文章编号：1674-8085(2016)02-0009-05

基于包含度的犹豫模糊属性约简

*王金英，王艳平，韩晓冰

（辽宁工业大学理学院，辽宁，锦州 121001）

摘 要：将模糊集的包含度拓展到犹豫模糊集中，针对属性值为犹豫模糊元的决策问题，提出了一种犹豫模糊信息系统的属性约简方法。首先，给出了犹豫模糊包含度的公理化定义和不同形式的计算公式；然后，计算决策条件选择，得到条件属性重新组合后的犹豫模糊信息系统，再计算组合的条件属性在决策中的包含度，得到相应的决策规则；最后通过逐项删减条件属性，得到最大决策约简集，并通过实例表明了该方法的有效性和可行性。

关键词：犹豫模糊集；犹豫模糊信息系统；包含度；属性约简

中图分类号：O236，TP301 **文献标识码：**A DOI:10.3969/j.issn.1674-8085.2016.02.003

RESEARCH ON HESITANT FUZZY MULTI-ATTRIBUTE REDUCTION BASED ON INCLUSION DEGREE

*WANG Jin-ying, WANG Yan-ping, HAN Xiao-bing

(Science College, Liaoning University of Technology, Jinzhou, Liaoning 121001, China)

Abstract: We expand the inclusion degree of fuzzy set to the hesitant fuzzy set and develop a series of studies focus on the inclusion degree of hesitant fuzzy set. Firstly, the axiomatic definition and some calculation formulas are given. Secondly, the hesitant fuzzy information system is obtained after the recombination of condition attributes by computing the decision condition choice. Furthermore, the hesitant fuzzy inclusion degree is calculated and the corresponding decision rule is derived. Finally, the maximum decision reduction set is obtained by deleting condition attributes term by term. The practical example has shown that the effectiveness and feasibility of the proposed approach is given.

Key words: hesitant fuzzy sets; hesitant fuzzy information system; inclusion degree; attribute reduction

模糊集[1]是处理模糊性和不确定性知识的重要数学工具。在应用模糊集理论处理实际问题时，模糊集的包含关系过于苛刻，一般用模糊包含度加以代替。模糊包含度是两集合之间包含关系的一种推广，用来刻画一个集合包含于另一个集合的程度，是不确定理论中的一种重要度量工具。2009~2010年，Torra首次提出了犹豫模糊集的概念[2-3]。近几年，专家学者们对犹豫模糊集进行了一系列的研究，如犹豫模糊集的距离和相似性测度[4]、犹豫模糊熵和犹豫模糊优先算子在多属性决策中的应用[5-6]、犹豫模糊相关系数的聚类分析及其应用[7]等。同时，也有专家学者将犹豫模糊集与粗糙集相结合，构建了犹豫模糊粗糙集模型[8-9]。目前，关于犹豫模糊包含度的研究还尚未见到。基于此，本文将模糊集的包含度[10-11]推广到犹豫模糊环境下，围绕犹豫模糊集的包含度进行了一系列的研究。首先给出了犹豫模糊包含度的公理化定义和计算公式；然后提出了一种基于包含度的犹豫模糊信息系统的属性约简方

收稿日期：2015-11-24；修改日期：2015-12-18
基金项目：辽宁省教育厅科技计划项目（L2012226）
作者简介：*王金英(1981-)，女，辽宁锦州人，讲师，硕士，主要从事模糊集理论，粗糙集理论研究(E-mail: 857005105@qq.com);
王艳平(1965-)，女，辽宁锦州人，教授，硕士，主要从事模糊集理论，粗糙集理论研究(E-mail: 448798633@qq.com);
韩晓冰(1988-)，女，河北石家庄人，硕士生，主要从事粗糙集理论与应用研究(E-mail:570333779@qq.com).

法；最后通过一个有关信用卡申请的算例说明了该约简算法是有效的。

1 犹豫模糊集的基本理论

定义1[2] 设 X 是一个非空集合，则称

$$E=\left\{\left\langle x,h_E(x)\right\rangle \middle| x\in X\right\}$$

为犹豫模糊集，其中 $h_E(x)$ 是 $[0,1]$ 上一些可能隶属值的集合，表示 X 中 x 对于 E 的隶属度的集合，称 $h=h_E(x)$ 为一个犹豫模糊元素。为方便，将 X 上所有犹豫模糊集构成的集合记为 $HF(X)$。

定义 2[2] 设 $h_A(x)$ 和 $h_B(x)$ 是两个犹豫模糊元素，则有

1） $h_A(x)\,\overline{\wedge}\, h_B(x)=$

$$\left\{h\in h_A(x)\cup h_B(x)\middle| h\le\min\left\{h_A^+,h_B^+\right\}\right\};$$

2） $h_A(x)\,\underline{\vee}\, h_B(x)=$

$$\left\{h\in h_A(x)\cup h_B(x)\middle| h\ge\max\left\{h_A^-,h_B^-\right\}\right\};$$

3） $h_A{}^c(x)=\left\{1-h\middle| h\in h_A(x)\right\}$。

这里，$h_A^-=\min\left\{h_A(x)\right\},h_A^+=\max\left\{h_A(x)\right\},h_B^-=\min\left\{h_B(x)\right\},h_B^+=\max\left\{h_B(x)\right\}$

定义 3[10] 对任意的 $A,B\in HF(X)$，有如下定义

1） $A\subseteq B\Leftrightarrow\forall x\in X,h_A(x)\preceq h_B(x)\Leftrightarrow h_A^-(x)\le h_B^-(x)\text{且}h_A^+(x)\le h_B^+(x)$；

2） $A=B\Leftrightarrow\forall x\in X,h_A(x)=h_B(x)$；

3） $A\overline{\cap}B=\left\{\left\langle x,h_{A\overline{\cap}B}(x)\right\rangle\middle| x\in X\right\}$, $h_{A\overline{\cap}B}(x)=h_A(x)\,\overline{\wedge}\, h_B(x)$；

4） $A\underline{\cup}B=\left\{\left\langle x,h_{A\underline{\cup}B}(x)\right\rangle\middle| x\in X\right\}$, $h_{A\underline{\cup}B}(x)=h_A(x)\,\underline{\vee}\, h_B(x)$；

5） $A^c=\left\{\left\langle x,h_{A^c}(x)\right\rangle\middle| x\in X\right\},h_{A^c}(x)=h_A{}^c(x)$。

定理 1[10] 对任意的 $A,B\in HF(X)$，则有

$$A\overline{\cap}B\subseteq A,B；\quad A,B\subseteq A\underline{\cup}B。$$

2 犹豫模糊包含度

定义 4 对任意的 $A,B,C\in HF(X)$，若映射 $D:HF(X)\times HF(X)\to[0,1]$ 满足：

1） $0\le D(B/A)\le 1$；

2） $A\subseteq B\Rightarrow D(B/A)=1$；

3） $A\subseteq B\subseteq C\Rightarrow D(A/C)\le D(A/B)$, $D(A/C)\le D(B/C)$。

则称 D 为 $HF(X)$ 上的包含度。

基于上述包含度的公理化定义，本文给出犹豫模糊包含度的三个计算公式，具体形式为：

$$D_1(B/A)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sum_{x\in X}\left(h_A^-(x)\wedge h_B^-(x)\right)}{\sum_{x\in X}h_A^-(x)}+\frac{\sum_{x\in X}\left(h_A^+(x)\wedge h_B^+(x)\right)}{\sum_{x\in X}h_A^+(x)}\right) \tag{1}$$

$$D_2(B/A)=\frac{\sum_{x\in X}\left(h_B^-(x)+h_B^+(x)\right)}{\sum_{x\in X}\left(h_A^-(x)\vee h_B^-(x)+h_A^+(x)\vee h_B^+(x)\right)} \tag{2}$$

$$D_3(B/A)=\frac{|n(A,B)|}{|\sup pA|} \tag{3}$$

其中，$\sup pA=\left\{x\middle| h_A(x)\ne\{0\},x\in X\right\}$，$n(A,B)=\left\{x\in\sup pA,h_A(x)\le h_B(x)\right\}$

定理 2 式(1)~式（3）都是 $HF(X)$ 上的包含度。

证明 以式（1）为例进行证明。

① $0\le D_1(B/A)\le 1$ 显然成立。

②若 $A\subseteq B$，则 $\forall x\in X$, $h_A^-(x)\le h_B^-(x)\text{且}h_A^+(x)\le h_B^+(x)$，故

$$D_1(B/A)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sum_{x\in X}\left(h_A^-(x)\wedge h_B^-(x)\right)}{\sum_{x\in X}h_A^-(x)}+\frac{\sum_{x\in X}\left(h_A^+(x)\wedge h_B^+(x)\right)}{\sum_{x\in X}h_A^+(x)}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sum_{x\in X}h_A^-(x)}{\sum_{x\in X}h_A^-(x)}+\frac{\sum_{x\in X}h_A^+(x)}{\sum_{x\in X}h_A^+(x)}\right)=1$$

③若 $A\subseteq B\subseteq C$，则 $\forall x\in X$, $h_A^-(x)\le h_B^-(x)$

$\le h_C^-(x)$且$h_A^+(x)\le h_B^+(x)\le h_C^+(x)$，故

$$D_1\left(A/C\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sum\limits_{x\in X}\left(h_A^-(x)\wedge h_C^-(x)\right)}{\sum\limits_{x\in X}h_C^-(x)}+\frac{\sum\limits_{x\in X}\left(h_A^+(x)\wedge h_C^+(x)\right)}{\sum\limits_{x\in X}h_C^+(x)}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sum\limits_{x\in X}h_A^-(x)}{\sum\limits_{x\in X}h_C^-(x)}+\frac{\sum\limits_{x\in X}h_A^+(x)}{\sum\limits_{x\in X}h_C^+(x)}\right)\le\frac{1}{2}\left(\frac{\sum\limits_{x\in X}h_A^-(x)}{\sum\limits_{x\in X}h_B^-(x)}+\frac{\sum\limits_{x\in X}h_A^+(x)}{\sum\limits_{x\in X}h_B^+(x)}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sum\limits_{x\in X}\left(h_A^-(x)\wedge h_B^-(x)\right)}{\sum\limits_{x\in X}h_B^-(x)}+\frac{\sum\limits_{x\in X}\left(h_A^+(x)\wedge h_B^+(x)\right)}{\sum\limits_{x\in X}h_B^+(x)}\right)=$$

$$D_1\left(A/B\right)$$

同理可证$D_1\left(A/C\right)\le D_1\left(B/C\right)$。

综上①~③可知，式（1）为$HF(X)$上的包含度。类似地，可以证明式（2），式（3）为$HF(X)$上的包含度。

接下来的证明和计算，均以式（1）为例进行。若采用式（2）和式（3）则完全类似。

定理 3 $\forall A,B,C\in HF(X)$，若$A\subseteq B$，则$D\left(A/C\right)\le D\left(B/C\right)$。

证明 若$A\subseteq B$，则$\forall x\in X,\ h_A^-(x)\le h_B^-(x)$且$h_A^+(x)\le h_B^+(x)$，于是有

$$D_1\left(A/C\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sum\limits_{x\in X}\left(h_A^-(x)\wedge h_C^-(x)\right)}{\sum\limits_{x\in X}h_C^-(x)}+\frac{\sum\limits_{x\in X}\left(h_A^+(x)\wedge h_C^+(x)\right)}{\sum\limits_{x\in X}h_C^+(x)}\right)\le$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sum\limits_{x\in X}\left(h_B^-(x)\wedge h_C^-(x)\right)}{\sum\limits_{x\in X}h_C^-(x)}+\frac{\sum\limits_{x\in X}\left(h_B^+(x)\wedge h_C^+(x)\right)}{\sum\limits_{x\in X}h_C^+(x)}\right)=$$

$$D_1\left(B/C\right)$$

3 基于包含度的犹豫模糊信息系统的属性约简

定义 5 称四元有序组$G=(U,A,H,D)$为犹豫模糊信息系统，其中$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$是所考虑对象的非空有限集合，$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$是犹豫模糊条件属性集，$H=\{A_{jl_j}:U\to P[0,1],\ j\le m,l_j\le r_j\}$是对象集在条件属性集上的映射，$D=\{D_l:U\to P[0,1],l\le r\}$是模糊决策属性集。

定义 6 称

$$A(l_1,l_2,\cdots,l_m)=\bigcap_{j=1}^{m}A_{jl_j}(1\le l_j\le r_j)$$

为决策条件选择，称

$$\pi_B A(l_1,l_2,\cdots,l_m)=\bigcap_{a_j\in B}A_{jl_j}=A\left(l_j\left|a_j\in B\right.\right)$$

为决策条件选择在属性B上的投影，即在B上的决策条件选择。

设$D(\cdot/\cdot)$为犹豫模糊包含度，对于$B\subseteq A$，记

$$D_B^k\left(l_j\left|a_j\in B\right.\right)=D\left(D_k\big/A\left(l_j\left|a_j\in B\right.\right)\right),$$

$$M_B\left(l_j\left|a_j\in B\right.\right)=\left\{D_k\left|D_B^k\left(l_j\left|a_j\in B\right.\right)=\max_{s\le r}D_B^s\left(l_j\left|a_j\in B\right.\right)\right.\right\}.$$

定义 7 若对$\forall l_j\le r_j(j\le m)$，有

$$M_A\left(l_j\left|a_j\in A\right.\right)=M_B\left(l_j\left|a_j\in B\right.\right),$$

则称B为犹豫模糊信息系统G的最大决策协调集。若B是G的最大决策协调集，且B的任何真子集都不是G的最大决策协调集，则称B为犹豫模糊信息系统G的最大决策约简集。

该约简算法的步骤为：

第 1 步，计算决策条件选择，得到条件属性重新组合后的犹豫模糊信息系统；

第 2 步，计算组合条件属性在决策中的包含度，得到相应的决策规则；

第 3 步，通过逐项删减条件属性，重复第 2 步，从而得到最大决策约简集。

下面通过一个实例来说明该约简算法的具体计算步骤。

例 设论域$U=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)$为六个信用卡申请者，条件属性为$A=\{a_1,a_2\}$，$a_1=\{A_{11},A_{12}\}$，$a_2=\{A_{21},A_{22}\}$，决策属性为$D=\{D_1,D_2\}$，其中$A_{11}$—高银行平衡，$A_{12}$—低银行平衡，$A_{21}$—月消费高，$A_{22}$—月消费低；$D_1$—令人满意的申请者，$D_2$—不令人满意的申请者。假设有三位专家对申请者的情况进行评价，专家对每个申请者某一项属性给出的评分可以相同，申请者情况如表 1 所示。

表 1　犹豫模糊信息系统

Table 1 Hesitant fuzzy information systems

U	a_1		a_2		D	
	A_{11}	A_{12}	A_{21}	A_{22}	D_1	D_2
x_1	{0.2,0.4}	{0.4}	{0.3}	{0.6,0.7,0.8}	{0.4,0.5}	{0.1}
x_2	{0.1}	{0.8,0.9}	{0.7,0.8}	{0.1}	{0.2}	{0.9}
x_3	{0.2}	{0.5,0.6,0.7}	{0.1,0.3}	{0.6}	{0.1}	{0.6,0.7,0.8}
x_4	{0.5,0.6,0.7}	{0.3}	{0.7}	{0.1,0.3}	{0.6,0.7}	{0.1}
x_5	{0.3}	{0.2,0.3}	{0.3,0.4,0.5}	{0.2}	{0.1}	{0.2,0.3}
x_6	{0.7,0.9}	{0.1}	{0.1}	{0.8}	{0.7,0.8,0.9}	{0.1}

计算决策条件选择，得到条件属性重新组合后的犹豫模糊信息系统，如表 2 所示。

表 2　条件属性重组后的犹豫模糊信息系统

Table 2 Hesitant fuzzy information systems after restructuring the conditional attributes

U	$A_{11}\overline{\cap}A_{21}$	$A_{11}\overline{\cap}A_{22}$	$A_{12}\overline{\cap}A_{21}$	$A_{12}\overline{\cap}A_{22}$	D_1	D_2
x_1	{0.2,0.3}	{0.2,0.4}	{0.3}	{0.4}	{0.4,0.5}	{0.1}
x_2	{0.1}	{0.1}	{0.7,0.8}	{0.1}	{0.2}	{0.9}
x_3	{0.1,0.2}	{0.2}	{0.1,0.3}	{0.5,0.6}	{0.1}	{0.6,0.7,0.8}
x_4	{0.5,0.6,0.7}	{0.1,0.3}	{0.3}	{0.1,0.3}	{0.6,0.7}	{0.1}
x_5	{0.3}	{0.2}	{0.2,0.3}	{0.2}	{0.1}	{0.2,0.3}
x_6	{0.1}	{0.7,0.8}	{0.1}	{0.1}	{0.7,0.8,0.9}	{0.1}

计算组合条件属性在决策中的包含度，如表 3 所示。比如

$$D\left(D_1/(A_{11}\overline{\cap}A_{21})\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{0.2\wedge0.4+0.1\wedge0.2+0.1\wedge0.1+0.5\wedge0.6+0.3\wedge0.1+0.1\wedge0.7}{0.2+0.1+0.1+0.5+0.3+0.1}+\frac{0.3\wedge0.5+0.1\wedge0.2+0.1\wedge0.1+0.7\wedge0.7+0.3\wedge0.1+0.1\wedge0.9}{0.3+0.1+0.2+0.7+0.3+0.1}\right)\approx0.83$$

表 3　组合条件属性在决策中的包含度及决策规则

Table 3 The inclusion degree and decision rules of combined conditional attributes in decision making

A	D_A^1	D_A^2	M_A
$A_{11}\overline{\cap}A_{21}$	0.83	0.53	D_1
$A_{11}\overline{\cap}A_{22}$	0.88	0.47	D_1
$A_{12}\overline{\cap}A_{21}$	0.59	0.79	D_2
$A_{12}\overline{\cap}A_{22}$	0.64	0.75	D_2

于是，由表 3 可得相应的决策规则：

若高银行平衡且月消费高，则为令人满意的申请者；

若高银行平衡且月消费低，则为令人满意的申请者；

若低银行平衡且月消费高，则为不令人满意的申请者；

若低银行平衡且月消费低，则为不令人满意的申请者。

若去掉条件属性 A 中的属性 a_2，则剩下属性 a_1，计算属性 a_1 在决策中的包含度，如表 4 所示。若去掉条件属性 A 中的属性 a_1，则剩下属性 a_2，计算属性 a_2 在决策中的包含度，如表 5 所示。

表 4　属性 a_1 在决策中的包含度及决策规则

Table 4 The inclusion degree and decision rules of attribute a_1 in decision making

A	D_A^1	D_A^2	M_A
A_{11}	0.87	0.37	D_1
A_{12}	0.48	0.80	D_2

表 5　属性 a_2 在决策中的包含度及决策规则

Table 5　The inclusion degree and decision rules of attribute a_2 in decision making

A	D_A^1	D_A^2	M_A
A_{21}	0.60	0.61	D_2
A_{21}	0.65	0.46	D_1

由表 4 和表 5 可得相应的决策规则：

若高银行平衡，则为令人满意的申请者；

若低银行平衡，则为不令人满意的申请者；

若月消费高，则为不令人满意的申请者；

若月消费低，则为令人满意的申请者。

可见，若去掉属性 a_2，只剩下属性 a_1，则决策不变；若去掉属性 a_1，只剩下属性 a_2，则决策改变。所以，属性 a_2 对该犹豫模糊信息系统的决策规则不起作用，属性 a_1 是该犹豫模糊信息系统的最大决策约简集。

4　结束语

本文在犹豫模糊包含度的公理化定义下，给出了犹豫模糊包含度的计算公式，提出了一种基于包含度的犹豫模糊信息系统属性约简方法，为犹豫模糊集的多属性决策提供了一种新方法。该方法简洁明了，能够有效地解决实际问题，便于在实际中的应用与推广。下一步，考虑将犹豫模糊包含度引入到粗糙集的决策规则及属性约简中，对其应用进行拓展研究。

参考文献:

[1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and control, 1965, 8(3): 338-353.

[2] Torra V, Narukawa Y. On hesitant fuzzy sets and decision[C].Fuzzy Systems, 2009. FUZZ-IEEE 2009. IEEE International Conference on IEEE, 2009: 1378-1382.

[3] Torra V. Hesitant fuzzy sets[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2010,25(6): 529-539.

[4] Xu Z, Xia M. Distance and similarity measures for hesitant fuzzy sets[J]. Information Sciences, 2011, 181(11): 2128-2138.

[5] Xu Z, Xia M. Hesitant fuzzy entropy and cross－entropy and their use in multiattribute decision-making[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2012, 27(9): 799-822.

[6] Wei G. Hesitant fuzzy prioritized operators and their application to multiple attribute decision making[J]. Knowledge-Based Systems, 2012, 31: 176-182.

[7] Chen N, Xu Z, Xia M. Correlation coefficients of hesitant fuzzy sets and their applications to clustering analysis[J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37(4): 2197-2211.

[8] Deepak D, John S J. Hesitant fuzzy rough sets through hesitant fuzzy relations[EB/OL].http://www.afmi.or.kr/articles_in_%20press/2013-12/AFMI-H-131001R1/AFMI-H-131001.pdf.

[9] Yang X, Song X, Qi Y, et al. Constructive and axiomatic approaches to hesitant fuzzy rough set[J]. Soft Computing, 2014, 18(6): 1067-1077.

[10] 吴伟志．基于包含度的粗糙集模型[J]．浙江海洋学院学报:自然科学版,2000,19(4):311-315．

[11] 蒋劲松,娄申．基于包含度的模糊粗糙近似算子[J]．湖南工程学院学报:自然科学版,2004,14(2):91-94.