

文章编号: 1674-8085(2021)02-0014-05

一类分数阶比率依赖型捕食系统的动力学分析

*蒲武军, 杜争光

(陇南师范高等专科学校数学系, 甘肃, 陇南 742500)

摘 要: 讨论了一类食饵带有疾病的分数阶比率依赖型捕食系统的动力学行为。利用线性化方法定性分析了各类平衡点的稳定性, 并给出了其正平衡点局部渐近稳定的充分条件。数值模拟显示, 参数和阶数对平衡点的收敛速度及其稳定性产生很重要的影响。

关键词: 分数阶; 比率依赖型捕食系统; 局部渐近稳定性; Hopf 分支

中图分类号: O157.13

文献标识码: A

DOI:10.3969/j.issn.1674-8085.2021.02.003

DYNAMICS OF A RATIO-DEPENDENT PREDATOR-PREY OF FRACTIONAL ORDER SYSTEM

*PU Wu-jun, DU Zheng-guang

(Department of Mathematics, Longnan Teachers College, Longnan, Gansu 742500, China)

Abstract: In this paper, we studied the dynamic behavior of a fractional-order ratio-dependent predator-prey system with disease on the prey. The stability of all kinds of equilibrium points of the system was qualitatively analyzed with the linearization method, the sufficient conditions for the local asymptotic stability of the positive equilibrium point of the system were given, and the numerical simulation showed that the parameters and order of the system had an important influence on the convergence rate and stability of the equilibrium point.

Key words: fractional-order; ratio-dependent predator-prey model; local asymptotic stability; Hopf bifurcation

近年来, 随着计算机技术的不断发展, 分数阶计算引起了许多学者的关注, 并成功应用到工程技术领域^[1-2], 特别是许多应用数学工作者^[3-7]用分数阶计算模拟现实过程。靳桢^[8]研究了一类食饵带有疾病的比率依赖型捕食系统, 讨论了其平衡点的稳定性。受此启发, 本文考虑如下分数阶模型:

$$\begin{cases} D^\alpha S = rS(1 - \frac{S+I}{K}) - \beta IS, \\ D^\alpha I = \beta IS - \frac{\gamma IR}{a+I} - \mu I, \\ D^\alpha R = \frac{\theta IR}{a+I} - \delta R, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\alpha \in (0, 1]$, D 是分数阶导数, S 代表易感者食

饵的种群密度, I 代表感染者种群密度, R 表示捕食者种群密度, 初始条件为 $S(0) = S_0 > 0$, $I(0) = I_0 > 0$, $R(0) = R_0 > 0$ 。参数 $r, K, \beta, \gamma, a, \mu, \theta, \delta$ 均为非负常数, 其中 r 表示食饵的增长率, K 为环境的容纳量, β 代表感染力, γ 为搜索率, a 为半饱和常数, μ 表示被感染食饵的总的死亡率, θ 为转换因子, δ 为捕食者总的死亡率。

1 预备知识

定义 1^[9] 设函数 $f: R^+ \rightarrow R$, 则其 Riemann-Liouville 分数阶积分定义如下:

收稿日期: 2020-10-14; 修改日期: 2020-12-04

基金项目: 陇南市 2019 年科技指导性计划项目 (2019-ZD-14)

作者简介: *蒲武军(1979-), 男, 甘肃庄浪人, 讲师, 硕士, 主要从事生物数学方面的研究(E-mail:puwj2005@163.com); 杜争光(1973-), 男, 甘肃礼县人, 副教授, 主要从事应用微分方程方面的研究(E-mail:lnsz_dzg@163.com).

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

其中 $\alpha \in R^+$, $\Gamma(\cdot)$ 是欧拉伽玛函数。

定义 2^[9] 对 $n-1 < \alpha < n \in Z^+$, Caputo 分数阶导数定义如下:

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^n(\tau) d\tau.$$

引理 1^[10] 考虑如下的自治系统:

$$D^\alpha x = Ax, x(0) = x_0 \quad (2)$$

其中 $0 < \alpha \leq 1, x \in R^n, A \in R^{n \times n}$ 。则系统 (2) 渐近稳定的充要条件是矩阵 A 的所有特征值满足条件 $|\arg(\lambda)| > \frac{\alpha\pi}{2}$; 进一步, 系统 (2) 稳定的充要

条件是矩阵 A 的特征值满足条件 $|\arg(\lambda)| \geq \frac{\alpha\pi}{2}$, 且几何重数为 1 的临界特征值满足条件 $|\arg(\lambda)| = \frac{\alpha\pi}{2}$ 。矩阵 A 的特征值 λ 的几何重数是向量空间 v 的子空间的维数, 满足 $Av = \lambda v$ 。

引理 2^[11] 考虑如下的分数阶系统:

$$D^\alpha x = f(x), x(0) = x_0 \quad (3)$$

其中 $0 < \alpha \leq 1, x \in R^n$ 。若系统(3)在平衡点处的雅可比矩阵 $J = \frac{\partial f}{\partial x}$ 的所有特征值 λ_i 满足条件 $|\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2}$, 则该平衡点局部渐近稳定。

2 主要结果及其证明

2.1 解的存在唯一性

定理 1 分数阶系统 (1) 在 R_+^3 中存在唯一非负解, 且其任意始于 Λ 的解均一致有界, 其中 $\Lambda = \{(S, I, R) \in R_+^3 : 0 \leq S + I + R \leq \frac{rK}{\eta}\}$ 是其正不变集。

证明: 首先证明系统 (1) 有唯一解 $X \in \{(S, I, R) \in R^3 : \max\{|S|, |I|, |R|\} \leq M\}$ 。

定义映射 $f(X) = (f_1(X), f_2(X), f_3(X))$, 其中

$$f_1(X) = rS(1 - \frac{S+I}{K}) - \beta IS,$$

$$f_2(X) = \beta IS - \frac{\gamma IR}{a+I} - \mu I,$$

$$f_3(X) = \frac{\theta IR}{a+I} - \delta R. \text{ 对 } \forall X, \bar{X} \in \Omega,$$

$$\|f(X) - f(\bar{X})\| = \sum_{i=1}^3 |f_i(X) - f_i(\bar{X})| \leq L \|X - \bar{X}\|,$$

其中 $L = \max\{(r + \frac{3r}{K} + 2\beta)M, [(\frac{\gamma+\theta}{a} + \frac{r}{K} + 2\beta)M + \mu][\frac{(\gamma+\theta)}{a^2}M + \gamma + \theta + \delta]\}$ 。即 $f(X)$ 关于 X 满足局部李普希茨条件, 由文献[12]的引理 5, 系统 (1) 有唯一解 $X(t)$ 。

其次, 任意始于 R_+^3 的解, 有 $S(t) \geq 0$, 对任意的 $t \geq t_0$ 。设存在时刻 $t_1 > t_0$ 使得

$$S(t) > 0, t \in [t_0, t_1], S(t_1) = 0, S(t_1^+) < 0 \quad (4)$$

由 (4) 和 (1) 的第一个方程, 有 $D^\alpha S(t_1)|_{S(t_1)=0} = 0$ 。由文献[13]的引理 9 知 $S(t_1^+) = 0$, 这与 $S(t_1^+) < 0$ 矛盾。因此, 对 $\forall t \geq t_0, S(t) \geq 0$ 。同理可证 $I(t) \geq 0, R(t) \geq 0, \forall t \geq t_0$ 。

最后证明系统 (1) 始于 Λ 的所有解均一致有界。

定义函数 $V(t) = S(t) + I(t) + \frac{\gamma}{\theta} R(t)$, 则有

$$D^\alpha V = rS - \frac{r}{K} S^2 - \frac{rIS}{K} - \mu I - \frac{\delta\theta}{\gamma} R \leq rK - \eta V,$$

其中 $\eta = \min\{r, \mu, \delta\}$, 于是

$$V(t) \leq (-\frac{rK}{\eta} + V(t_0))E_\alpha(-\eta t^\alpha) + \frac{rK}{\eta},$$

由于 $E_\alpha(-\eta t^\alpha) > 0$, 因此当 $V(t_0) \leq \frac{rK}{\eta}$, 即有

$$S(t) + I(t) + R(t) = V(t) \leq \frac{rK}{\eta},$$

即闭集 $\Lambda = \{(S, I, R) \in R_+^3 : 0 \leq S + I + R \leq \frac{rK}{\eta}\}$ 是系统 (1) 的正不变集。

2.2 平衡点的局部稳定性

令 $D^\alpha S = 0, D^\alpha I = 0$ 和 $D^\alpha R = 0$, 易得系统 (1) 的四个平衡点分别为 $E_0 = (0, 0, 0)$, $E_1 = (K, 0, 0)$,

$$E_2 = (\frac{\mu}{\beta}, \frac{r(\beta K - \mu)}{\beta(r + K\beta)}, 0), E_3 = (S^*, I^*, R^*), \text{ 其中}$$

$$S^* = K - \frac{(r + K\beta)I^*}{r},$$

$$I^* = \frac{a\delta}{\theta - \delta}, R^* = \frac{(a + I^*)(\beta S^* - \mu)}{\gamma} \quad (5)$$

为证明平衡点的稳定性, 先给出系统 (1) 在 (S, I, R) 处的雅可比矩阵:

$$J(S, I, R) = \begin{pmatrix} r - \frac{2rS+rI}{K} - \beta I & -\frac{rS}{K} - \beta S & 0 \\ \beta I & \beta S - \frac{a\gamma R}{(a+I)^2} - \mu & -\frac{\gamma I}{(a+I)} \\ 0 & \frac{a\theta R}{(a+I)^2} & \frac{\theta I}{(a+I)} - \delta \end{pmatrix} \quad (6)$$

显然, 系统 (1) 的平衡点 E_0 和 E_1 均不稳定。

定理 2 若 $r(\theta - \delta)(\beta K - \mu) > \delta a \beta (r + K \beta)$, 则系统 (1) 的平衡点 E_2 不稳定; 若 $r(\theta - \delta)(\beta K - \mu) < \delta a \beta (r + K \beta)$, 则 (1) 的平衡点 E_2 局部渐近稳定。

证明: 结合 (6), 易得系统 (1) 在平衡点 E_2 处的雅可比矩阵的特征方程可表示为

$$(\lambda - Q_{33})(\lambda^2 + Q_{11}\lambda + Q_{12}Q_{21}) = 0 \quad (7)$$

其中 Q_{11}, Q_{12}, Q_{21} 和 Q_{33} 分别为:

$$Q_{11} = \frac{r\mu}{K\beta}, Q_{12} = \frac{\mu(r + K\beta)}{K\beta}, Q_{21} = \frac{r(\beta K - \mu)}{r + K\beta},$$

$$Q_{33} = \frac{r\theta(\beta K - \mu)}{a\beta(r + K\beta) + r(\beta K - \mu)} - \delta$$

因此, $J(E_2)$ 的三个特征值可表示为

$$\lambda_{1,2} = -\frac{r\mu}{2K\beta} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{r\mu}{K\beta}\right)^2 - \frac{4r\mu(K\beta - \mu)}{K\beta}},$$

$$\lambda_3 = Q_{33}.$$

由于 $\Re(\lambda_1) = \Re(\lambda_2) < 0$, 以下分两种情况讨论:

情形 1:

$$\text{若 } \Re(\lambda_1) = \Re(\lambda_2) < 0, \sqrt{\left(\frac{r\mu}{K\beta}\right)^2 - \frac{4r\mu(K\beta - \mu)}{K\beta}} \geq 0,$$

则 $J(E_2)$ 的特征值 $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, 即有

$$|\arg(\lambda_{1,2})| > \frac{\alpha\pi}{2}.$$

情形 2:

$$\text{若 } \Re(\lambda_1) = \Re(\lambda_2) < 0, \sqrt{\left(\frac{r\mu}{K\beta}\right)^2 - \frac{4r\mu(K\beta - \mu)}{K\beta}} < 0,$$

则 λ_1 和 $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ 为一对共轭复根, 仍然有

$$|\arg(\lambda_{1,2})| > \frac{\alpha\pi}{2}.$$

若 $r(\theta - \delta)(\beta K - \mu) > \delta a \beta (r + K \beta)$, 则 $\arg(\lambda_3) = 0$, 注意到 $|\arg(\lambda_{1,2})| > \frac{\alpha\pi}{2}$. 结合情形 1 和情形 2 及引理 1, 易知平衡点 E_2 不稳定。

若 $r(\theta - \delta)(\beta K - \mu) < \delta a \beta (r + K \beta)$, 则

$$\arg(\lambda_3) = \pi, \text{ 故 } |\arg(\lambda_3)| > \frac{\alpha\pi}{2}, \text{ 结合情形 1 和情形 2 及引理 2, 知平衡点 } E_2 \text{ 局部渐近稳定。}$$

由 (6) 易得系统 (1) 在平衡点 E_3 处的雅可比矩阵的特征方程可表示为

$$\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C = 0 \quad (8)$$

$$\text{其中 } A = \frac{rS^*}{K} + \frac{\gamma R^* I^*}{(a + I^*)^2},$$

$$B = \frac{a\theta\gamma R^* I^*}{(a + I^*)^2} +$$

$$\beta\left(\frac{r}{K} + \beta\right)S^* I^*, C = \frac{ra\theta\gamma S^* I^* R^*}{K(a + I^*)^2}.$$

方程(8)三个特征根可表示为

$$\lambda_1 = \tau_2 - \tau_1 + \frac{\tau_3}{\tau_2}, \lambda_{2,3} = -\frac{1}{2}[2\tau_1 + \tau_2 + \frac{\tau_3}{\tau_2} \pm \sqrt{3}(\tau_2 - \frac{\tau_3}{\tau_2})i]$$

其中

$$\tau_1 = \frac{A}{3}, \tau_2 = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{A^3}{27} + \frac{AB}{6} - \frac{C}{2}\right)^2 - \tau_3^3} - \frac{A^3}{27} + \frac{AB}{6} - \frac{C}{2}}, \tau_3 = \frac{A^2}{9} - \frac{B}{3}$$

定理 3 对系统 (1), 如果 $\tau_2 + \frac{\tau_3}{\tau_2} < \tau_1$, 则以下

论断成立:

(i) 对任意的 $\alpha \in (0, 1)$, 系统 (1) 的平衡点 E_3 局部渐近稳定;

(ii) 若 $0 < \sqrt{3}\left(\tau_2 - \frac{\tau_3}{\tau_2}\right) < 2\tau_1 + \tau_2 + \frac{\tau_3}{\tau_2}$, 则系统(1)的平衡点 E_3 局部渐近稳定的充要条件是 $\alpha \in (0, \alpha^*)$, 其中 $\alpha^* = \frac{2}{\pi} |\tan^{-1}(\frac{\phi}{\varphi})|$, $\phi = \sqrt{3}\left(\tau_2 - \frac{\tau_3}{\tau_2}\right)$, $\varphi = 2\tau_1 + \tau_2 + \frac{\tau_3}{\tau_2}$;

(iii) 若 $\sqrt{3}\left(\tau_2 - \frac{\tau_3}{\tau_2}\right) \geq 2\tau_1 + \tau_2 + \frac{\tau_3}{\tau_2}$, 对 $\forall \alpha \in (0, 1)$, 系统 (1) 的平衡点 E_3 不稳定。

证明: 结论(i)和(iii)显然成立, 故只需证明结论(ii)成立即可, 注意到

$$0 < \sqrt{3}\left(\tau_2 - \frac{\tau_3}{\tau_2}\right) < 2\tau_1 + \tau_2 + \frac{\tau_3}{\tau_2}$$

方程(8)有二复根 $\lambda_{2,3}$, 其实部 $\sqrt{3}\left(\tau_2 - \frac{\tau_3}{\tau_2}\right) > 0$, 则

$$|\arg(\lambda_{2,3})| = \tan^{-1}\left(\frac{\phi}{\varphi}\right), \quad \varphi = 2\tau_1 + \tau_2 + \frac{\tau_3}{\tau_2},$$

$\phi = \sqrt{3}(\tau_2 - \frac{\tau_3}{\tau_2})$ 。除此之外, 条件 $\tan^{-1}(\frac{\phi}{\varphi}) = \frac{\alpha^* \pi}{2}$, $\alpha \in (0, \alpha^*)$ 等价于 $|\arg(\lambda_{2,3})| > \frac{\alpha \pi}{2}$, 此即说明结论 (ii) 成立。亦即定理 3 成立。

3 数值模拟

取定参数 $r = 2.5, \beta = 0.04, K = 13, \gamma = 17, a = 1, \mu = 0.5, \theta = 17, \delta = 0.5$, 当 $\alpha = 0.97$ 时, 定理 3 的条件 $\tau_2 + \frac{\tau_3}{\tau_2} < \tau_1$ 成立, 如图 1 左图显示 S, I, R 渐近收敛到正平衡点 (S^*, I^*, R^*) , 系统的相图 (右

图) 显示正平衡点 (S^*, I^*, R^*) 局部渐近稳定; 改变其中的参数 $K = 35, \gamma = 15, \alpha = 0.97$ 保持不变, 其它参数如上所示, 条件 $\tau_2 + \frac{\tau_3}{\tau_2} < \tau_1$ 仍然成立, 图 2

的意义同上; 其他参数不变, 取 $\alpha = \alpha^* = 0.988$, 定理 3 的条件 (ii) 成立, 图 3 左图显示 S, I, R 出现周期性振荡, 系统的相图 (右图) 显示正平衡点 (S^*, I^*, R^*) 附近出现周期性轨道; 其他参数不变, 取 $\alpha = 0.998 > \alpha^* = 0.988$, 定理 3 的条件 (iii) 成立, 图 4 左图显示 S, I, R 发散, 系统的相图 (右图) 显示正平衡点 (S^*, I^*, R^*) 不稳定。

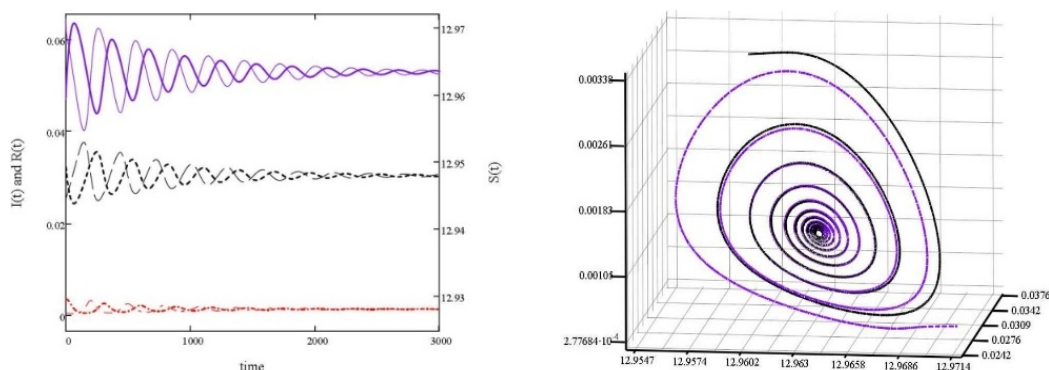


图 1 易感者 S , 感染者 I , 捕食者 R 的收敛性及其相图

Fig.1 The convergence of susceptible prey S , infected prey I , predator R and phase portrait.

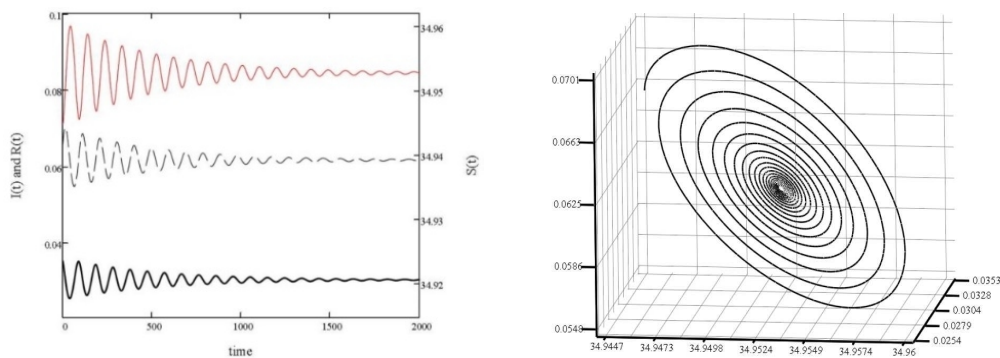


图 2 不同参数下易感者 S , 感染者 I , 捕食者 R 的收敛性及其相图

Fig.2 The convergence of susceptible prey S , infected prey I , predator R and phase portrait with different coefficient.

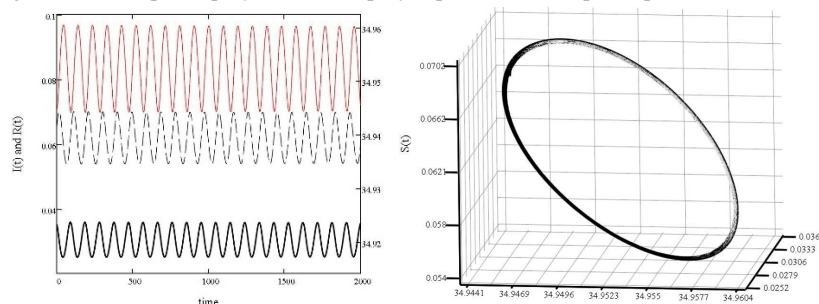


图 3 $\alpha = 0.988$ 时, 易感者 S , 感染者 I , 捕食者 R 的振荡及正平衡点附近的周期性闭轨

Fig.3 Oscillatory behavior of susceptible prey S , infected prey I , predator R and the periodic orbit near of positive equilibrium, with $\alpha = 0.988$

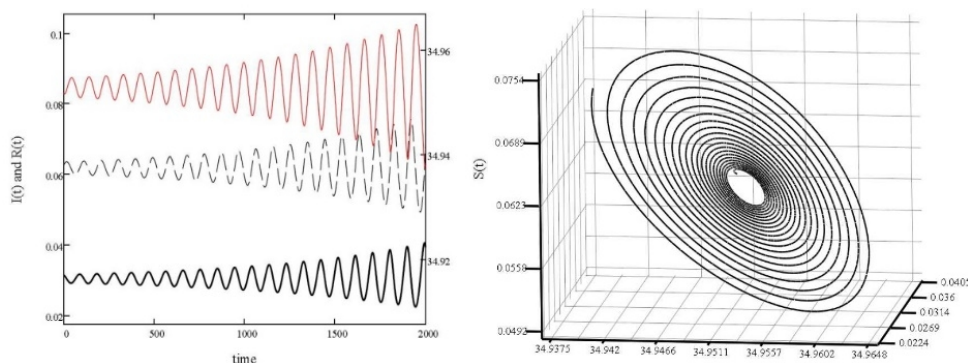


图4 $\alpha=0.988$ 时, 易感者 S , 感染者 I , 捕食者 R 发散及正平衡点不稳定

Fig.4 The divergence of susceptible prey S , infected prey I , predator R and the positive equilibrium is unstable, with $\alpha=0.988$.

4 讨论

本文主要讨论了一类食饵种群带有疾病的分数阶比率依赖型捕食系统的各类平衡点的稳定性, 结果表明, 在分数阶导数意义下正平衡点的稳定性和整数阶导数相比, 除了受到相关参数的限制外, 阶数 α 对正平衡点的稳定性有着至关重要的影响, 数值模拟表明, 随着 α 的变化, 在临界值 α^* 处发生 Hopf 分支现象, 但当 α 超过临界值 α^* 时, 分数阶系统在原有的参数下会失去稳定性。这充分说明, 在分数阶导数意义下系统的平衡点的稳定性明显要复杂于整数阶意义下, 因此本文的结果是对文献 [8] 中所描述系统的完善和拓展。

参考文献:

- [1] Laskin N. Fractional market dynamics[J]. Physica A, 2000, 287(3):482-492.
- [2] Duarte F B, Machado J T. Chaotic phenomena and fractional-order dynamics in the trajectory control of redundant manipulators[J]. Nonlinear Dynam, 2002, 29(1-4):315-342.
- [3] Bozkurt. F, Yousef A. Flip bifurcation and stability analysis of a fractional-order population dynamics with Allee effect[J]. Journal of Interdisciplinary Mathematics, 2019, 22(6):1035-1050.
- [4] 蒲武军, 杜争光. 一类分数阶广义捕食者-食饵模型的动力学分析[J]. 西北师范大学学报: 自然科学版, 2018, 5:10-15.
- [5] 刘娜, 方洁, 邓玮, 等. 一类分数阶复值 SIR 传染病模型
- [6] 赵新俊, 郑义. 分数阶 SIR 传染病模型的稳定性分析[J]. 生物数学学报, 2018, 1:11-16.
- [7] 杜争光. 具有 Holling IV 型功能反应的分数阶捕食者-食饵模型的动力学分析[J]. 井冈山大学学报: 自然科学版, 2019, 40(3):9-13.
- [8] Jin Z, Haque M. Global stability analysis of an eco-epidemiological model of the salton sea[J]. J. Biological Systems, 2006, 14(3):373-385.
- [9] Podlubny I. Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of their Solution and Some of their Applications[M]. Academic press, 1998.
- [10] Matignon D. Stability result on fractional differential equations with applications to control processing[C]. IMACS-SMC proceedings, Lille, France, 1996:963-968.
- [11] Petras I. Fractional-order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation[M]. London, Beijing Springer: HEP, 2011.
- [12] Li Y, Chen Y, Podlubny I. Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized Mittag-Leffler stability[J]. Comput. Math. Appl, 2010, 59:1810-1821.
- [13] Muhammed Çiçek, Yakar CoGkun, Olur Bülent. Stability, Boundedness, and Lagrange Stability of Fractional Differential Equations with Initial Time Difference[J]. The Scientific World Journal, 2014, Article ID 939027:1-7.