

文章编号: 1674-8085(2017)04-0008-05

直觉 I-Fuzzy 拓扑空间中分离性的研究

张春芝

(新疆师范高等专科学校数学学院, 新疆, 乌鲁木齐 830043)

摘 要: 首先给出直觉 I-Fuzzy 拓扑空间是 $\alpha - T_i$, $\alpha^* - T_i$ ($i = 0, 1, 2$) 分离的概念, 接着定义直觉 I-Fuzzy 拓扑空间是 T_i 分离的, 最后讨论了两种分离性的关系。

关键词: 直觉模糊集; 直觉 I-fuzzy 拓扑空间; 分离性

中图分类号: O189.13

文献标识码: A

DOI:10.3969/j.issn.1674-8085.2017.04.002

RESEARCH OF SEPARATION IN INTUITION I-FUZZY TOPOLOGICAL SPACE

ZHANG Chun-zhi

(Faculty of Mathematics, Xinjiang Teacher's College, Urumqi, Xinjiang 830043, China)

Abstract: The concept of $\alpha - T_i$, $\alpha^* - T_i$ ($i = 0, 1, 2$) separation axioms are given in intuitionistic I-fuzzy topological space. Furthermore, we define T_i separation of the intuitionistic I-fuzzy topological space. Finally, we prove their relationship.

Key words: intuitionistic fuzzy set; intuition I-fuzzy topological space; separation

1986 年, Atanassov^[1]提出了直觉模糊集的概念, 它是模糊集的推广。1997 年, Coke^[2]利用直觉模糊集引入了直觉模糊拓扑空间的定义, 作为直觉模糊拓扑空间的自然生成, 文献[3]给出了直觉模糊双拓扑空间的定义。文献[4-5]给出了 Sostak 意义下的直觉开的提升(IGO)的定义及由 IGO 定义的直觉模糊拓扑空间的概念。1996 年, Coker^[6]研究了 Sostak 意义下直觉模糊拓扑空间的定义, 即文献[7]中的直觉 I-fuzzy 拓扑空间。直觉 I-fuzzy 拓扑空间的研究对象是直觉模糊集, 而由 IGO 定义的直觉模糊拓扑空间的研究对象是模糊集, 所以直觉 I-fuzzy 拓扑空间是 IGO 定义的直觉模糊拓扑空间的推广。

本文研究了直觉 I-fuzzy 拓扑空间中的 T_i , $\alpha - T_i$, $\alpha^* - T_i$ ($i = 0, 1, 2$) 分离公理, 它是由 IGO 定义的直觉模糊拓扑空间中分离公理^[8]的推广, 主

要内容如下: 首先给出直觉 I-Fuzzy 拓扑空间是 $\alpha - T_i$, $\alpha^* - T_i$ ($i = 0, 1, 2$) 分离的概念, 接着定义直觉 I-Fuzzy 拓扑空间是 T_i 分离的, 最后讨论了两种分离性的关系。

1 预备知识

文中 X 表示一个非空集合, $I = [0, 1]$, $I_0 = (0, 1]$, $I_1 = [0, 1)$ 。 ζ^X 表示所有的直觉模糊集构成的集合, $0_~$ 与 $1_~$ 分别表示最小的与最大的直觉模糊集。

定义 1.1^[9] 设 X 是一个非空集合, $I = (0, 1)$, $I_0 = (0, 1]$, $I_1 = [0, 1)$ 。 $A = \langle \mu_A, \gamma_A \rangle$ 为 X 上的一个直觉模糊集, 如果映射 $\mu_A: X \rightarrow I$, $\gamma_A: X \rightarrow I$ 满足条

件 $\mu_A(x) + \gamma_A(x) \leq 1$, $\forall x \in X$ 成立。 $\mu_A(x)$ 和 $\gamma_A(x)$ 分别表示 x 对于 A 的隶属度和非隶属度, 其最小, 最大元分别记为 $0_- = \langle 0, 1 \rangle$, $1_- = \langle 1, 0 \rangle$ 。

定义 1.2^[10] 设 X 是一个非空集合, $x_{(\alpha, \beta)}$ 称为一个直觉模糊点, 若 $\forall y \in X$, 满足:

$$x_{(\alpha, \beta)}(y) = \begin{cases} (\alpha, \beta), & x = y, \\ (0, 1), & x \neq y \end{cases}$$

$\alpha \in (0, 1]$ $\beta \in [0, 1]$ 且 $\alpha + \beta \leq 1$ 。直觉模糊点 $x_{(\alpha, \beta)}$ 的全体记 $pt(\zeta^X)$ 。

定义 1.3^[11] 设 $x_{(\alpha, \beta)} \in pt(\zeta^X)$ 且 $A, B \in \zeta^X$, 若 $\mu_A(x) + \alpha > 1$ 且 $\gamma_A(x) + \beta < 1$, 则称 $x_{(\alpha, \beta)}$ 重于 A , 记为 $x_{(\alpha, \beta)} \hat{q} A$ 。称 A, B 重于 x , 若 $\mu_A(x) + \mu_B(x) > 1$ 且 $\gamma_A(x) + \gamma_B(x) < 1$, 记为 $A \hat{q} B$ 于 x 。称 A 重于 B , 若 $\exists x \in X$, 使得 $A \hat{q} B$ 于 x 。“不重于”表示为 $\neg \hat{q}$ 。

命题 1.1^[12] $\forall A, B \in \zeta^X$, $A \hat{q} B \Leftrightarrow A \subseteq B^c \Leftrightarrow A \cap B = 0_-$ 。

定义 1.4^[13] (X, T, T^*) 叫直觉模糊双拓扑空间, 如果 T, T^* 是由直觉模糊集构成的直觉模糊拓扑。

定义 1.5^[7] 设 X 是一个非空集合, τ, τ^* 是映射, 即 $\tau, \tau^*: \zeta^X \rightarrow I$, 并且满足下列条件:

- (1) $\tau(A) + \tau^*(A) \leq 1$, $\forall A \in \zeta^X$
- (2) $\tau(0_-) = \tau(1_-) = 1$, $\tau^*(0_-) = \tau^*(1_-) = 0$
- (3) $\tau(A_1 \wedge A_2) \geq \tau(A_1) \wedge \tau(A_2)$,

$$\tau^*(A_1 \wedge A_2) \leq \tau^*(A_1) \vee \tau^*(A_2), \quad A_1, A_2 \in \zeta^X$$

$$(4) \quad \tau(\bigvee_{i \in \Delta} A_i) \geq \bigwedge_{i \in \Delta} \tau(A_i),$$

$$\tau^*(\bigvee_{i \in \Delta} A_i) \leq \bigvee_{i \in \Delta} \tau^*(A_i), \quad i \in \Delta, \quad A_i \in \zeta^X$$

则 (X, τ, τ^*) 被称为直觉 I-fuzzy 拓扑空间, (τ, τ^*) 为直觉 I-fuzzy 拓扑。

命题 1.2^[13] 设 (X, τ, τ^*) 是直觉 I-fuzzy 拓扑空间, 那么 $\tau_r = \tau^{-1}[r, 1]$ 且 $\tau_r^* = (\tau^*)^{-1}[0, 1-r]$, $r \in I_0$ 。

定义 1.6^[7] 设 (X, τ) 为直觉 I-Fuzzy 拓扑空间, $\forall x_{(\alpha, \beta)} \in pt(\zeta^X)$, $x_{(\alpha, \beta)}$ 的直觉 I-Fuzzy 重域系为 $Q_{x_{(\alpha, \beta)}}$, $Q_{x_{(\alpha, \beta)}}: \zeta^X \rightarrow L^*$ 定义如下:

$$\forall U \in \zeta^X, Q_{x_{(\alpha, \beta)}}(U) = \bigvee_{x_{(\alpha, \beta)} \hat{q} V \subseteq U} \tau(V)。$$

2 α - T_i , α^* - T_i ($i=0, 1, 2$) 分离性的概念

定义 2.1 设 (X, τ, τ^*) 为直觉 I-Fuzzy 拓扑空间

(1) 如果存在 $A \in \zeta^X$, 使得 $\tau(A) \geq \alpha$ 或 $\tau^*(A) \leq 1 - \alpha$ ($\tau(A) > \alpha$ 或 $\tau^*(A) < 1 - \alpha$) 且 $\forall x, y \in X, x \neq y$, $A(x) = (1, 0)$ $A(y) = (0, 1)$ 或 $A(x) = (0, 1)$ $A(y) = (1, 0)$, 则称 (X, τ, τ^*) 为 α - T_0 , $\alpha \in I_0$ ($\alpha^* - T_0, \alpha \in I_1$) 分离的。

(2) 如果存在 $A, B \in \zeta^X$, 使得 $\tau(A) \geq \alpha$ 且 $\tau^*(B) \leq 1 - \alpha$ ($\tau(A) > \alpha$, $\tau^*(B) < 1 - \alpha$) 且 $\forall x, y \in X, x \neq y$, $A(x) = (1, 0)$ $A(y) = (0, 1)$ 及 $B(x) = (0, 1)$ $B(y) = (1, 0)$, 则称 (X, τ, τ^*) 为 α - T_1 , $\alpha \in I_0$ ($\alpha^* - T_1, \alpha \in I_1$) 分离的。

(3) 如果对 $\forall x_{(\lambda, \beta)}, y_{(\gamma, \delta)} \in pt(\zeta^X), x \neq y$, 存在 $A, B \in \zeta^X$ 使得 $\tau(A) \geq \alpha$ 且 $\tau^*(B) \leq 1 - \alpha$ ($\tau(A) > \alpha$ 且 $\tau^*(B) < 1 - \alpha$), $x_{(\lambda, \beta)} \in A$, $y_{(\gamma, \delta)} \in B$, $A \cap B = 0_-$, 则称 (X, τ, τ^*) 为 α - T_2 , $\alpha \in I_0$ ($\alpha^* - T_2, \alpha \in I_1$) 分离的。

定义 2.2 设 (X, τ, τ^*) 为直觉 I-Fuzzy 拓扑空间, $\forall x_{(\lambda, \beta)}, y_{(\gamma, \delta)} \in pt(\zeta^X), x \neq y$ 那么 $x_{(\lambda, \beta)}, y_{(\gamma, \delta)}$ 是 T_i 及 (X, τ, τ^*) 是 T_i ($i=0, 1, 2$) 分离的定义如下:

$$(1) \quad T_0(x_{(\lambda, \beta)}, y_{(\gamma, \delta)}) = (\bigvee_{y_{(\gamma, \delta)} \neg \hat{q} A} Q_{x_{(\lambda, \beta)}}(A)) \vee$$

$$(\bigvee_{x_{(\lambda, \beta)} \neg \hat{q} B} (1 - Q_{y_{(\gamma, \delta)}}^*(B))) \vee (\bigvee_{x_{(\lambda, \beta)} \neg \hat{q} B} Q_{y_{(\gamma, \delta)}}(B)) \vee$$

$$(\bigvee_{y_{(\gamma, \delta)} \neg \hat{q} A} (1 - Q_{x_{(\lambda, \beta)}}^*(A))),$$

$$T_0(X, \tau, \tau^*) = \bigwedge \{T_0(x_{(\lambda, \beta)}, y_{(\gamma, \delta)}) : x_{(\lambda, \beta)}, y_{(\gamma, \delta)} \in pt(\zeta^X), x \neq y\}$$

$$(2) \quad T_1(x_{(\lambda, \beta)}, y_{(\gamma, \delta)}) = (\bigvee_{y_{(\gamma, \delta)} \neg \hat{q} A} Q_{x_{(\lambda, \beta)}}(A)) \wedge$$

$$(\bigvee_{x_{(\lambda, \beta)} \neg \hat{q} B} (1 - Q_{y_{(\gamma, \delta)}}^*(B))) \wedge (\bigvee_{x_{(\lambda, \beta)} \neg \hat{q} B} Q_{y_{(\gamma, \delta)}}(B)) \wedge$$

$$(\bigvee_{y_{(\gamma, \delta)} \neg \hat{q} A} (1 - Q_{x_{(\lambda, \beta)}}^*(A))),$$

$$T_1(X, \tau, \tau^*) = \bigwedge \{T_1(x_{(\lambda, \beta)}, y_{(\gamma, \delta)}) : x_{(\lambda, \beta)}, y_{(\gamma, \delta)} \in pt(\zeta^X), x \neq y\}$$

$$\begin{aligned}
& x_{(\lambda, \beta)}, y_{(\gamma, \delta)} \in pt(\zeta^X), x \neq y \\
(3) \quad & T_2(x_{(\lambda, \beta)}, y_{(\gamma, \delta)}) = \\
& [\bigvee_{A \cap B = 0_{\sim}} \{ Q_{x_{(\lambda, \beta)}}(A) \wedge (1 - Q_{y_{(\gamma, \delta)}}(B)) \} \wedge \\
& \bigvee_{A \cap B = 0_{\sim}} \{ Q_{y_{(\gamma, \delta)}}(B) \wedge (1 - Q_{x_{(\lambda, \beta)}}(A)) \}] , \\
& T_2(X, \tau, \tau^*) = \wedge \{ T_2(x_{(\lambda, \beta)}, y_{(\gamma, \delta)}) : \\
& x_{(\lambda, \beta)}, y_{(\gamma, \delta)} \in pt(\zeta^X), x \neq y \} .
\end{aligned}$$

定义 2.3 设 (X, τ_1, τ_2) 是直觉模糊双拓扑空间:

(1) 如果对 $\forall x, y \in X, x \neq y$, 存在 $A \in \tau_1 \cup \tau_2$, 使得 $A(x) = (1, 0)$, $A(y) = (0, 1)$ 或 $A(x) = (0, 1)$, $A(y) = (1, 0)$, 则称 (X, τ_1, τ_2) 是 T_0 分离的。

(2) 如果对 $\forall x, y \in X, x \neq y$, 存在 $A \in \tau_1, B \in \tau_2$, 使得 $A(x) = (1, 0)$, $A(y) = (0, 1)$ 且 $B(x) = (0, 1)$, $B(y) = (1, 0)$, 则称 (X, τ_1, τ_2) 是 T_1 分离的。

(3) 如果对 $\forall x_{(\lambda, \beta)}, y_{(\gamma, \delta)} \in pt(\zeta^X), x \neq y$, 存在 $A \in \tau_1, B \in \tau_2$, 使得 $x_{(\lambda, \beta)} \in A, y_{(\gamma, \delta)} \in B, A \cap B = 0_{\sim}$, 则称 (X, τ_1, τ_2) 是 T_2 分离的。

3 分离公理间的关系

命题 3.1 直觉 I-Fuzzy 拓扑空间 (X, τ, τ^*) 是 $\alpha - T_i$ 分离的 $\Leftrightarrow$ 直觉模糊双拓扑空间 $(X, \tau_\alpha, \tau_\alpha^*)$ 是 T_i 分离的, $i = 0, 1, 2$ 。

证明 若 (X, τ, τ^*) 是 $\alpha - T_0$ 的, 则由定义 2.1 (1) 知, 存在 $A \in \zeta^X$, 使得 $\tau(A) \geq \alpha$ 或 $\tau^*(A) \leq 1 - \alpha$ 且对 $\forall x, y \in X, x \neq y, A(x) = (1, 0), A(y) = (0, 1)$ 或 $A(x) = (0, 1), A(y) = (1, 0)$ 。

由于 $\tau_\alpha = \tau^{-1}[\alpha, 1], \tau_\alpha^* = (\tau^*)^{-1}[0, 1 - \alpha]$ 即 $\tau_\alpha = \{U \in \zeta^X : \tau(U) \geq \alpha\}, \tau_\alpha^* = \{U \in \zeta^X : \tau^*(U) \leq 1 - \alpha\}$, 则 $A \in \tau_\alpha$ 或 $A \in \tau_\alpha^*$ 。故存在 $A \in \zeta^X$, 使 $A \in \tau_\alpha \cup \tau_\alpha^*$ 且对 $\forall x, y \in X, x \neq y, A(x) = (1, 0), A(y) = (0, 1)$ 或 $A(x) = (0, 1), A(y) = (1, 0)$, 则由定义 2.3 (1) 知, $(X, \tau_\alpha, \tau_\alpha^*)$ 是 T_0 分离的。

反之, 若 $(X, \tau_\alpha, \tau_\alpha^*)$ 是 T_0 分离的, 则由定义 2.3 (1) 知, 对 $\forall x, y \in X, x \neq y$, 存在 $A \in \zeta^X, A \in \tau_\alpha \cup \tau_\alpha^*$, 使得 $A(x) = (1, 0), A(y) = (0, 1)$ 或 $A(x) = (0, 1), A(y) = (1, 0)$ 。

若 $A \in \tau_\alpha$, 则 $\tau(A) \geq \alpha$ 。若 $A \in \tau_\alpha^*$, 则 $\tau^*(A) \leq 1 - \alpha$, 即存在 $A \in \zeta^X$, 使得 $\tau(A) \geq \alpha$ 或 $\tau^*(A) \leq 1 - \alpha$ 且对 $\forall x, y \in X, x \neq y, A(y) = (0, 1)$ 或 $A(x) = (0, 1), A(y) = (1, 0)$ 。由定义 2.1 (1) 知, (X, τ, τ^*) 是 $\alpha - T_0$ 的。

同理可证 $i=1, 2$ 时的情形。

命题 3.2 若直觉 I-Fuzzy 拓扑空间 (X, τ, τ^*) 是 $\alpha - T_2$, $\alpha \in I_0 (\alpha^* - T_2, \alpha \in I_1)$ 分离的, 则对 $\forall x_{(\lambda, \beta)}, y_{(\gamma, \delta)} \in pt(\zeta^X), x \neq y$, 存在 $A, B \in \zeta^X$, 使得 $\tau(A) \geq \alpha$ 且 $\tau^*(B) \leq 1 - \alpha$ ($\tau(A) > \alpha$ 且 $\tau^*(B) < 1 - \alpha$), $x_{(\lambda, \beta)} \hat{q} A, y_{(\gamma, \delta)} \hat{q} B, A \cap B = 0_{\sim}$ 。

证明 由 (X, τ, τ^*) 是 $\alpha - T_2$ 及定义 2.1 (3) 知, 对 $\forall x_{(\lambda, \beta)}, y_{(\gamma, \delta)} \in pt(\zeta^X), x \neq y$, 存在 $A, B \in \zeta^X$, 使得 $\tau(A) \geq \alpha$ 且 $\tau^*(B) \leq 1 - \alpha$ ($\tau(A) > \alpha$ 且 $\tau^*(B) < 1 - \alpha$), $x_{(\lambda, \beta)} \in A, y_{(\gamma, \delta)} \in B, A \cap B = 0_{\sim}$ 。

由 $x_{(\lambda, \beta)} \in A, y_{(\gamma, \delta)} \in B$ 知, $0_{\sim} < (\lambda, \beta) \leq A(x)$, 从而存在 $x, y \in X$, 使得 $(A \cap x_{(\lambda, \beta)})(x) \neq 0_{\sim}, (B \cap y_{(\gamma, \delta)})(y) \neq 0_{\sim}$ 。故 $A \cap x_{(\lambda, \beta)} \neq 0_{\sim}, B \cap y_{(\gamma, \delta)} \neq 0_{\sim}$, 即 $x_{(\lambda, \beta)} \hat{q} A, y_{(\gamma, \delta)} \hat{q} B$, 命题得证。

定理 3.1 如果直觉 I-Fuzzy 拓扑空间 (X, τ, τ^*) 是 $\alpha - T_i, \alpha \in I_0 (\alpha^* - T_i, \alpha \in I_1)$ 分离的, 那么 $T_i(X, \tau, \tau^*) \geq \alpha, i = 0, 1, 2$ 。

证明 (i) 设 (X, τ, τ^*) 是 $\alpha - T_0$, 由命题 3.1 知, $(X, \tau_\alpha, \tau_\alpha^*)$ 是 T_0 的。现在取 $\forall x_{(\lambda, \beta)}, y_{(\gamma, \delta)} \in pt(\zeta^X), x \neq y$, 由 $(X, \tau_\alpha, \tau_\alpha^*)$ 是 T_0 分离知, $\exists A \in \zeta^X, A \in \tau_\alpha \cup \tau_\alpha^*$ 使得 $A(x) = (1, 0), A(y) = (0, 1)$ 或 $A(x) = (0, 1), A(y) = (1, 0)$ 。现分情况讨论如下:

(a) 令 $A \in \tau_\alpha$, 使得 $A(x) = (1, 0), A(y) = (0, 1)$, 则 $\tau(A) \geq \alpha, x_{(\lambda, \beta)} \hat{q} A, y_{(\gamma, \delta)} \hat{q} A$,

此时 $\bigvee_{y_{(\gamma,\delta)} \neg \hat{q}A} Q_{x_{(\lambda,\beta)}}(A) = \bigvee_{y_{(\gamma,\delta)} \neg \hat{q}A} \bigvee_{x_{(\lambda,\beta)} \neg \hat{q}U \leq A} \tau(U) \geq \alpha$ 。

由定义 2.2 (1) 知, $T_0(x_{(\lambda,\beta)}, y_{(\gamma,\delta)}) \geq \alpha$, 故

$$T_0(X, \tau, \tau^*) = \wedge \{T_0(x_{(\lambda,\beta)}, y_{(\gamma,\delta)}) :$$

$$x_{(\lambda,\beta)}, y_{(\gamma,\delta)} \in pt(\zeta^X), x \neq y\} \geq \alpha。$$

(b) 令 $A \in \tau_\alpha$, 使得 $A(x) = (0, 1), A(y) = (1, 0)$,

则 $\tau(A) \geq \alpha$, $x_{(\lambda,\beta)} \neg \hat{q}A, y_{(\gamma,\delta)} \hat{q}A$, 此时

$$\bigvee_{x_{(\lambda,\beta)} \neg \hat{q}A} Q_{y_{(\gamma,\delta)}}(A) = \bigvee_{x_{(\lambda,\beta)} \neg \hat{q}A} \bigvee_{y_{(\gamma,\delta)} \hat{q}U \leq A} \tau(U) \geq \alpha。$$

由定义 2.2 (1) 知, $T_0(x_{(\lambda,\beta)}, y_{(\gamma,\delta)}) \geq \alpha$, 故

$$T_0(X, \tau, \tau^*) = \wedge \{T_0(x_{(\lambda,\beta)}, y_{(\gamma,\delta)}) :$$

$$x_{(\lambda,\beta)}, y_{(\gamma,\delta)} \in pt(\zeta^X), x \neq y\} \geq \alpha。$$

(c) 令 $A \in \tau_\alpha^*$, 使得 $A(x) = (1, 0), A(y) = (0, 1)$,

则 $\tau^*(A) \leq 1 - \alpha$, $x_{(\lambda,\beta)} \hat{q}A, y_{(\gamma,\delta)} \neg \hat{q}A$, 此时

$$Q_{x_{(\lambda,\beta)}}^*(A) = \bigwedge_{x_{(\lambda,\beta)} \hat{q}U \leq A} \tau^*(U) \leq 1 - \alpha,$$

即 $1 - Q_{x_{(\lambda,\beta)}}^*(A) \geq \alpha$, 故 $\bigvee_{y_{(\gamma,\delta)} \neg \hat{q}A} (1 - Q_{x_{(\lambda,\beta)}}^*(A)) \geq \alpha$ 。

由定义 2.2 (1) 知, $T_0(x_{(\lambda,\beta)}, y_{(\gamma,\delta)}) \geq \alpha$,

$$T_0(X, \tau, \tau^*) = \wedge \{T_0(x_{(\lambda,\beta)}, y_{(\gamma,\delta)}) : x_{(\lambda,\beta)}, y_{(\gamma,\delta)} \in pt(\zeta^X), x \neq y\} \geq \alpha。$$

(d) 令 $A \in \tau_\alpha^*$, 使得 $A(x) = (0, 1), A(y) = (1, 0)$,

则 $\tau^*(A) \leq 1 - \alpha$, $x_{(\lambda,\beta)} \neg \hat{q}A, y_{(\gamma,\delta)} \hat{q}A$, 此时

$$Q_{y_{(\gamma,\delta)}}^*(A) = \bigwedge_{y_{(\gamma,\delta)} \hat{q}U \leq A} \tau^*(U) \leq 1 - \alpha,$$

即 $1 - Q_{y_{(\gamma,\delta)}}^*(A) \geq \alpha$, 故 $\bigvee_{x_{(\lambda,\beta)} \neg \hat{q}A} (1 - Q_{y_{(\gamma,\delta)}}^*(A)) \geq \alpha$ 。

由定义 2.2 (1) 知, $T_0(x_{(\lambda,\beta)}, y_{(\gamma,\delta)}) \geq \alpha$, 因此

$$T_0(X, \tau, \tau^*) = \wedge \{T_0(x_{(\lambda,\beta)}, y_{(\gamma,\delta)}) :$$

$$x_{(\lambda,\beta)}, y_{(\gamma,\delta)} \in pt(\zeta^X), x \neq y\} \geq \alpha。$$

(ii) 设 (X, τ, τ^*) 是 $\alpha - T_1$, 由命题 3.1 知,

$(X, \tau_\alpha, \tau_\alpha^*)$ 是 T_1 的。

现在取 $\forall x_{(\lambda,\beta)}, y_{(\gamma,\delta)} \in pt(\zeta^X), x \neq y$, 由 $(X, \tau_\alpha, \tau_\alpha^*)$ 是 T_1 分离的知, 若存在 $A \in \tau_\alpha$ 且 $B \in \tau_\alpha^*$, 使得 $A(x) = (1, 0)$, $A(y) = (0, 1)$, 且 $B(x) = (0, 1)$, $B(y) = (1, 0)$ 。

即 $\tau(A) \geq \alpha$ 且 $\tau^*(B) \leq 1 - \alpha$, $x_{(\lambda,\beta)} \hat{q}A$,

$x_{(\lambda,\beta)} \neg \hat{q}B$, $y_{(\gamma,\delta)} \neg \hat{q}A$, $y_{(\gamma,\delta)} \hat{q}B$, 则

$$\bigvee_{y_{(\gamma,\delta)} \neg \hat{q}A} Q_{x_{(\lambda,\beta)}}(A) = \bigvee_{y_{(\gamma,\delta)} \neg \hat{q}A} \bigvee_{x_{(\lambda,\beta)} \hat{q}U \leq A} \tau(U) \geq \alpha$$
 且

$$Q_{y_{(\gamma,\delta)}}^*(B) = \bigwedge_{y_{(\gamma,\delta)} \hat{q}U \leq B} \tau^*(U) \leq 1 - \alpha。$$

此时 $1 - Q_{y_{(\gamma,\delta)}}^*(B) \geq \alpha$, 故

$$\bigvee_{x_{(\lambda,\beta)} \neg \hat{q}B} (1 - Q_{y_{(\gamma,\delta)}}^*(B)) \geq \alpha。$$

若存在 $A \in \tau_\alpha$ 且 $B \in \tau_\alpha^*$, 使得 $A(x) = (0, 1)$,

$A(y) = (1, 0)$ 且 $B(x) = (1, 0)$, $B(y) = (0, 1)$ 。

即 $\tau(A) \geq \alpha$ 且 $\tau^*(B) \leq 1 - \alpha$, $x_{(\lambda,\beta)} \neg \hat{q}A$,

$x_{(\lambda,\beta)} \hat{q}B$, $y_{(\gamma,\delta)} \hat{q}A$, $y_{(\gamma,\delta)} \neg \hat{q}B$ 则 $\bigvee_{x_{(\lambda,\beta)} \neg \hat{q}A} Q_{y_{(\gamma,\delta)}}(A) =$

$$\bigvee_{x_{(\lambda,\beta)} \neg \hat{q}A} \bigvee_{y_{(\gamma,\delta)} \hat{q}U \leq A} \tau(U) \geq \alpha$$
 且 $Q_{x_{(\lambda,\beta)}}^*(B) =$

$$\bigwedge_{x_{(\lambda,\beta)} \hat{q}U \leq B} \tau^*(U) \leq 1 - \alpha。$$

此时 $1 - Q_{x_{(\lambda,\beta)}}^*(B) \geq \alpha$, 故

$$\bigvee_{y_{(\gamma,\delta)} \neg \hat{q}B} (1 - Q_{x_{(\lambda,\beta)}}^*(B)) \geq \alpha。$$

综上有 $T_1(x_{(\lambda,\beta)}, y_{(\gamma,\delta)}) \geq \alpha$ 。故

$$T_1(X, \tau, \tau^*) = \wedge \{T_1(x_{(\lambda,\beta)}, y_{(\gamma,\delta)}) :$$

$$x_{(\lambda,\beta)}, y_{(\gamma,\delta)} \in pt(\zeta^X), x \neq y\} \geq \alpha。$$

(iii) 设 (X, τ, τ^*) 是 $\alpha - T_2$, 由命题 3.1 知,

$(X, \tau_\alpha, \tau_\alpha^*)$ 是 T_2 的。

现在取 $\forall x_{(\lambda,\beta)}, y_{(\gamma,\delta)} \in pt(\zeta^X), x \neq y$, 由

$(X, \tau_\alpha, \tau_\alpha^*)$ 是 T_2 分离的知, 若存在 $A \in \tau_\alpha$ 且 $B \in \tau_\alpha^*$,

使 $x_{(\lambda,\beta)} \in A$, $y_{(\gamma,\delta)} \in B$ 且 $A \cap B = 0_-$ 。由命题 3.2

知, $\tau(A) \geq \alpha$ 且 $\tau^*(B) \leq 1 - \alpha$, $x_{(\lambda,\beta)} \hat{q}A$, $y_{(\gamma,\delta)} \hat{q}B$,

$A \cap B = 0_-$, 此时 $Q_{x_{(\lambda,\beta)}}(A) = \bigvee_{x_{(\lambda,\beta)} \hat{q}U \leq A} \tau(U) \geq \alpha$ 且

$$Q_{y_{(\gamma,\delta)}}^*(B) = \bigwedge_{y_{(\gamma,\delta)} \hat{q}U \leq B} \tau^*(U) \leq 1 - \alpha$$
 即 $1 - Q_{y_{(\gamma,\delta)}}^*(B) \geq \alpha$,

故 $\bigvee_{A \cap B = 0_-} \{Q_{x_{(\lambda,\beta)}}(A) \cap (1 - Q_{y_{(\gamma,\delta)}}^*(B))\} \geq \alpha$ 。

若存在 $A \in \tau_\alpha$ 且 $B \in \tau_\alpha^*$, 使 $x_{(\lambda,\beta)} \in B$,

$y_{(\gamma,\delta)} \in A$ 且 $A \cap B = 0_-$, 由命题 3.2 知, $\tau(A) \geq \alpha$

且 $\tau^*(B) \leq 1 - \alpha$, $x_{(\lambda,\beta)} \hat{q}B$, $y_{(\gamma,\delta)} \hat{q}A$, $A \cap B = 0_-$,

此时 $Q_{y_{(\gamma,\delta)}}(A) = \bigvee_{y_{(\gamma,\delta)} \hat{q} U \leq A} \tau(U) \geq \alpha$ 且 $Q_{x_{(\lambda,\beta)}}^*(B) =$

$\bigwedge_{x_{(\lambda,\beta)} \hat{q} U \leq B} \tau^*(U) \leq 1 - \alpha$ 即 $1 - Q_{x_{(\lambda,\beta)}}^*(B) \geq \alpha$, 故

$\bigvee_{A \cap B = 0_-} \{Q_{y_{(\gamma,\delta)}}(A) \cap (1 - Q_{x_{(\lambda,\beta)}}^*(B))\} \geq \alpha$ 。

综上知 $T_2(x_{(\lambda,\beta)}, y_{(\gamma,\delta)}) \geq \alpha$ 。故

$T_2(X, \tau, \tau^*) = \bigwedge \{T_2(x_{(\lambda,\beta)}, y_{(\gamma,\delta)}) :$

$x_{(\lambda,\beta)}, y_{(\gamma,\delta)} \in pt(\zeta^X), x \neq y\} \geq \alpha$ 。

同理可证, 若 (X, τ, τ^*) 是 $\alpha^* - T_i$ 分离的, 则

$T_i(X, \tau, \tau^*) \geq \alpha$, $i = 0, 1, 2$ 。

参考文献:

- [1] Atanassov K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.
- [2] Coker D. An introduction to intuitionistic fuzzy topological spaces[J]. Fuzzy Sets and System, 1997, 88(1): 81-89.
- [3] Lee S J, Kim J T. Some properties of intuitionistic fuzzy bitopological spaces [C]. International Conference on Soft Computing and Intelligent Systems and International Symposium on Advanced Intelligent Systems, 2012: 1040-1045.
- [4] Samanta S K, Mondal T K. Intuitionistic gradation of openness: intuitionistic fuzzy topology[J]. Busefal, 1997, 73: 8-17.
- [5] Mondal T K, Samanta S K. On intuitionistic gradation of openness[J]. Fuzzy sets and systems, 2002, 131(3): 323-336.
- [6] Coker D, Demirci M. An introduction to intuitionistic fuzzy topological spaces in Sostak's sense[J]. Busefal, 1996: 67-76.
- [7] Mondal T K, Samanta S K. On intuitionistic gradation of openness[J]. Fuzzy sets and systems, 2002, 131(3): 323-336.
- [8] Rekha S, Amit K S. On α -and α^* -separation axioms in intuitionistic fuzzy topological spaces [J]. Fifteenth Int. Conf. on IFSs, BurgasNIFS 2011, 17(2): 35-43.
- [9] Atanassov K. Review and new results on intuitionistic fuzzy sets[J]. preprint IM-MFAIS-1-88, Sofia, 1988, 5: 1.
- [10] Coker D, Demirci M. On intuitionistic fuzzy points[J]. Notes on IFS, 1995, 1(2): 79-84.
- [11] Lupiáñez F G. Quasicoincidence for intuitionistic fuzzy points[J]. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2005, 2005(10): 1539-1542.
- [12] Turanlı N. An overview of intuitionistic fuzzy supratopological spaces[J]. Hacettepe Journal of mathematics and statistics, 2003, 32: 17-26.
- [13] 姚尧. 生成的直觉 I-Fuzzy 拓扑和直觉 I-Fuzzy 拓扑空间中连通性的研究[D]. 呼和浩特: 内蒙古师范大学, 2016.