamma B\subseteq B\Gamma S\Gamma B\subseteq B$。又

$\left(A\Gamma B\right)^m = A\Gamma\left(B\Gamma A\Gamma B\right)\Gamma\left(A\Gamma B\right)^{m-2}\subseteq$

$A\Gamma B\Gamma\left(A\Gamma B\right)^{m-2}=\left(A\Gamma B\right)^{m-1}$

由归纳可得：

$\left(A\Gamma B\right)^m\subseteq\left(A\Gamma B\right)^2 = A\Gamma\left(B\Gamma A\Gamma B\right)\subseteq A\Gamma B$。

故$\left(A\Gamma B\right)^m\Gamma S\Gamma\left(A\Gamma B\right)^n\subseteq\left(A\Gamma B\right)\Gamma S\Gamma\left(A\Gamma B\right)=$

$\left(A\Gamma B\right)\Gamma(S\Gamma A)\Gamma B\subseteq\left(A\Gamma B\right)\Gamma S\Gamma B=$

$A\Gamma(B\Gamma S\Gamma B)\subseteq A\Gamma B$。

因此$A\Gamma B$是S的(m,n) 超理想。类似地可以证明$B\Gamma A$也是S的(m,n) 双理想。

性质 1 设S是一个Γ-超半群，对任意的正整数k，如果$B_1,B_2,\cdots,B_k$为S的双超理想。则$B_1\Gamma B_2\Gamma\cdots\Gamma B_k$为$S$的一个$(m,n)$超理想。

证明 利用归纳法，由定理 1可知，当$m=2$时，$B_1\Gamma B_2$为S的一个(m,n)超理想。假设$k< m$，$B_1\Gamma B_2\Gamma\cdots\Gamma B_k$为$S$的一个$(m,n)$超理想。则$k=m$时，$B_1\Gamma B_2\Gamma\cdots\Gamma B_{m-1}\Gamma B_m=$ $(B_1\Gamma B_2\Gamma\cdots\Gamma B_{m-1})\Gamma B_m$。

由归纳假设及定理1知，$B_1\Gamma B_2\Gamma\cdots\Gamma B_m$为$S$的一个$(m,n)$超理想。

定理 2 若A是Γ-超半群S的一个Γ-子超半

群，Q 是使得 $A\cap Q\neq\varnothing$ 的 S 的一个 (m,n) 超理想，则 $A\cap Q$ 是 A 的一个(m,n)超理想。

证明 由 $A\cap Q\neq\varnothing$ 和 $A\cap Q\subseteq A$ 得，

$$(A\cap Q)^m\Gamma A\Gamma(A\cap Q)^n\subseteq A^{m+1}\Gamma A^{n+1}\subseteq A$$

且

$$(A\cap Q)^m\Gamma A\Gamma(A\cap Q)^n\subseteq$$
$$Q^m\Gamma A\Gamma Q^n\subseteq Q^m\Gamma S\Gamma Q^n\subseteq Q。$$

由此得出 $(A\cap Q)^m\Gamma A\Gamma(A\cap Q)^n\subseteq A\cap Q$。故 $A\cap Q$ 是 A 的一个(m,n)双超理想。

定理 3 设 $\{Q_i\}_{i\in N}$ 是 S 的一个(m,n)超理想簇。若 $\cap_{i\in\mathrm{N}}Q_i\neq\varnothing$，则 $\cap_{i\in\mathrm{N}}Q_i$ 是 S 的一个 (m,n) 超理想。

证明 设 $Q=\cap_{i\in\mathrm{N}}Q_i\neq\varnothing$，

$\because (\cap_{i\in\mathrm{N}}Q_i)^m\Gamma S=\cap_{i\in\mathrm{N}}(Q_i^m\Gamma S)$，

$S\Gamma(\cap_{i\in\mathrm{N}}Q_i)^n=\cap_{i\in\mathrm{N}}(S\Gamma Q_i^n)$。

$\therefore Q^m\Gamma S\Gamma Q^n=(\cap_{i\in\mathrm{N}}Q_i)^m\Gamma S\Gamma(\cap_{i\in\mathrm{N}}Q_i)^n=$

$\cap_{i\in\mathrm{N}}(Q^m{}_i\Gamma S\Gamma Q_i^n)\subseteq\cap_{i\in\mathrm{N}}Q_i=Q$。

故有 Q 是 S 的一个(m,n)双超理想。

例 2 $\cap_{i\in\mathrm{N}}Q_i\neq\varnothing$ 是一个必要条件。例如 $S=(0,1)$，$Q_i=(0,1/2^i),\forall i\in N^+$ 是 S 的非空子集簇和 $\Gamma=\{\gamma_n\mid \mathrm{n}\in N^+\}$，其中

$$x\gamma_n y=\{xy/2^k\mid 0<\mathrm{k}\leq\mathrm{n}\}\ (\forall x,y\in S)$$

则 S 是一个 Γ-超半群，Q_i 为 N^+ 的一个(m,n)超理想，但是 $\cap_{i\in\mathrm{N}}Q_i=\varnothing$。

定义 6 若 Γ-超半群 S 的一个(m,n)超理想 Q 不真包含 S 的任何(m,n)超理想，则称 Q 是 S 的一个极小(m,n)超理想。

设 A 是 Γ-超半群 S 的一个非空子集，用B表示 S 的所有(m,n)超理想构成的集合。

令 $\overline{B_{(m,n)}}=\{B\mid B$ 是 S 的包含 A 的(m,n)超理想$\}$，则 $(A)_{b(m,n)}=\bigcap_{B\in\overline{B_{(m,n)}}}B$ 是包含 A 的 Γ-超半群 S 的(m,n)超理想，我们称 $(A)_{b(m,n)}$ 为 S 的由 A 生成的 (m,n) 超理想。若 $A=\{a\}$，$(\{a\})_{b(m,n)}$ 简化记为 $(a)_{b(m,n)}$。

定理 4 若 S 是一个 Γ-超半群，则 $(A)_{b(m,n)}=A\cup A^m\Gamma S\Gamma A^n$。

证明 设 $Q=A\cup A^m\Gamma S\Gamma A^n$，显然 $A\subseteq Q$，首先证 Q 为 (m,n) 超理想。事实上，

$$(A\cup A^m\Gamma S\Gamma A^n)^m\Gamma S\Gamma(A\cup A^m\Gamma S\Gamma A^n)^n\subseteq$$
$$(A^m\cup A^m\Gamma S)\Gamma S\Gamma(A\cup A^m\Gamma S\Gamma A^n)^n\subseteq$$
$$(A^m\cup S\Gamma A^m)\Gamma(A^n\cup S\Gamma A^n)\subseteq A^m\Gamma S\Gamma A^n。$$

所以 Q 为(m,n)双超理想。下证 Q 是 S 的包含 A 的一个极小的(m,n)超理想，设 Q_1 为 S 的包含 A 的任意一个(m,n)超理想,则有 $A\subseteq Q_1$ 且

$$A^m\Gamma S\Gamma A^n\subseteq Q_1{}^m\Gamma S\Gamma Q_1{}^n\subseteq Q_1$$

成立。因此 $Q=A\cup A^m\Gamma S\Gamma A^n\subseteq Q_1$。故得 $(A)_{b(m,n)}=A\cup A^m\Gamma S\Gamma A^n$。

推论 2 若 S 是一个 Γ-超半群，A 是 Γ-超半群 S 的一个非空子集。则 $(A)_{b(m,0)}=A\cup A^m\Gamma S$，$(A)_{b(0,n)}=A\cup S\Gamma A^n$。

定义 7 设 S 是一个 Γ-超半群，如果 S 除了包含 S 作为(m,n)超理想外，不存在其它 (m,n) 超理想，称 S 为(m,n)单的。

定理 5 一个 Γ-超半群 S 是(m,n)单的当且仅当 $S=s^m\Gamma S\Gamma s^n$，$\forall s\in S$。

证明 必要性。S 是一个(m,n)单 Γ-超半群，由定理1可得，对任意 $s\in S$，因为 $s^m\Gamma S\Gamma s^n$ 是 Γ-超半群 S 的一个(m,n)超理想。故 $S=s^m\Gamma S\Gamma s^n$。

充分性。由对任意的 $s\in S$ 有 $S=s^m\Gamma S\Gamma s^n$ 成立得，若 B 为 S 的任意一个 (m,n) 超理想，则对任意的 $b\in B$ 有 $S=b^m\Gamma S\Gamma b^n\subseteq B^m\Gamma S\Gamma B^n\subseteq B$。所以 $S=B$,即 S 是 (m,n) 单的。

定理 6 一个 Γ-超半群 S 的双超理想 B 为 S 的极小(m,n)超理想当且仅当 B 为(m,n)单的。

证明 必要性。设 B 是 S 的极小(m,n)超理想，下面证明 B 为(m,n)单Γ-超半群。

设C为B的一个 (m,n) 超理想，则有 $C^m\Gamma B\Gamma C^n\subseteq C\subseteq B$。由定理1及推论1得，$C^m\Gamma B$ 为 S 的一个 (m,n) 超理想。再由定理1，$C^m\Gamma B\Gamma C^n$ 为 S 的一个(m,n)超理想。因为 B 是 S 的一个极小 (m,n) 超理想，则 $B\subseteq C^m\Gamma B\Gamma C^n\subseteq C$。故得 $B=C=C^m\Gamma B\Gamma C^n$，因此 B 为一个 (m,n) 单 Γ-超半群。

充分性。设 C 为 S 的一个 (m,n) 超理想，$C\subseteq B$，则有 $C^m\Gamma B\Gamma C^n\subseteq C^m\Gamma S\Gamma C^n\subseteq C\subseteq B$。故 C 是 B 的一个(m,n)超理想。又 B 是一个 (m,n) 单 Γ-超半群，所以 $B=C$。因此 B 为极小(m,n)双超理想。

例 3 例如 $S=N^+$，$\Gamma=\{\gamma\}$，$x\gamma y=x+y+5N^+\ (\forall x,y\in S,\gamma\in\Gamma)$，不难验证 S 是一个 Γ-超半群。如果 Q 是 N^+ 的极小(m,n)超理想，则它是一个无限集。令 $Q'=Q\setminus\{k\}$，这里 k 为 Q 中的最小正整数，则 Q' 也是 N^+ 的(m,n)超理想，显然 Q' 是 Q 的一个真子集。由此可以得出一般情况下不是所有的 Γ-超半群均包含极小(m,n)超理想。

3 (m,n)正则性

定义 8 设 A 是 Γ-超半群 S 的非空子集，若 $A\subseteq A^m\Gamma S\Gamma A^n$，则 S 是一个 (m,n) 正则 Γ-超半群。

(m,n) 正则 Γ-超半群可以等价地表述为：$a\in a^m\Gamma S\Gamma a^n,\ \forall a\in S$。

定理7 Γ-超半群 S 是(m,n)正则的当且仅当 $A=A^m\Gamma S\Gamma A^n,\forall A\in B_{(m,n)}$。

证明 必要性。设 Γ-超半群 S 是(m,n)正则，则 $A\subseteq A^m\Gamma S\Gamma A^n,\forall A\in B_{(m,n)}$。

又 A 是 (m,n) 超理想，则 $A^m\Gamma S\Gamma A^n\subseteq A$。因此，$A=A^m\Gamma S\Gamma A^n,\forall A\in B_{(m,n)}$。

充分性。设 $A=A^m\Gamma S\Gamma A^n,\forall A\in B_{(m,n)}$。对 Γ-超半群 S 的任意一个非空子集 A，由定理4得，$(A)_{b(m,n)}=A\cup A^m\Gamma S\Gamma A^n$。同时不难推出，

$(A)_{b(m,n)}{}^m\Gamma S=A^m\Gamma S$，$S\Gamma(A)_{b(m,n)}{}^n=S\Gamma A^n$。

又 $(A)_{b(m,n)}\in B_{(m,n)}$，则有

$$A\subseteq(A)_{b(m,n)}=(A)_{b(m,n)}{}^m\Gamma S\Gamma(A)_{b(m,n)}{}^n=$$
$$A^m\Gamma S\Gamma(A)_{b(m,n)}{}^n=A^m\Gamma S\Gamma A^n$$

因此 $A\subseteq A^m\Gamma S\Gamma A^n$，即 S 是一个 (m,n) 正则 Γ-超半群。

定义 9 设 S 是一个 Γ-超半群，A 为 S 的任意一个非空子集。若 $A\subseteq A^m$，则称 A 为 m 子幂等的。若 $A=A^m$，则称 A 为 m 幂等的。如果 S 的任意非空子集都是 m 幂等的，称 S 是 m 幂等的。

定理8 设 S 为一个(m,n)正则 Γ-超半群，则

(ⅰ) S 的任意 $(m,0)$ 超理想是 $n+1$ 次幂等的；

(ⅱ) S 的任意 $(0,n)$ 超理想是 $m+1$ 次幂等的。

证明 (ⅰ) 设 A 为 S 的一个 $(m,0)$ 超理想，则有 $A^m\Gamma S\subseteq A$。又 S 是一个 (m,n) 正则超 Γ-半群，所以 $A\subseteq A^m\Gamma S\Gamma A^n\subseteq A\Gamma A^n\subseteq A^{n+1}$。故 A 是 $n+1$ 次幂等的。

同理可证(ⅱ)。

定理10 设 Γ-超半群 S 为 m,n 幂等的。则 S 是(m,n)正则的当且仅当

$$A\cap B=A^m\Gamma B\cap A\Gamma B^n,\ \forall A\in B_{(m,0)},B\in B_{(0,n)}。$$

证明 必要性。设 S 是一个 (m,n) 正则 Γ-超半群，则对 $\forall A\in B_{(m,0)},B\in B_{(0,n)}$，有

$$A^m\Gamma B\subseteq A^m\Gamma S\subseteq A \text{ 和 } A\Gamma B^n\subseteq S\Gamma B^n\subseteq B$$

故有 $A^m\Gamma B\cap A\Gamma B^n\subseteq A\cap B$。

又 S 是 (m,n) 正则的且B是 $(0,n)$ 超理想，由定理2可知，$A\cap B$ 也为 S 的 $(0,n)$ 超理想，因此

$$A\cap B\subseteq(A\cap B)^m\Gamma S\Gamma(A\cap B)^n\subseteq A^m\Gamma S\Gamma B^n\subseteq A^m\Gamma B$$

类似地可以得到，

$$A\cap B\subset(A\cap B)^m\Gamma S\Gamma(A\cap B)^n\subseteq A^m\Gamma S\Gamma B^n\subseteq A\Gamma B^n$$

故有 $A\cap B\subseteq A^m\Gamma B\cap A\Gamma B^n\subseteq A\cap B,\ \forall A\in B_{(m,0)}$，$B\in B_{(0,n)}$。

即 $A\cap B=A^m\Gamma B\cap A\Gamma B^n,\forall A\in B_{(m,0)},B\in B_{(0,n)}$。

充分性。设 $A\cap B=A^m\Gamma B\cap A\Gamma B^n,\forall A\in B_{(m,0)}$，$B\in B_{(0,n)}$。以下分四种情况讨论：

情况I 如果 $m=n=0$，则对于 S 的非空子集任意的 A，$A^0\Gamma S\Gamma A^0=S$，因此 $A\subseteq A^0\Gamma S\Gamma A^0$，故 S 是 $(0,0)$ 正则的。

情况II 因 S 为m,n幂等的，则有

$$(\forall A\in B_{(m,0)},B\in B_{(0,n)})\ A\cap B=$$
$$A^m\Gamma B\cap A\Gamma B^n=A\Gamma B\cap A\Gamma B=A\Gamma B。$$

对 S 的任意非空子集合 X，

$(X)_{b(m,0)}=X\cup X^m\Gamma S\in B_{(m,0)}$，

$(X)_{b(0,n)}=X\cup S\Gamma X^n\in B_{(0,n)}$

又 $S\in B_{(0,n)}$，根据假设

$(X)_{b(m,0)} = (X)_{b(m,0)} \cap S =$

$((X)_{b(m,0)})^m \Gamma S \cap (X)_{b(m,0)} \Gamma S^n =$

$(X)_{b(m,0)} \Gamma S \cap (X)_{b(m,0)} \Gamma S^n = (X)_{b(m,0)} \Gamma S \subseteq$

$((X)_{b(m,0)})^m \Gamma S = (X \cup X^m \Gamma S)^m \Gamma S \subseteq X^m \Gamma S$

类似地， 由$S \in B_{(m,0)}$可得，

$(X)_{b(0,n)} = (X)_{b(0,n)} \cap S =$

$S^m \Gamma (X)_{b(0,n)} \cap S \Gamma (X)_{b(0,n)}{}^n =$

$S^m \Gamma (X)_{b(0,n)} \cap S \Gamma (X)_{b(0,n)} = S \Gamma (X)_{b(0,n)} \subseteq$

$S \Gamma ((X)_{b(0,n)})^n = S \Gamma (X \cup S \Gamma X^n)^n \subseteq S \Gamma X^n$

故有

$X \subseteq (X)_{b(m,0)} \cap (X)_{b(0,n)} = (X)_{b(m,0)} \Gamma (X)_{b(0,n)} \subseteq$

$X^m \Gamma S \Gamma S \Gamma X^n \subseteq X^m \Gamma S \Gamma X^n$

因此，S是(m,n)正则的。

定理11 设S是一个m,n幂等的(m,n)正则Γ-超半群。则如果A是S的一个$(m,0)$超理想，对任意的S使得$T \cap A \neq \varnothing$的非空子集$T$，有$T \cap A \subseteq A \Gamma T$。

证明 设A是S的一个$(m,0)$双理想。因S是一个(m,n)正则Γ-半群，由定理2，$T \cap A$也是S的一个$(m,0)$超理想。则有

$$T \cap A \subseteq (AT \cap A)^m \Gamma S \Gamma (T \cap A)^n \subseteq$$
$$(A^m \Gamma S) \Gamma T^n = A^m \Gamma S \Gamma A^0 \subseteq A \Gamma T^m$$

又S是m,n幂等的，则有$T \cap A \subseteq A \Gamma T^m \subseteq A \Gamma T$。

参考文献:

[1] Howie J M. An Introduction to Semigroup Theory [M]. London:Acad. Press, 1976.

[2] Sen M K, Saha N K. on Γ-semigroup I[J]. Bull. Cal. Math. Soc, 1986, 78(3): 180-186.

[3] Sen M K, Seth A. The maximun idempotent-separating congruence in a regular Γ-semigroup[J]. Bull Cal Math Soc, 1990, 82: 131-137.

[4] Seth A. Rees's theorem for Γ-semigroup[J]. Bull. Cal. Math. Soc, 1989, 81: 217-226.

[5] Sen M K, Saha N K. Orthodox Γ-semigroups[J]. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 1990, 13(3): 527-534.

[6] Saha N K. on Γ-semigroup I[J]. Bull. Cal. Math. Soc, 1988, 80: 1-12.

[7] Ansari M A, Khan R. Notes on (m,n) bi-Γ-ideals in Γ–Semigroups [J]. Rend. Circ. Mast. Palermo, 2011, 60: 31-42.

[8] 王立峰,谢祥云. 关于偏序 Γ− 半群的(m,n)理想 [J]. 五邑大学学报:自然科学版,2013, 27(3):1-6.

[9] Marty F. Sur une generalization de la notion de groupe[C].8th Congress Math. Scandinaves, Stockholm. 1934: 45-49.

[10] Sen M K, Ameri R, Chowdhury G. Fuzzy hypersemigroups[J]. Soft Computing, 2008, 12(9): 891-900.

[11] Hila K, Davvaz B, Dine J. Study on the structure of Γ-semihypergroups[J]. Communications in Algebra, 2012, 40(8): 2932-2948.

[12] Anvariyeh S M, Mirvakili S, Davvaz B. On Γ-hyperideals in Γ-semihypergroups[J]. Carpathian journal of mathematics, 2010, 26(1): 11-23.

[13] Heidari D, Dehkordi S O, Davvaz B. Γ-semihypergroups and their properties[J]. UPB Sci. Bull., Series A, 2010, 72(1): 195-208.