文章编号：1674-8085(2016)02-0014-04

再探非连通图 $C_{4m}\cup G$ 的优美标号

*吴跃生，王广富

(华东交通大学理学院，江西，南昌 330013)

摘　要：讨论非连通图 $C_{4m}\cup G$ 的优美性，再次对非连通图 $C_{4m}\cup G$ 的优美标号，给出了非连通图 $C_{4m}\cup G$ 是优美图的两个充分条件:非连通图 $C_{4m}\cup G$ 存在缺标号值 k+4m 的优美标号；当图 G 是特征为 k 且缺 k+m 标号值的交错图时，非连通图 $C_{4m}\cup G$ 存在缺标号值 k+4m，特征为 2m+k 的交错标号。

关键词：优美图；交错图；非连通图；优美标号

中图分类号：O159.1　**文献标识码**：A　DOI:10.3969/j.issn.1674-8085.2016.02.004

REVISITING GRACEFUL LABELING OF THE UNCONNECTED GRAPH $C_{4m}\cup G$

*WU Yue-sheng，WANG Guang-fu

(School of Science , East China Jiaotong University, Nanchang, Jiangxi 330013, China)

Abstract: The gracefulness of the unconnected graph $C_{4m}\bigcup G$ is discussed. Two more sufficient conditions are given for the gracefulness of unconnected graph $C_{4m}\bigcup G$. For arbitrary positive integer m, if there exists a alternating labeling of graph G, the critical value of the balanced of graph G is k and $k+3m$ is the missing value of the alternating labeling of graph G ,then there exists a graceful labeling of the unconnected graph $C_{4m}\bigcup G$ and $k+4m$ is the missing value of the graceful labeling of the unconnected graph $C_{4m}\bigcup G$; if there exists a alternating labeling of graph G, the critical value of the alternating labeling of graph G is k and $k+m$ is the missing value of the alternating labeling of graph G ,then there exists a alternating labeling of the unconnected graph $C_{4m}\bigcup G$ and $k+4m$ is the missing value of the alternating labeling of the unconnected graph $C_{4m}\bigcup G, 2m+k$ is the critical value of the alternating labeling of the unconnected graph $C_{4m}\bigcup G$.

Key words: graceful graph; alternating graph; unconnected graph; graceful labeling

1　引言与概念

记号 $V(G)$和 $E(G)$分别表示图 G 的顶点集和边集，m 和 n 均为非负整数，且满足 $0\le m<n$ 记号[m,n]表示整数集合 $\{m,m+1,\cdots,n\}$。记号 G_{k+m} 表示图 G 是特征为 k 且缺 k+m 标号值的交错图。本文所讨论的图均为无向简单图，未说明的符号及术语均同文献[1]。

图的优美标号问题是组合数学中一个热门课题[1-15]。

文献[3]讨论了非连通图 $C_{4m}\bigcup G$ 的优美性。给出了非连通图 $C_{4m}\bigcup G$ 是优美图的四个充分条件，证明了：

引理 1[3] 对任意正整数 m，非连通图 $C_{4m}\bigcup G_{k+3m}$ 存在缺标号值 k+1 的优美标号；

引理 2[3] 对任意正整数 m, 非连通图 $C_{4m}\bigcup G_{k+m+1}$ 存在缺标号值 k+1,特征为 $2m+k+1$ 的交错标号。

收稿日期：2015-04-09；修改日期：2015-09-06
基金项目：国家自然科学基金项目(11261019,11361024)，江西省教育厅科技计划项目(GJJ14380)
作者简介：*吴跃生(1959-)，男，江西瑞金人，副教授，硕士，主要从事优美标号研究(E-mail:616100567@qq.com);
王广富(1976-)，男，山东荷泽人，副教授，博士，主要从事图论研究(E-mail:wgfmath@126.com).

引理 3[3] 对任意正整数 m，非连通图 $C_{4m}\bigcup G_{k+2m+1}$ 存在缺标号值 $k+m$ 的优美标号。

引理 4[3] 对任意正整数 m，非连通图 $C_{4m}\bigcup G_{k+2m}$ 存在缺标号值 $k+3m$ 的优美标号。

本文再对非连通图 $C_{4m}\bigcup G$ 的优美性进行了探讨，给出了非连通图 $C_{4m}\bigcup G$ 是交错图的两个充分条件。

定义 1[1] 对于一个图 $G=(V,E)$，称 G 是优美图，θ 是 G 的一组优美标号是指：如果存在一个单射 θ：$V(G)\to[0,\ |E(G)|]$ 使得对所有边 $e=uv\in E(G)$，由 $\theta'(e)=|\theta(u)-\theta(v)|$ 导出的 $E(G)\to[1,|E(G)|]$ 是一个双射。

定义 2[2] 设 θ 是图 G 的优美标号，$V(G)=X\bigcup Y$，且 $X\bigcup Y=\Phi$，如果 $\max\limits_{v\in X}\{\theta(v)\}=k<\min\limits_{v\in Y}\{\theta(v)\}$，则称 θ 是 G 的交错标号，称 G 是在交错标号 θ 下的交错图，称 $\max\limits_{v\in X}\{\theta(v)\}=k$ 为交错图 G 关于交错标号 θ 的特征。

2 主要结果及其证明

定理 1 对任意正整数 $m(m\ge 2)$，如果 $m\le k+m\le|E(G_{k+m})|$，则非连通图 $C_{4m}\bigcup G_{k+m}$ 存在缺标号值 $k+4m$,特征为 $2m+k$ 的交错标号。

证 设 $V(C_{4m})=\{x_1,x_2,\cdots,x_{4m}\}$，$E(C_{4m})=\{x_1x_2,x_2x_3,\cdots,x_{4m-1}x_{4m},x_{4m}x_1\}$，$X,Y$ 是图 G_{k+m} 的一个二分化，θ_1 是图 G_{k+m} 的交错标号，且 $\max\limits_{v\in X}\theta_1(v)=k<\min\limits_{v\in Y}\theta_1(v)=k+1$，$|E(G_{k+m})|=q$。

定义 $C_{4m}\bigcup G_{k+m}$ 的顶点标号 θ 为：

$\theta(x_{2i})=4m-i+k,\ i=1,2,\cdots,m-1;$

$\theta(x_{2m})=k+5m,$

$\theta(x_{2i})=4m-i+k+1,\ i=m+1,m+2,\cdots,2m;$

$\theta(x_{2i-1})=i+k,\ i=1,2,\cdots,2m;$

$$\theta(v)=\begin{cases}\theta_1(v),v\in X,\\ \theta_1(v)+4m,v\in Y.\end{cases}$$

下证 θ 是非连通图 $C_{4m}\bigcup G_{k+m}$ 的优美标号。

（1）θ:$X\to$[0, k]是单射（或双射）：

θ:$Y\to[k+4m+1,\ q+4m]$-$\{k+5m\}$ 是单射；

$\theta:V(C_{4m})\to[k+1,k+4m-1]\bigcup\{k+5m\}$ 是单射；

因而，映射 θ：$V(C_{4m}\bigcup G_{k+m})\to[0,\ q+4m]$-$\{k+4m\}$ 是单射。

（2）

$$\theta'(x_{2i-1}x_{2i})=\begin{cases}|(i+k)-(4m-i+k)|, & i=1,2,\cdots,m-1;\\ |(i+k)-(4m-i+1+k)|, & i=m+1,m+3\cdots,2m.\end{cases}=$$

$$\begin{cases}4m-2i, & i=1,2,\cdots,m-1;\\ 4m-2i+1, & i=m+1,m+2\cdots,2m.\end{cases}$$

$\theta'(x_{2m-1}x_{2m})=4m,$

$$\theta'(x_{2i}x_{2i+1})=\begin{cases}|(4m-i+k)-(i+k+1)|, & i=1,2,\cdots,m-1;\\ |(4m-i+k+1)-(i+1+k)|, & i=m+1,m+3\cdots,2m-1.\end{cases}$$

$$\theta'(x_{2i}x_{2i+1})=\begin{cases}4m-2i-1, & i=1,2,\cdots,m-1;\\ 4m-2i, & i=m+1,m+3\cdots,2m-1.\end{cases}$$

$\theta'(x_{2m}x_{2m+1})=4m-1,\ \theta'(x_{4m}x_1)=2m,$

$\theta':E(C_{4m})\to[1,4m]$ 是双射；

$\theta':E(G_{k+m})\to[4m+1,q+4m]$ 是双射。

因而，映射 θ'：$E(C_{4m}\bigcup G_{k+m})\to[1,\ q+4m]$ 是一一对应。可知 θ 就是非连通图 $C_{4m}\bigcup G_{k+m}$ 的缺 $k+4m$ 标号值的优美标号。

令 $X_1=X\bigcup\{x_{2i-1},i=1,2,\cdots,2m\}$，

$Y_1=Y\bigcup\{x_{2i},i=1,2,\cdots,2m\}$，

则有 $\max\limits_{v\in X_1}\theta(v)=\theta(x_{4m-1})=2m+k<\min\limits_{v\in Y_1}\theta(v)=\theta(x_{4m})=2m+k+1$。

所以，θ 就是非连通图 $C_{4m}\bigcup G_{k+m}$ 的特征为 $2m+k$，且缺 $k+4m$ 标号值的交错标号。

引理 5[1] 圈 C_{4n} 存在特征为 $2n-1$，且缺 $3n$ 的交错标号。

注意到 $3n=(2n-1)+n+1$，由定理 1 和引理 5 有：

推论 1 对任意正整数 $m(m\ge 2)$，非连通图 $C_{4m}\bigcup C_{4m-4}$ 存在特征为 $4m-3$，且缺 $6m-3$ 标号值的交错标号。

例 1 当 $m=3$ 时，由推论 1 给出的非连通图 $C_{12}\bigcup C_8$ 存在特征为 9，且缺 15 标号值的优美标号为：

C_{12}：4,14,5,13,6,18,7,12,8,11,9,10;

C_8：0,20,1,19,2,17,3,16.

注意到 $6m-3=(4m-3)+2m$，由定理 1 和推论 1 有：

推论 2 对任意正整数 $m(m\ge 2)$，非连通图 $C_{8m}\cup C_{4m}\cup C_{4m-4}$ 存在特征为 $8m-3$，且缺 $12m-3$ 标号值的交错标号。

例 2 当 $m=3$ 时，由推论 2 给出的非连通图 $C_{24}\cup C_{12}\cup C_8$ 存在特征为 21，且缺 33 标号值的优美标号为：

C_{24}： 10,32,11,31,12,30,13,29,14,28,15,39,16,27,17,26,18,25,19,24,20,23,21,22;

C_{12}:4,38,5,37,6,42,7,36,8,35,9,34:

C_8:0,44,1,43,2,41,3,40

注意到 $12m-3=(8m-3)+4m$，由定理 1 和推论 2 有：

推论 3 对任意正整数 $m(m\ge 2)$，非连通图 $C_{16m}\cup C_{8m}\cup C_{4m}\cup C_{4m-4}$ 存在特征为 $16m-3$，且缺 $24m-3$ 的优美标号。

注意到 $24m-3=(16m-3)+8m$，由定理 1 和推论 3 有：

推论 4 对任意正整数 $m(m\ge 2)$，非连通图 $C_{32m}\cup C_{16m}\cup C_{8m}\cup C_{4m}\cup C_{4m-4}$ 存在特征为 $32m-3$，且缺 $48m-3$ 的优美标号。

继续重复上述过程，有：

推论 5 对任意正整数 $m,n(m\ge 2,n\ge 2)$，非连通图 $C_{4m-4}\cup\left(\bigcup_{i=2}^{n}C_{2^i m}\right)$ 存在特征为 $2^n m-3$，且缺 $3m2^{n-1}-3$ 的优美标号。

例 3 当 $m=3,n=4$ 时，由推论 5 给出的非连通图 $C_{48}\cup C_{24}\cup C_{12}\cup C_8$ 存在特征为 45，且缺 69 标号值的优美标号为：

C_{48}:22,68,23,67,24,66,25,65,26,64,27,63,28,62,29,61,30,60,31,59,32,58,33,81,34,57,35,56,36,55,37,54,38,53,39,52,40,51,41,50,42,49,43,48,44,47, 45,46;

C_{24}:10,80,11,79,12,78,13,77,14,76,15,87,16,75,17,74,18,73,19,72,20,71,21,70;

C_{12}:4,86,5,85,6,90,7,84,8,83,9,82；

C_8:0,92,1,91,2,89,3,88

当 $m=3,n=5$ 时,由推论 5 给出的非连通图 $C_{96}\cup C_{48}\cup C_{24}\cup C_{12}\cup C_8$ 存在特征为 93，且缺 141 标号值的优美标号为:

C_{96}:46,140,47,139,48,138,49,137,50,136,51,135,52,134,53,133,54,132, ,55, 131,56,130,57,129,58,128,59,127,60,126,61,125,62,124.63,123,64,122,65,121,66,120,67,119,68,118,69,165,70,117,71,116,72,115,73,114,74,113,75,112,76,111,77,110,78,109,79,108,80,107,81,106,82,105,83,104,84,103,85,102,86,101,87,100,88,99,89,98,90,97,91,96,92,95,93,94;

C_{48}： 22,164,23,163,24,162,25,161,26,160,27,159,28,158,29,157,30,156,31,155,32,154,33,177,34,153,35,152,36,151,37,150,38,149,39,148,40,147,41,146,42,145,43,144,44,143,45,142;

C_{24}： 10,176,11,175,12,174,13,173,14,172,15,183,16,171,17,170,18,169,19,168,20,167,21,166;

C_{12}： 4,182,5,181,6,186,7,180,8,179,9,178;

C_8： 0,188,1,187,2,185,3,184

由引理 1 和推论 5 有：

推论 6 对任意正整数 $m,n,s(m\ge 2,n\ge 2)$，当 $3s=m2^{n-1}$ 时，非连通图 $C_{4s}\cup C_{4m-4}\cup\left(\bigcup_{i=2}^{n}C_{2^i m}\right)$ 存缺 $2^n m-2$ 的优美标号。

例 4 当 $m=3,n=2,s=2$ 时，由推论 6，非连通图 $C_8\cup(C_{12}\cup C_8)$ 存在缺标号值 10 的优美标号为:

C_8:11,17,12,16,23,15,13,14;

C_{12}:4,22,5,21,6,26,7,20,8,19,9,18;

C_8:0,28,1,27,2,25,3,24

由引理 2 和推论 5 有：

推论 7 对任意正整数 $m,n,s(m\ge 2,n\ge 2)$，当 $s+1=m2^{n-1}$ 时，非连通图 $C_{4s}\cup C_{4m-4}\cup\left(\bigcup_{i=2}^{n}C_{2^i m}\right)$ 存缺 $2^n m-2$ 的，特征值为 $2^n m-2+2s$ 的交错标号。

例 5 当 $m=3,n=2,s=5$ 时，由推论 7，非连通图 $C_{20}\cup(C_{12}\cup C_8)$ 存在缺标号值 10 的特征值为 20 的交错标号为:

C_{20}:11,29,12,28,13,27,14,26,15,35,16,25,17,24,18,23,19,22,20,21;

C_{12}:4,34,5,33,6,38,7,32,8,31,9,30;

C_8:0,40,1,39,2,37,3,36

定理 2 对任意正整数 m，如果 $3m-1\le k+3m-1\le\left|E(G_{k+3m-1})\right|$，则非连通图 $C_{4m}\cup G_{k+3m-1}$ 存在缺标号值 $k+4m$ 的优美标号。

证 设 $V(C_{4m})=\{x_1,x_2,\cdots,x_{4m}\}$，$E(C_{4m})=$

$\{x_1x_2, x_2x_3, \cdots, x_{4m-1}x_{4m}, x_{4m}x_1\}$，$X,Y$ 是图 G_{k+3m-1} 的一个二分化，θ_1 是图 G_{k+3m-1} 的交错标号，且 $\max_{v\in X}\theta_1(v)=k<\min_{v\in Y}\theta_1(v)=k+1$，$|E(G_{k+3m-1})|=q$。

定义 $C_{4m}\cup G_{k+3m-1}$ 的顶点标号 θ 为：

$\theta(x_{2i})=4m-i+k,\ i=1,2,\cdots,2m;$

$\theta(x_{2i-1})=i+k,\ i=1,2,\cdots,m;$

$\theta(x_{2m+1})=k+7m-1,$

$\theta(x_{2i-1})=i+k-1,\ i=m+2,m+3,\cdots 2m;$

$$\theta(v)=\begin{cases}\theta_1(v), v\in X,\\ \theta_1(v)+4m, v\in Y.\end{cases}$$

下面验证 θ 是非连通图 $C_{4m}\cup G_{k+3m-1}$ 的优美标号。

（1）θ:$X\to[0,\ k]$ 是单射（或双射）；θ:$Y\to[\,k+4m+1,\ q+4m\,]$-$\{7m+k\}$是单射；

θ: $V(C_{4m})\to[\,k+1\,,k+4m-1\,]\cup\{7m+k-1\}$ 是单射；

因而，映射 θ: $V(C_{4m}\cup G_{k+3m-1})\to[0,q+4m]$-$\{k+4m\}$是单射。

（2）

$$\theta'(x_{2i}x_{2i-1})=\begin{cases}|(i+k)-(4m-i+k)|, & i=1,2,\cdots,m\\ |(i+k-1)-(4m-i+k)|, & i=m+2,m+3\cdots,2m\end{cases}=$$

$$\begin{cases}4m-2i, & i=1,2,\cdots,m;\\ 4m-2i+1, & i=m+2,m+3\cdots,2m.\end{cases}$$

$\theta'(x_{2m+2}x_{2m+1})=4m,$

$$\theta'(x_{2i}x_{2i+1})=\begin{cases}|(4m-i+k)-(i+k+1)|, & i=1,2,\cdots,m-1;\\ |(4m-i+k)-(i+k)|, & i=m+1,m+3\cdots,2m-1.\end{cases}$$

$$\theta'(x_{2i}x_{2i+1})=\begin{cases}4m-2i-1, i=1,2,\cdots,m-1;\\ 4m-2i, i=m+1,m+3\cdots,2m-1.\end{cases}$$

$\theta'(x_{2m}x_{2m+1})=4m-1,\ \theta'(x_{4m}x_1)=2m-1,$

$\theta':E(C_{4m})\to[1,4m]$ 是双射；

$\theta':E(G_{k+3m-1})\to[\,4m+1,q+4m\,]$是双射。

因而，映射 θ'：$E(C_{4m}\cup G_{k+3m-1})\to[0,q+4m]$ 是一一对应。

可知 θ 就是非连通图 $C_{4m}\cup G_{k+3m-1}$ 的缺 $k+4$m 标号值的优美标号。

由定理 2 和引理 1 有：

推论 8 对任意正整数 m，非连通图 $C_{4m}\cup C_{12m-8}$ 存在缺标号值 $10m-5$ 的优美标号。

例 6 当 $m=2$ 时，由推论 8 非连通图 $C_8\cup C_{16}$ 存在缺标号值 15 的优美标号为:

C_8:8,14,9,13,20,12,10,11;

C_{16}:0,24,1,23,2,22,3,21,4,19,5,18,6,17,7,16

参考文献：

[1] 马克杰.优美图[M]. 北京:北京大学出版社,1991,

[2] 杨显文. 关于 C_{4m} 蛇的优美性[J].工程数学学报，1995,12(4):108-112.

[3] 吴跃生,王广富,徐保根.非连通图 $C_{4m}\cup G$ 的优美标号[J].重庆师范大学学报:自然科学版,2015,32(2): 79-83.

[4] 吴跃生. 关于圈 C_{4h} 的(r_1, r_2,⋯,r_{4h})-冠的优美性[J]. 华东交通大学学报,2011,28(1):77-80.

[5] 吴跃生,李咏秋. 关于圈 C_{4h+3} 的(r_1, r_2,⋯,r_{4h+3})-冠的优美性[J].吉首大学学报:自然科学版,2011,32(6): 1-4.

[6] 吴跃生. 关于图 $P_{6k+5}^3\cup P_n^3$ 的优美性[J].吉首大学学报:自然科学版, 2012,33(3):4-7.

[7] 吴跃生,徐保根.两类非连通图 $(P_2\vee\overline{K_n})(0,0,r_1,0,\cdots,0,r_n)\cup St(m)$ 及 $(P_2\vee\overline{K_n})(r_1+a,r_2,\ 0,\cdots,0)\cup G_r$ 的优美性[J]. 中山大学学报:自然科学版，2012,51(5):63-66 .

[8] 吴跃生. 图 C_7 (r_1 ,r_2, r_3, ,r_4, r_5,0,0)∪$St(m)$的优美性[J]. 吉首大学学报:自然科学版,2012,33(5):9-11.

[9] 吴跃生,王广富,徐保根. 关于 $C_{4h+1}\odot K_1$ 的(Gr_1, Gr_2,…,Gr_{4h+1},Gr_{4h+2})-冠的优美性[J].山东大学学报:理学版, 2013,48(4):25-27.

[10] 吴跃生. 关于圈 C_{4h+3} 的(Gr_1, Gr_2,…,Gr_{4h+3})-冠的优美性[J].吉首大学学报:自然科学版,2013,34(4): 4-9.

[11] Gallian J.A.A Dynamic Survey of Graph Labeling[J]. The Electronic Joumal of Combinatorics，2013,16 (DS6):301-308

[12] 吴跃生. 非连通图 $G_{+e}\cup H_{k-1}$ 的优美性[J].吉首大学学报:自然科学版,2014,35(2):3-5.

[13] 贾慧羡,左大伟. 与扇图相关的 2 类图的超边优美标号[J]. 吉首大学学报:自然科学版,2014,35(2):6-9.

[14] 吴跃生. 非连通图 $C_{4m-1}\cup G$ 的优美标号[J].吉首大学学报:自然科学版,2014,35(3):1-3.

[15] 吴跃生. 再探非连通图 $C_{4m-1}\cup G$ 的优美标号[J]. 吉首大学学报:自然科学版,2015,36(1):1-4.