文章编号：1674-8085(2019)03-0014-05

亚纯函数系数微分方程解的复振荡性质

王腾毅

（贵州财经大学数学与统计学院，贵州，贵阳 550025）

摘　要：综合运用 Nevanlinna 值分布的理论，Wiman-Valiron 的理论及其它复分析中的常用方法研究了复域上高阶微分方程解带有小函数时复振荡的性质，该文的结果将二阶情形推广到高阶情形。

关键词：亚纯函数；微分方程；小函数

中图分类号：O174.52　　**文献标识码**：A　　DOI:10.3969/j.issn.1674-8085.2019.03.003

THE COMPLEX OSCILLATION PROPERTIES OF THE SOLUTIONSOF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH MEROMORPHIC COEFFICIENT

WANG Teng-yi

(School of mathematics and statistics, Guizhou University of Finance and Economics, Guiyang, Guizhou 550025, China)

Abstract: In this paper, we mainly use the Nevanlinna value distribution theory, complex oscillation properties of Wiman-Valiron theory and other complex analysis method to study the characteristics of higher order ordinary differential equation with a small function in complex domain.The results of this paper extend the second-order case to the higher-order case.

Key words: meromorphic function　differential equation　small function

1　引言与主要结果

1.1　Nevanlinna 值分布理论，Wiman-Valiron 的理论简介

Nevanlinna 的理论是研究函数的全局性质的。所谓局部性质，就比如说 f 在一点 z_0 处解析，则在 z_0 处可以展开成 Taylor 级数。而所谓整体性质，就像是关于整函数的 Picard 定理。

Wiman-Valiron 的理论是研究考虑整函数系数微分方程的整函数解性质的一个十分重要的工具。

Nevanlinna 第一基本定理（Jensen 公式的另一种表达）：假设 f 是复平面上的亚纯函数，并且 $f(0)$ 不为 $0,\infty$，那么 $T(r,f)=T(r,\frac{1}{f})+\log|f(0)|$。

Nevanlinna 第二基本定理：假设 f 是复平面上的亚纯函数，并且 $f(0)$ 不为 $0,1,\infty$，$f'(0)\neq 0$，那么

$$T(r,f)\le N(r,f)+N(r,\frac{1}{f})+N(r,\frac{1}{f-1})-N_1(r)+S(r,f)$$

式中，$N_1(r)=2N(r,f)-N(r,f')+N(r,\frac{1}{f'})$，

$$S(r,f)=m(r,\frac{f'}{f})+m(r,\frac{f'}{f-1})+\log\left|\frac{f(0)(f(0)-1)}{f'(0)}\right|+\log 2$$

这里 $N_1(r)$ 是非负的，$S(r,f)$ 对某个序列 $r_n\to\infty$ 是 $O\{\log(rT(r,f))\}$。

Picard 定理：f 是复平面上的解析函数，并且始终不取值 0，1，那么 f 一定是一个常数。

1.2　亚纯函数系数微分方程解的复振荡性质领域的研究现状

收稿日期：2019-01-18；修改日期：2019-04-03
作者简介：王腾毅(1987-)，男，安徽安庆人，助教，硕士，主要从事基础数学研究(E-mail:wangtengyi7009@163.com).

目前主要研究的是二阶复域微分方程，对于高阶的情况，讨论较少。

2006 年陈玉研究了二阶复域微分方程亚纯解的不动点与超级，得到了如下结论：

定理 A[1] 假设 $A(z)$、$B(z)$ 是亚纯函数，满足 $\max\{\sigma(A),\lambda(\frac{1}{B})<\mu(B)\le\sigma(B)<+\infty$，如果微分方程 $f''+A(z)f'+B(z)f=0$ 的所有解 f 均为亚纯函数，且 $\lambda(\frac{1}{f})<+\infty$，若 $A(z)+B(z)\ne 0$，那么至多可能有一个例外解，其它所有解都有无穷多个不动点，且满足：

$$\tau(f)=\sigma(f)=+\infty,\tau_2(f)=\sigma_2(f)=\sigma(B)$$

定理 B[1] 假设 $A(z)$、$B(z)$ 和 $F\ne 0$ 是有限级亚纯函数，满足

$$\max\{\sigma(A),\lambda(\frac{1}{B})<\mu(B)\le\sigma(B)<+\infty,$$

且 $F\ne A(z)+B(z)z$。如果微分方程 $f''+A(Z)f'+B(Z)f=F$ 的所有解 f 均为亚纯函数，且 $\lambda(\frac{1}{f})<+\infty$，那么至多可能有一个例外解，其它所有解都有无穷多个不动点，且满足：

$$\tau(f)=\overline{\lambda}(f)=\sigma(f)=+\infty,\tau_2(f)=$$
$$\overline{\lambda}_2(f)=\lambda_2(f)=\sigma_2(f)=\sigma(B)$$

定理 C[2] 假设 $A(z)$、$B(z)$ 和 $F\ne 0$ 是有限级亚纯函数，$A(z)$、$B(z)$ 为超越的且满足 $\sigma(A)<\sigma(B)<+\infty$ 和 $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\frac{\log m(r,B)}{\log r}=\sigma(B)$。如果微分方程 $f''+A(z)f'+B(z)f=F$ 的所有解 f 均为亚纯函数，那么至多可能有一个例外解，其它所有解都有无穷级且满足：

$$\overline{\lambda}(f)=\lambda(f)=\sigma(f)=\infty$$

本文研究了一类高阶微分方程的亚纯解与其小函数的关系得到了如下结论。

定理 假设 A、B 是有限级的超越亚纯函数，满足

$$\max\{\sigma(A),\lambda(\frac{1}{B}\})<\mu(B)\le\sigma(B)=\sigma<+\infty$$

和

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log m(r,B)}{\log r}=\sigma(B)$$

且 $F=-(\varphi^{(k)}+A\varphi'+B\varphi)\ne 0$（$\varphi$ 是 f 的小函数）是有限级亚纯函数.那么方程

$$f^{(k)}+A(z)f'+B(z)f=0 \tag{1}$$

至多有一个例外解，其他所有非零解都有无穷多个不动点，且满足

$$\overline{\lambda}(f-\varphi)=\lambda(f-\varphi)=\sigma(f)=\infty,$$
$$\overline{\lambda}_2(f-\varphi)=\lambda_2(f-\varphi)=\sigma_2(f)=\sigma(B)$$

推论 当上述定理中的 $\varphi=z$（即为不动点）且满足定理中的所有条件时，定理的结论仍然成立，即有

$$\begin{aligned}&\overline{\lambda}(f-z)=\lambda(f-z)=\sigma(f)=\infty,\\&\overline{\lambda}_2(f-z)=\lambda_2(f-z)=\sigma_2(f)=\sigma(B)\end{aligned} \tag{2}$$

2 定理证明所需引理

引理 1[3] 假设 A、B 有限级的超越亚纯函数，满足

$$\sigma(A)<\sigma(B)=\sigma<+\infty$$

和

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log m(r,B)}{\log r}=\sigma(B)$$

则方程(1)式的所有亚纯解 f 满足 $\sigma(f)=\infty$。

证明 假设 $\sigma(f)<\infty$，由方程（1）变形可得

$$-B=\frac{f^{(k)}}{f}+A\frac{f'}{f}$$

则有

$$m(r,B)\le m(r,\frac{f^{(k)}}{f})+m(r,\frac{f'}{f})+m(r,A)+\log 2 \tag{3}$$

由对数导数引理和 f 为有限级得

$$m(r,\frac{f^{(k)}}{f})=O(\log r),m(r,\frac{f'}{f})=O(\log r)$$

又由已知条件 $\sigma(A)<\sigma(B)$，存在子列 $\{r_n\}$，当 $n\to\infty$ 时使得

$$m(r_n,A)\le T(r_n,A)<T(r_n,B)=O\{m(r_n,B)\}$$

所以对固定的 r_n，存在相应的 $\theta_n(0<\theta_n<1)$，使 $m(r_n,A)=\theta_n m(r_n,B)$ 从而有

$$(1-\theta_n)m(r_n,B)=O(\log r)(0<\theta_n<1)$$

即

$$m(r_n,B)=O(\log r)$$

这与 B 是超越的矛盾，所以 $\sigma(f)=\infty$。

引理 2[3] 假设 A、B 有限级的超越亚纯函数，$F\neq 0$ 是有限级亚纯函数，满足

$$\max\{\sigma(A),\lambda(\frac{1}{B}\})<\mu(B)\leq\sigma(B)=\sigma<+\infty$$

和

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log m(r,B)}{\log r}=\sigma(B)$$

那么方程(2)式至多有一个例外解，其他所有解 f 都有无穷级，且满足

$$\overline{\lambda}(f)=\lambda(f)=\sigma(f)=\infty$$

引理 3[4] 设 f 为亚纯函数，$\alpha>1$ 和 $\varepsilon>0$ 为给定的实常数，则存在集合 $E_1\subset(0,\infty)$ 有有穷测度和 $B>0$ 是仅依赖于 α 的常数，对所有 z 满足 $|z|=r\notin E_1$ 有

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right|\leq B(T(\alpha r,f)r^{\varepsilon}\log T(\alpha r,f)^{j}(j=1,2) \quad (4)$$

引理 4[5] 设 $w(z)$ 为亚纯函数，$\lambda(\frac{1}{w})<\sigma(w)<+\infty$，则对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在集合 $H_1\subset(0,\infty)$，$\overline{dens}H_1=1$，对所有 $|z|=r\notin H_1$ 有 $M(r,w)\geq\exp\{r^{\sigma(w)-\varepsilon}\}$。

引理 5[6] 假设 $g(z)$ 为亚纯函数，$\sigma(B)=\beta<+\infty$。那么对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在一个线性测度和对数测度都为有限的集合 $E_2\subset(1,+\infty)$，使得当 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_2$ 且 $r\to+\infty$ 时有

$$|g(z)|\leq\exp\{r^{\beta+\varepsilon}\}$$

引理 6[6] 设 $w(z)$ 为亚纯函数，$\lambda(\frac{1}{w})<\mu(w)\leq\sigma(w)=\sigma<\frac{1}{2}$。那么对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在子集 $E_3\subset(1,+\infty)$，具有上对数密度 $\overline{\log dens}E_3>0$，满足 $|z|=r\in E_3$ 的所有 z 有

$$|w(z)|\geq\exp\{1+o(1))r^{\sigma-\varepsilon}\}$$

引理 7[5] 设 f 为亚纯函数，$\lambda(\frac{1}{f})<\sigma(f)=\infty$，则存在一个集合 $H_2\subset(0,\infty)$，$\overline{dens}H_2=1$，对于 $r\in H_2$ 存在点 z_r 满足 $|z_r|=r$ 和 $\left|\frac{f(z_r)}{f'(z_r)}\right|\leq r$。

引理 8[6] 假设 $f(z)=\frac{g(z)}{d(z)}$ 为亚纯函数，其中 $g(z),d(z)$ 为整函数，满足

$$\mu(g)=\mu(f)=\mu\leq\sigma(g)=\sigma(f)\leq+\infty,$$

$$\lambda(d)=\sigma(d)=\lambda(\frac{1}{f})=\beta<\mu,$$

假设 z 为 $|z|=r$ 上的一点，满足 $|g(z)|=M(r,g),v_g(r)$ 表示整函数 $g(z)$ 的中心指标，那么存在一个对数为有穷的集合 $E_4\subset(1,\infty)$，当 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_4$ 时有

$$\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)}=(\frac{v_g(r)}{z})^n+(1+o(1))(n\geq 1)$$

引理 9[7] 设 $g(z)$ 为无穷级整函数且 $\sigma_2(g)=\sigma$，设 $v_g(r)$ 为 $g(z)$ 的中心指标，则

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\lg v_g(r)}{\log r}=\sigma$$

引理 10[7] 设 F 为有限级亚纯函数，f 为无穷和级亚纯函数，且满足 $\lambda(\frac{1}{f})<\sigma(f)$，对任意实数 $\alpha>0$，存在集合 $E_5\subset(1,+\infty)$ 有无穷线测度和对数测度，当 $|z|=r\in E_5,r\to+\infty$ 时有 $\left|\frac{F(z)}{f(z)}\right|\leq\exp\{r^{\alpha}\}$.

3 定理的证明

证明 (i) 假设 f_1 是方程(1)式的有限级亚纯解，若(1)式还有另一个有限级亚纯解 f_2，那么 f_1-f_2 也是方程(1)式的亚纯解，且 $\sigma(f_1-f_2)<\infty$ 这与引理 1 矛盾。所以方程(1)式最多出现一个有限级亚纯解 f_1。

现在设 $f(z)$ 是微分方程（1）式的超越亚纯解，令 $g=f-\varphi$，则

$$f=g+\varphi,\quad f'=g'+\varphi,\quad f^{(k)}=g^{(k)}+\varphi^{(k)} \quad (5)$$

把(5)式代入(1)式并整理后得到

$$g^{(k)}+Ag^{'}+Bg=-[\varphi^{(k)}+A\varphi^{'}+B\varphi] \tag{6}$$

又因 $F=-[\varphi^{(k)}+A\varphi^{'}+B\varphi]$，则有

$$g^{(k)}+Ag^{'}+Bg=F \tag{7}$$

所以由引理 2 可得 $\overline{\lambda}(g)=\lambda(g)=\sigma(g)=\infty$, 也即有 $\overline{\lambda}(f-\varphi)=\lambda(f-\varphi)=\sigma(f)=\infty$。

(ii) 设 x,y 是实数，满足 $\max\{\sigma(A),\lambda(\frac{1}{B})\}<x<y<\sigma(B)$。由方程(7)式可得

$$|B(z)|\le\left|\frac{g^{(k)}}{g}\right|+|A(z)|\left|\frac{g^{'}}{g}\right|+\left|\frac{F}{g}\right| \tag{8}$$

由引理 3，存在有限测度集合 $H_1\subset(0,+\infty)$，对所有 z 满足 $|z|=r\notin H_1$ 有

$$\left|\frac{g^{(j)}}{g}\right|\le r[T(2r,g)]^{k+1}(j=1,2) \tag{9}$$

由引理 5，存在有限测度集合 $H_2\subset(1,+\infty)$，对所有 z 满足 $|z|=r\notin[0,1]\cup H_2$ 有

$$|A(z)|\le\exp\{r^x\} \tag{10}$$

又由引理 4 可知，存在集合 $H_3\subset(0,+\infty)$，$\overline{dens}H_3=1$，对所有 z 满足 $|z|=r\in H_3$ 有

$$M(r,B)\ge\exp\{r^y\} \tag{11}$$

如果方程(7)式的解 g_0 有 $(k\ge1)$ 阶极点而 $A(z),B(z),F$ 都在 g_0 点解析，则 $g^{(k)}+A(z)g^{'}+B(z)g$ 在 g_0 有 $k+2$ 阶极点，但是 F 在 g_0 点解析，矛盾。故 g 的极点只能在 $A(z),B(z),F$ 的极点处。因此 $\lambda(\frac{1}{g})<+\infty$，由引理 5 存在集合 $H_4\subset(1,+\infty)$ 有无穷测度和对数测度，使得当 $|z|=r\in H_4$ 且 $r\to+\infty$ 时

$$\left|\frac{F}{g}\right|\le\exp\{r^x\} \tag{12}$$

由式(8)-(12)可知，当 $|z|=r\in H_3\cup H_4-\{[0,1]\cup H_1\cup H_2\}$ 且 $r\to+\infty$ 时

$$\begin{aligned}&\exp\{r^y\}\le 3r\exp\{r^x\}[T(2r,g)]^{k+1}\\&\exp\{(1-o(1))r^y\}\le[T(2r,g)]^{k+1}\end{aligned} \tag{13}$$

所以由(13)式得 $\sigma_2(g)\ge y$，又由 y 的任意性知 $\sigma_2(g)\ge\sigma(B)$，同样由(13)式可得 $\mu(g)=+\infty$。

由 Hadamard 定理将 g 表示成 $g=\frac{h}{d}$，且满足

$$\mu(h)=\mu(g)\le\sigma(h)=\sigma(g)=+\infty$$

$$\sigma(d)=\lambda(d)=\lambda(\frac{1}{g})<\mu(h)=\mu(g)$$

由引理 8，取点 z 满足 $|z|=r$ 及 $|h(z)|=M(r,h)$，存在一个有穷的对数测度为集合 $H_5\subset(1,+\infty)$，$|z|=r\notin[0,1]\cup H_5$ 时有

$$\frac{g^{(n)}(z)}{g(z)}=(\frac{v_h(r)}{z})^n(1+o(1))(n\ge1) \tag{14}$$

把方程(7)式改写为

$$-\frac{g^{(k)}}{g}=\frac{Ag^{'}}{g}+B-\frac{F}{g} \tag{15}$$

把(14)式代入(15)式有

$$-(\frac{v_h(r)}{z})^k(1+o(1))=A(\frac{v_h(r)}{z})(1+o(1))+B-\frac{F}{g} \tag{16}$$

由引理 5 可知，对任意的 $\varepsilon>0$，存在一个有穷的对数测度为集合 $H_6\subset(1,+\infty)$，$|z|=r\notin[0,1]\cup H_6$ 时有

$$|B(z)|\le\exp\{r^{\sigma(B)+\varepsilon}\} \tag{17}$$

$$|A(z)|\le\exp\{r^{\sigma(B)}\} \tag{18}$$

由引理 10 可知，存在一个有穷的对数测度为集合 $H_7\subset(1,+\infty)$，$|z|=r\in H_7, r\to+\infty$ 时有

$$\left|\frac{F}{g}\right|\le\exp\{r^{\sigma(B)}\} \tag{19}$$

由式(16)-(19)可知，当 $|z|=r\in H_7-[(0,1)\cup H_6]$, $r\to+\infty$ 时有

$$(\frac{v_h(r)}{|z|})^k|1+o(1)|\le3(\frac{v_h(r)}{|z|})|1+o(1)|\exp\{r^{\sigma(B)+\varepsilon}\} \tag{20}$$

由(20)式得 $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\log\log\frac{v_h(r)}{\log r}\le\sigma(B)+\varepsilon$，再由 ε 的任意性及引理 8 得

$$\sigma_2(h)\le\sigma(B),\sigma_2(g)=\sigma_2(h)\le\sigma(B)$$

所以 $\sigma_2(g)=\sigma(B)$，即 $\sigma_2(f)=\sigma(B)$。

又因为已知条件 $F\ne0$，则方程(7)式又可变形为

$$\frac{1}{g}=\frac{1}{F}(\frac{g^{(k)}}{g}+A\frac{g^{'}}{g}+B) \tag{21}$$

如果 g 在 z^* 有 $l(l>k)$ 阶零点，而 A,B 在 z^* 点解

析，那么 F 在 z^* 点有 $(l-k)$ 阶零点，所以

$$n(r,g)\le k\overline{n}(r,\frac{1}{g})+n(r,\frac{1}{F})+n(r,A)+n(r,B)$$

$$N(r,\frac{1}{g})\le k\overline{N}(r,\frac{1}{g})+N(r,\frac{1}{F})+N(r,A)+N(r,B) \tag{22}$$

由(22)式及对数导数引理知，最多除去一个线测度为有穷的子集 r 值集 E 外有

$$m(r,\frac{1}{g})\le m(r,\frac{1}{F})+m(r,A)+m(r,B)+$$
$$m(r,\frac{g^{(k)}}{g})+m(r,\frac{g'}{g})+\log 3=$$
$$m(r,\frac{1}{F})+m(r,A)+m(r,B)+O(\log(rT(r,g)))(r\notin E) \tag{23}$$

由式(22)及(23)可知

$$\begin{aligned}&T(r,g)=T(r,\frac{1}{g})+o(1)=\\&m(r,\frac{1}{g})+N(r,\frac{1}{g})+o(1)\le\\&k\overline{N}(r,\frac{1}{g})+T(r,\frac{1}{F})+T(r,A)+\\&T(r,B)+O(\log(rT(r,g)))(r\notin E)\end{aligned} \tag{24}$$

由于 $\log T(r,g)\le\frac{1}{2}T(r,g)$, $A(z),B(z),F$ 为有限级函数，由 (24) 式得 $\overline{\lambda}_2(g)\ge\sigma_2(g)$ 。所以 $\overline{\lambda}_2(g)=\lambda_2(g)=\sigma_2(g)$，也即有

$$\overline{\lambda}_2(f-\varphi)=\lambda_2(f-\varphi)=\sigma_2(f)=\sigma(B)$$

综上所述

$$\overline{\lambda}(f-\varphi)=\lambda(f-\varphi)=\sigma(f)=\infty,$$
$$\overline{\lambda}_2(f-\varphi)=\lambda_2(f-\varphi)=\sigma_2(f)=\sigma(B)$$

4 总结

本文主要综合地运用了Nevanlinna值分布的理论，Wiman-Valiron 的理论和其它复分析方法研究复数域高阶微分方程的解带有小函数时复振荡的性质，将二阶的情形推广到高阶情形中一种特殊情况，带有小函数应用的情况，得出了高阶情形下定理，并证明结论也成立。

参考文献：

[1] 陈玉,陈宗煊. 二阶复数域微分方程亚纯函数解的不动点与超级[J].大学数学,2006,22(6):78-81.

[2] 易才凤,边年英. 二阶微分方程亚纯函数解的零点收敛指数和增长级[J].江西师范大学学报:自然科学版，1998,22(1):16-20.

[3] 甘会林,易才凤. 高阶微分方程亚纯函数解的零点收敛指数和增长级[J].江西师范大学学报:自然科学版,2003,27(1):39-41.

[4] Gundersen G. Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function ,plus similar estimates [J].J London Math Soc,1988,37(2):83-104.

[5] Chen Z X. The growth of solutions of second order linear differential equations with meromorphic coefficients [J].Kodai Math J,1999,22(1):208-221.

[6] 陈鸿辉,蔡金华,袁文俊. 涉及零点与多项式的无零点亚纯函数族的正规性[J].西南师范大学学报:自然科学版;2018,43(8):10-17.

[7] 刘志学,曹廷彬. 多复空间中亚纯函数在分担小函数情形下的唯一性结果[J].南昌大学学报:理科版;2016,40(1):1-7.