文章编号：1674-8085(2016)05-0004-07

一类基于第三十八家族群的扩张

*聂婷婷，　班桂宁，　陈科成

（广西大学数学与信息科学学院，广西，南宁 530004）

摘　要：对 p^6 阶第三十八家族群中定义的关系进行扩张，得到一类新的非交换 p-群。利用群的扩张理论和 Van Dyek 自由群理论证明该群的存在性，最后通过性质验证它们都是 LA-群。

关键词：有限 p-群；群的扩张；　LA-群；自由群

中图分类号：O174.4　　**文献标识码**：A　　DOI:10.3969/j.issn.1674-8085.2016.05.002

EXTENSION THE ORDER OF P^6-GROUP OF THIRTY-EIGHT FAMILY GROUP

* NIE Ting-ting, BAN Gui-ning, CHEN Ke-cheng

(School of Mathematics and Information Sciences, Guangxi University, Nanning, Guangxi 530004, China)

Abstract: We generalized the defining relations of the group of thirty-eight family of order- p^6, in order to obtain a new series of p -groups. Furthermore, we proved the existence of extended group by using the extension theory of group and the accuracy of free group theory. Eventually we proved that the groups are new LA-groups by some properties.

Key words: finite p -group; extension theory of group; LA-group; free group

群论在代数学中早已发展成为一个重要的分支，并且在其他领域（如密码学）都有广泛的应用。在群论的众多分支中，有限 p-群与群的自同构是群论的热点研究问题，自同构群的最佳下界一直受群论学者的广泛关注，LA-猜想便是对最佳下界的最佳回答。即阶大于 p^2 的有限非循环 P-群的阶是其自同构群的阶的因子。班桂宁、俞曙霞与王勇等教授则先后确定了阶小于 p^6 的全部 p-群的自同构群，从而证明阶小于 p^6 的全部 p-群都是 LA-群[1-5]。本文在俞曙霞与班桂宁教授研究成果的基础上，结合 Rodney James 关于 p^2–p^6 阶的分类[6]针对 p^6 阶群的 Φ_{38} 家族进行群的有效扩张，基于所得的扩张形式，运用 Van Dyek 自由群理论证明扩张形式构成群。对新扩张的 p-群进行研究，得到新群的一些基本性质，最后利用中心内自同构的方法证明新群是 LA-群。

1　基本引论

引理 1.1[7]　(Van Dyek) 设 G 是由生成元 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 和关系 $f_i(x_1,x_2,\cdots,x_r)=1$，$i\in I$ 所定义的群，H=$(a_1,a_2,\cdots,a_r)$ (这些 a_i 可能相同)，$\forall i\in I$，f_i=$(a_1,a_2,\cdots,a_r)=1$，则存在唯一的满同态 $\sigma: G=F_r/N\to H$ 使得 $x_iN\to a_i$，其中 $F_r\langle x_1,x_2,\cdots,x_r\rangle$ 为自由群，$Y=\langle\{f_i(x_1,x_2,\cdots,x_r)\,|\,i\in I\}\rangle$，$N=Y^{F_r}$ (Y 在 F_r 中的正规闭包)，$G=F_r/N$。如果 $|G|\trianglelefteq|H|<+\infty$，则上述的 σ 为群同构(即 H 是由生成元 $(a_1,a_2,\cdots,a_r)$ 与定义关系

收稿日期：2016-03-14；修改日期：2016-04-10
基金项目：国家自然科学基金项目(61074185)；广西自然科学基金项目(0832054)
作者简介：*聂婷婷(1991-)，女，山西长治人，硕士生，主要从事有限群论研究(E-mail:786860314@qq.com);
班桂宁(1962-)，男，广西南宁人，教授，博士，主要从事有限群论与控制论研究(E-mail: banguining101@sina.com);
陈科成(1990-)，男，浙江宁波人，硕士生，主要从事有限群论研究(E-mail:676477606@qq.com).

f_i=$(a_1,a_2,\cdots,a_r)=1$，$\forall i\in I$ 所定义的群)。

引理 1.2[8] 设 G 是群，$a,b,c\in G$，则

(1) $[a,b]^{-1}=[b,a]$；(2) $[ab,c]=[a,c]^b[b,c]$；(3)$[a,bc]=[a,c][a,b]^c$。

引理 1.3[8] 设 G 是群，$Z(G)$是群的中心，$a,b\in G$ 且 $[a,b]\in Z(G)$，又设 n 是正整数，则 $[a^n,b]=[a,b]^n$；$[a,b^n]=[a,b]^n$；$(ab)^n=a^nb^n[b,a]^{\binom{n}{2}}$。

引理 1.4[8] 设 G 是有限 p-群，规定 $P(G)=\{g^p\mid g\in G\}$，则 p-群的 Frattini 子群 $\Phi(G)=G'P(G)$ 且 $G/\Phi(G)$ 是初等交换 p-群。

引理 1.5[8] 设 G 是有限 p-群，$c(G)$ 是 G 的幂零类，若 $c(G)<p$，则 G 正则。

引理 1.6[8] 设 G 是有限群，则 G 的全体中心内自同构组成 $\mathrm{Aut}(G)$ 的子群，并且它和 $Z(G/Z(G))$ 是同构的。

引理 1.7[9] 如果 $Z(G)\le\Phi(G)$，那么 G 为 PN-群。

证明：用反证法。假设群 $G=H\times\langle h\rangle$，那么 $H/\Phi(H)=\langle z_1\rangle\times\langle z_2\rangle\times\cdots\times\langle z_n\rangle\cong Z_p{}^*$，$|h|=p^\alpha,\alpha\ge 1$。从而

$$\Phi(\langle h\rangle)=\langle h^p\rangle,$$

$$G/\Phi(G)=\frac{G}{\Phi(H)\times\Phi(\langle h\rangle)}=\langle\overline{z_1}\rangle\times\cdots\times\langle\overline{z_n}\rangle\times\langle\overline{h}\rangle,$$

则 $h\notin\Phi(G)$，矛盾。故假设不成立，即 G 为 PN-群。

引理 1.8[9] 设 G 是 PN-群，$G'=\langle[a,b]\,|\,a,b\in G\rangle$，$G/G'$ 和 $Z(G)$的不变型分别为 $m_1\ge m_2\ge\cdots\ge m_t\ge 1$ 和 $k_1\ge k_2\ge\cdots\ge k_s\ge 1$，则 $|A_c(G)|=p^a$，其中 $a=\sum\min\{m_j,k_i\}$。

2 所得结果

定理 1 设 $G=\langle\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\mid[\alpha_i,\alpha]=\alpha_{i+1},[\alpha_1,\alpha_2]=\alpha_4\alpha_5{}^{-1},[\alpha_1,\alpha_3]=\alpha_5$，$\alpha^{p^t}=\alpha_i{}^{p^{t_i}}=\alpha_5{}^{p^{t_5}}=1,(i=1,2,3,4)\rangle$，根据扩张可得 G 构成群的充要条件是:$t_5\le t_4\le t_3\le t_2\le\min\{t,t_1\}$，$G=\langle\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\mid[\alpha_i,\alpha]=\alpha_{i+1},[\alpha_1,\alpha_2]=\alpha_4\alpha_5{}^{-1}$，$[\alpha_1,\alpha_3]=\alpha_5,\alpha^{p^t}=\alpha_i{}^{p^{t_i}}=\alpha_5{}^{p^{t_5}}=1,t_5\le t_4\le t_3\le t_2\le$，$\min\{t,t_1\},(i=1,2,3,4)\rangle$ 且 $|G|=p^{t+t_1+t_2+t_3+t_4+t_5}$。

证明：(I) 求 G 成为群的条件，首先假设定理中所给的 G 是一个群。

通过$[\alpha_i,\alpha]=\alpha_{i+1}$，$[\alpha_1,\alpha_2]=\alpha_4\alpha_5{}^{-1},[\alpha_1,\alpha_3]=\alpha_5$，有

$\alpha_i^{\alpha}=\alpha_i\alpha_{i+1}$，$\alpha^{\alpha_i}=\alpha\alpha_{i+1}^{-1}$，$\alpha_1^{\alpha_2}=\alpha_1\alpha_4\alpha_5{}^{-1}$，

$\alpha_2{}^{\alpha_1}=\alpha_2\alpha_5\alpha_4^{-1}$，$\alpha_1^{\alpha_3}=\alpha_1\alpha_5$，$\alpha_3{}^{\alpha_1}=\alpha_3\alpha_5{}^{-1}$，

$(i=1,2,3,4)$

所以 $\alpha=\alpha^{\alpha_1{}^{p^{t_1}}}=(\alpha\alpha_2{}^{-1})^{\alpha_1{}^{p^{t_1}-1}}=(\alpha\alpha_2^{-2}\alpha_4\alpha_5{}^{-1})^{\alpha_1{}^{p^{t_1}-2}}=$

$(\alpha\alpha_2^{-3}\alpha_4{}^3\alpha_5{}^{-3})^{\alpha_1{}^{p^{t_1}-3}}=(\alpha\alpha_2^{-4}\alpha_4{}^6\alpha_5{}^{-6})^{\alpha_1{}^{p^{t_1}-4}}=\cdots=$

$\alpha\alpha_2{}^{-p^{t_1}}\alpha_4{}^{\binom{p^{t_1}}{2}}\alpha_5{}^{-\binom{p^{t_1}}{3}}$。

同理 $\alpha=\alpha^{\alpha_2{}^{p^{t_2}}}=\left(\alpha\alpha_3{}^{-1}\right)^{\alpha_2{}^{p^{t_2}-1}}=\left(\alpha\alpha_3{}^{-2}\right)^{\alpha_2{}^{p^{t_2}-2}}=$

$\cdots=\alpha\alpha_3{}^{-p^{t_2}}$

$\alpha=\alpha^{\alpha^{t_3}}=(\alpha\alpha_4{}^{-1})^{\alpha^{p^{t_3}-1}}=(\alpha\alpha_4{}^{-2})^{\alpha^{p^{t_3}-2}}=$

$\cdots=\alpha\alpha_4{}^{-p^{t_3}}$

$\alpha=\alpha^{\alpha_4{}^{p^{t_4}}}=\left(\alpha\alpha_5{}^{-1}\right)^{\alpha_4{}^{p^{t_4}-1}}=$

$\left(\alpha\alpha_5{}^{-2}\right)^{\alpha_4{}^{p^{t_4}-2}}=\cdots=\alpha\alpha_5{}^{-p^{t_4}}$

$\alpha_1=\alpha_1{}^{\alpha^{p^t}}=(\alpha_1\alpha_2)^{\alpha^{p^t-1}}=(\alpha_1\alpha_2{}^2\alpha_3)^{\alpha^{p^t-2}}=$

$(\alpha_1\alpha_2{}^3\alpha_3{}^3\alpha_4)^{\alpha^{p^t-3}}=(\alpha_1\alpha_2{}^4\alpha_3{}^6\alpha_4{}^4\alpha_5)^{\alpha^{p^t-4}}=\cdots=$

$\alpha_1\alpha_2{}^{p^t}\alpha_3{}^{\binom{p^t}{2}}\alpha_4{}^{\binom{p^t}{3}}\alpha_5{}^{\binom{p^t}{4}}$

$\alpha_2=\alpha_2{}^{\alpha^{p^t}}=(\alpha_2\alpha_3)^{\alpha^{p^t-1}}=(\alpha_2\alpha_3{}^2\alpha_4)^{\alpha^{p^t-2}}=$

$(\alpha_2\alpha_3{}^3\alpha_4{}^3\alpha_5)^{\alpha^{p^t-3}}=(\alpha_2\alpha_3{}^4\alpha_4{}^6\alpha_5{}^4)^{\alpha^{p^t-4}}=\cdots=$

$\alpha_2\alpha_3{}^{p^t}\alpha_4{}^{\binom{p^t}{2}}\alpha_5{}^{\binom{p^t}{3}}$

$\alpha_3=\alpha_3{}^{\alpha^{p^t}}=(\alpha_3\alpha_4)^{\alpha^{p^t-1}}=(\alpha_3\alpha_4{}^2\alpha_5)^{\alpha^{p^t-2}}=$

$(\alpha_3\alpha_4{}^3\alpha_5{}^3)^{\alpha^{p^t-3}}=\cdots=\alpha_3\alpha_4{}^{p^t}\alpha_5{}^{\binom{p^t}{2}}$

$\alpha_4=\alpha_4{}^{\alpha^{p^t}}=(\alpha_4\alpha_5)^{\alpha^{p^t-1}}=(\alpha_4\alpha_5{}^2)^{\alpha^{p^t-2}}=$

$(\alpha_4\alpha_5{}^3)^{\alpha^{p^t-3}}=\cdots=\alpha_4\alpha_5{}^{p^t}$

$\alpha_1=\alpha_1{}^{\alpha_2{}^{p^{t_2}}}=(\alpha_1\alpha_4\alpha_5{}^{-1})^{\alpha_2{}^{p^{t_2}-1}}=(\alpha_1\alpha_4{}^2\alpha_5{}^{-2})^{\alpha_2{}^{p^{t_2}-2}}=$

$$(\alpha_1\alpha_4{}^3\alpha_5{}^{-3})^{\alpha_2{}^{p^{t_2}-3}}=\cdots=\alpha_1\alpha_4{}^{p^{t_2}}\alpha_5{}^{-p^{t_2}}$$

$$\alpha_1=\alpha_1{}^{\alpha_3{}^{p^{t_3}}}=(\alpha_1\alpha_5)^{\alpha_3{}^{p^{t_3}-1}}=(\alpha_1\alpha_5{}^2)^{\alpha_3{}^{p^{t_3}-2}}=\cdots=\alpha_1\alpha_5{}^{p^{t_3}}$$

$$\alpha_2=\alpha_2{}^{\alpha_1{}^{p^{t_1}}}=(\alpha_2\alpha_5\alpha_4{}^{-1})^{\alpha_1{}^{p^{t_1}-1}}=$$

$$(\alpha_2\alpha_5{}^2\alpha_4{}^{-2})^{\alpha_1{}^{p^{t_1}-2}}=\cdots=\alpha_2\alpha_5{}^{p^{t_1}}\alpha_4{}^{-p^{t_1}}$$

$$\alpha_3=\alpha_3{}^{\alpha_1{}^{p^{t_1}}}=(\alpha_3\alpha_5{}^{-1})^{\alpha_1{}^{p^{t_1}-1}}=(\alpha_3\alpha_5{}^{-2})^{\alpha_1{}^{p^{t_1}-2}}=\cdots=\alpha_3\alpha_5{}^{-p^{t_1}}\text{。}$$

综合上面各个式子的关系显然有：

$\alpha_5{}^{p^t}=1$，$\alpha_5{}^{p^{t_1}}=1$，$\alpha_5{}^{p^{t_2}}=1$，$\alpha_5{}^{p^{t_3}}=1$，$\alpha_5{}^{p^{t_4}}=1$，$\alpha_4{}^{p^t}=1$，$\alpha_4{}^{p^{t_1}}=1$，$\alpha_4{}^{p^{t_2}}=1$，$\alpha_4{}^{p^{t_3}}=1$，$\alpha_3{}^{p^t}=1$，$\alpha_3{}^{p^{t_2}}=1$，$\alpha_2{}^{p^t}=1$，$\alpha_2{}^{p^{t_1}}=1$。

因为 $o(\alpha)=p^t$，$o(\alpha_1)=p^{t_1}$，$o(\alpha_2)=p^{t_2}$，$o(\alpha_3)=p^{t_3}$，$o(\alpha_4)=p^{t_4}$，$o(\alpha_5)=p^{t_5}$，

所以 $t_5\le\min\{t,t_1,t_2,t_3,t_4\}$，$t_4\le\min\{t,t_1,t_2,t_3\}$，$t_3\le\min\{t,t_2\}$，$t_2\le\min\{t,t_1\}$。

综合上述条件有：

$$t_5\le t_4\le t_3\le t_2\le\min\{t,t_1\}\text{。}$$

(II) G 的存在性的证明，分以下两步完成：

(1) 先证明 $G_1=\langle\alpha,\alpha_i,\alpha_5\mid[\alpha_i,\alpha]=\alpha_{i+1},\alpha^{p^t}=\alpha_i{}^{p^{t_i}}=\alpha_5{}^{p^{t_5}}=1,t_5\le t_4\le t_3\le t_2\le t,\ (i=2,3,4)\rangle$ 的存在性，且 G_1 中所给的关系即为群 G_1 的定义关系。

令交换群 $N=\langle\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\mid\alpha_2{}^{p^{t_2}}=\alpha_3{}^{p^{t_3}}=\alpha_4{}^{p^{t_4}}=\alpha_5{}^{p^{t_5}}=1,t_5\le t_4\le t_3\le t_2\rangle$，

型不变量为 $(p^{t_2},p^{t_3},p^{t_4},p^{t_5})$，其中 $N\cong Z_{p^{t_2}}\times Z_{p^{t_3}}\times Z_{p^{t_4}}\times Z_{p^{t_5}}$，设 $F=<\alpha>$ 为 p^t 阶循环群。

作映射 $\tau:g\mapsto g'=g^\alpha,g\in N$，则

$\alpha_2{}'=\alpha_2{}^\tau=\alpha_2{}^\alpha=\alpha_2\alpha_3$，$\alpha_3{}'=\alpha_3{}^\tau=\alpha_3{}^\alpha=\alpha_3\alpha_4$，$\alpha_4{}'=\alpha_4{}^\tau=\alpha_4{}^\alpha=\alpha_4\alpha_5,\alpha_5{}'=\alpha_5{}^\tau=\alpha_5{}^\alpha=\alpha_5$。

由条件 $t_5\le t_4\le t_3\le t_2$，有

$(\alpha_2{}')^{p^{t_2}}=(\alpha_2\alpha_3)^{p^{t_2}}=\alpha_2{}^{p^{t_2}}\alpha_3{}^{p^{t_2}}=1$，

$(\alpha_3{}')^{p^{t_3}}=(\alpha_3\alpha_4)^{p^{t_3}}=1$，$(\alpha_4{}')^{p^{t_4}}=\alpha_4{}^{p^{t_4}}\alpha_5{}^{p^{t_4}}=1$，

$(\alpha_5{}')^{p^{t_5}}=\alpha_5{}^{p^{t_5}}=1$。

此时可得 $N=<\alpha_2{}',\alpha_3{}',\alpha_4{}',\alpha_5{}'>$，故 $\tau\in Aut(N)$，显然 $1^\tau=1$，下证 $\tau^{p^t}=1$。

根据条件 $t_5\le t_4\le t_3\le t_2\le t$，有

$$\alpha_2^{\tau^{p^t}}=(\alpha_2{}^\alpha)^{\tau^{p^t-1}}=(\alpha_2\alpha_3)^{\tau^{p^t-1}}=\cdots=$$

$$\alpha_2\alpha_3{}^{p^t}\alpha_4{}^{\binom{p^t}{2}}\alpha_5{}^{\binom{p^t}{3}}=\alpha_2\text{，}$$

$$\alpha_3^{\tau^{p^t}}=\alpha_3^{\alpha^{p^t}}=\cdots=\alpha_3\alpha_4{}^{p^t}\alpha_5{}^{\binom{p^t}{2}}=\alpha_3\text{，}$$

$$\alpha_4^{\tau^{p^t}}=\alpha_4\alpha_5{}^{p^t}=\alpha_4\text{，}\quad\alpha_5^{\tau^{p^t}}=\alpha_5\text{，}$$

从而 $\tau^{p^t}=1$。若此时记扩张函数 $f:F\times F\to N$ 和 $\alpha:F\to\mathrm{Aut}(N)$ 有如下形状：

$$f\left(a^i,a^j\right)=\begin{cases}1,i+j<p^t\\\alpha,i+j\ge p^t\end{cases},\ \alpha\left(a^i\right)=\tau^i,\ i=0,1,\cdots,p^t-1\text{，}$$

设在同构 $\sigma:F\to G_1/N$ 之下 a 的像为 $\overline{a}N$，其中 $\overline{a}$ 为陪集 $\overline{a}N$ 中选定的代表元，令 $\overline{a}=\alpha$，则满足 $\alpha_2{}^{\overline{a}}=\alpha_2\alpha_3\in N,\alpha_3{}^{\overline{a}}=\alpha_3\alpha_4\in N,\alpha_4{}^{\overline{a}}=\alpha_4\alpha_5\in N$，于是由 Schreier 扩张理论得到 N 被 F 的一个扩张 $G_1=Ext(N,p^t;1,\tau)$ 且 $F\cong G_1/N$。

从而有 $G_1=\langle\alpha,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\rangle$，且 $\alpha^{p^t}=\overline{a}^{p^t}=1$，$\alpha_2{}^\alpha=\alpha_2\alpha_3,\alpha_3{}^\alpha=\alpha_3\alpha_4,\alpha_4{}^\alpha=\alpha_4\alpha_5$，即 $[\alpha_2,\alpha]=\alpha_3,[\alpha_3,\alpha]=\alpha_4,[\alpha_4,\alpha]=\alpha_5$。因此 G_1 是存在的，且 $|G|=p^{t+t_2+t_3+t_4+t_5}$。

下面利用自由群理论证明 G_1 中所给的关系即为群 G_1 的定义关系。

设 $F=<x,x_2,x_3,x_4,x_5>$ 是一个自由群，$Y=\{x_3[x,x_2],x_4[x,x_3],x_5[x,x_4],[x,x_5],[x_2,x_3],$

$[x_2,x_4],[x_2,x_5],[x_3,x_4],[x_3,x_5],[x_4,x_5],x^{p^t},x_2{}^{p^{t_2}},$

$x_3{}^{p^{t_3}},x_4{}^{p^{t_4}},x_5{}^{p^{t_5}}\}$，

则 $\overline{F}=F/Y^F=<\overline{x},\overline{x_2},\overline{x_3},\overline{x_4},\overline{x_5}>$。

因此 $\overline{x}^{p^t}=\overline{x_2}^{p^{t_2}}=\overline{x_3}^{p^{t_3}}=\overline{x_4}^{p^{t_4}}=\overline{x_5}^{p^{t_5}}=1$，$[\overline{x_2},\overline{x}]=\overline{x_3}$，$[\overline{x_3},\overline{x}]=\overline{x_4}$，$[\overline{x_4},\overline{x}]=\overline{x_5}$，$[\overline{x},\overline{x_5}]=[\overline{x_2},\overline{x_3}]=[\overline{x_2},\overline{x_4}]=[\overline{x_2},\overline{x_5}]=[\overline{x_3},\overline{x_4}]=[\overline{x_3},\overline{x_5}]=[\overline{x_4},\overline{x_5}]=1$，且 $\overline{F}$ 的子集 $\overline{H}=\langle\overline{x_2},\overline{x_3},\overline{x_4},\overline{x_5}\rangle\trianglelefteq\overline{F}$，于是 $\overline{F}/\overline{H}=\langle\overline{x}\overline{H}\rangle$，$|\overline{F}/\overline{H}|=|\langle\overline{x_1}\overline{H}\rangle|\le p^t$，故 $|\overline{F}|\le p^{t+t_2+t_3+t_4+t_5}=|\mathrm{G}_1|$，由引理 1.1 知 $G_1\cong\overline{F}$，所以 $G_1=\langle\alpha,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$

$|[\alpha_i,\alpha]=\alpha_{i+1},\alpha^{p^t}=\alpha_i^{p^{t_i}}=\alpha_5^{p^{t_5}}=1,t_5\le t_4\le t_3\le t_2\le t,(i=2,3,4)\rangle$。

(2) 再证明定理中的 $G=\langle\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\mid[\alpha_i,\alpha]=\alpha_{i+1},\ [\alpha_1,\alpha_2]=\alpha_4\alpha_5^{-1},\ [\alpha_1,\alpha_3]=\alpha_5,\ \alpha^{p^t}=\alpha_i^{p^{t_i}}=\alpha_5^{p^{t_5}}=1,t_5\le t_4\le t_3\le t_2\le\min\{t,t_1\},(i=1,2,3,4)\rangle$ 的存在性，且 G 中所给的关系即为群 G 的定义关系。

令 $N=G_1$，设 $F=<a>$ 为 p^{t_1} 阶循环群。再作映射 $\tau:g\mapsto g'=g^{\alpha_1},g\in N$，则

$\alpha'=\alpha^\tau=\alpha^{\alpha_1}=\alpha\alpha_2^{-1}$，$\alpha_2'=\alpha_2^{\alpha_1}=\alpha_2\alpha_5\alpha_4^{-1}$，

$\alpha_3'=\alpha_3^\tau=\alpha_3\alpha_5^{-1}$，$\alpha_4'=\alpha_4^\tau=\alpha_4$，

$\alpha_5'=\alpha_5^\tau=\alpha_5$。

根据 $t_5\le t_4\le t_3\le t_2\le t$，有

$$(\alpha')^{p^t}=(\alpha\alpha_2^{-1})^{p^t}=\alpha^{p^t}\alpha_2^{-p^t}[\alpha_2,\alpha]^{\binom{p^t}{2}}=\alpha^{p^t}\alpha_2^{-p^t}\alpha_3^{\binom{p^t}{2}}=1,$$

$$(\alpha_2')^{p^{t_2}}=(\alpha_2\alpha_5\alpha_4^{-1})^{p^{t_2}}=\alpha_2^{p^{t_2}}\alpha_5^{p^{t_2}}\alpha_4^{-p^{t_2}}=1,$$

$$(\alpha_3')^{p^{t_3}}=(\alpha_3\alpha_5^{-1})^{p^{t_3}}=\alpha_3^{p^{t_3}}\alpha_5^{-p^{t_3}}=1,$$

$$(\alpha_4')^{p^{t_4}}=\alpha_4^{p^{t_4}}=1,$$

此时有 $N=<\alpha',\alpha_2',\alpha_3',\alpha_4',\alpha_5'>$，故 $\tau\in Aut(N)$，显然 $1^\tau=1$，下证 $\tau^{p^{t_1}}=1$。

根据条件 $t_5\le t_4\le t_3\le t_2\le t$，有

$$\alpha^{\tau^{p^{t_1}}}=(\alpha^\tau)^{\tau^{p^{t_1}-1}}=(\alpha_1\alpha_2^{-1})^{\tau^{p^{t_1}-1}}=(\alpha^\tau\alpha_2^{-\tau})^{\tau^{p^{t_1}-2}}=(\alpha\alpha_2^{-2}\alpha_4\alpha_5^{-1})^{\tau^{p^{t_1}-2}}=\cdots=\alpha\alpha_2^{-p^{t_1}}\alpha_4^{\binom{p^{t_1}}{2}}\alpha_5^{-\binom{p^{t_1}}{3}}=\alpha,$$

$$\alpha_2^{\tau^{p^{t_1}}}=\alpha_2\alpha_5^{p^{t_1}}\alpha_4^{-p^{t_1}}=\alpha_2,$$

$$\alpha_3^{\tau^{p^{t_1}}}=\alpha_3\alpha_5^{-p^{t_1}}=\alpha_3,\quad \alpha_4^{\tau^{p^{t_1}}}=\alpha_4,\quad \alpha_5^{\tau^{p^{t_1}}}=\alpha_5,$$

从而 $\tau^{p^{t_1}}=1$。于是由 Schreier 扩张理论得到 N 被 F 的一个扩张 $G=Ext(N,p^{t_1};1,\tau)$ 且 $F\cong G/N$。因此 G 是存在的，且 $|G|=p^{t+t_1+t_2+t_3+t_4+t_5}$。

随后根据自由群理论证明 G 即为群 G 的定义关系。

设 $F=<x,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5>$ 是一个自由群，

$$S=\{x_2^{-1}[x_1,x],x_3^{-1}[x_2,x],x_4^{-1}[x_3,x],x_5^{-1}[x_4,x],x_5x_4^{-1}[x_1,x_2],x_5^{-1}[x_1,x_3],[x,x_5],[x_1,x_4],[x_1,x_5],[x_2,x_3],[x_2,x_4],[x_2,x_5],[x_3,x_4],[x_3,x_5],[x_4,x_5],\mid x^{p^t},x_1^{p^{t_1}},x_2^{p^{t_2}},x_3^{p^{t_3}},x_4^{p^{t_4}},x_5^{p^{t_5}}\},$$

则 $\overline{F}=F/S^F=<\overline{x},\overline{x_1},\overline{x_2},\overline{x_3},\overline{x_4},\overline{x_5}>$。

因此 $\overline{x}^{p^t}=\overline{x_1}^{p^{t_1}}=\overline{x_2}^{p^{t_2}}=\overline{x_3}^{p^{t_3}}=\overline{x_4}^{p^{t_4}}=\overline{x_5}^{p^{t_5}}=1$，$[\overline{x_1},\overline{x}]=\overline{x_2}$，$[\overline{x_2},\overline{x}]=\overline{x_3}$，$[\overline{x_3},\overline{x}]=\overline{x_4}$，$[\overline{x_4},\overline{x}]=\overline{x_5}$，$[\overline{x_1},\overline{x_2}]=\overline{x_4x_5^{-1}}$，$[\overline{x_1},\overline{x_3}]=\overline{x_5}$，$[\overline{x},\overline{x_5}]=[\overline{x_1},\overline{x_4}]=[\overline{x_1},\overline{x_5}]=[\overline{x_2},\overline{x_3}]=[\overline{x_2},\overline{x_4}]=[\overline{x_2},\overline{x_5}]=[\overline{x_3},\overline{x_4}]=[\overline{x_3},\overline{x_5}]=[\overline{x_4},\overline{x_5}]=1$，且 $\overline{F}$ 的子集 $\overline{H}=\langle\overline{x},\overline{x_2},\overline{x_3},\overline{x_4},\overline{x_5}\rangle\trianglelefteq\overline{F}$，于是 $\overline{F}/\overline{H}=\langle\overline{x_1}\overline{H}\rangle$，$|\overline{F}/\overline{H}|=|\langle\overline{x_1}\overline{H}\rangle|\le p^{t_1}$，故 $|\overline{F}|\le p^{t+t_1+t_2+t_3+t_4+t_5}=|G|$，从而可知 $G\cong\overline{F}$，由此可得

$$G=\langle\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\mid[\alpha_i,\alpha]=\alpha_{i+1},[\alpha_1,\alpha_2]=\alpha_4\alpha_5^{-1},[\alpha_1,\alpha_3]=\alpha_5,\alpha^{p^t}=\alpha_i^{p^{t_i}}=\alpha_5^{p^{t_5}}=1,t_5\le t_4\le t_3\le t_2\le\min\{t,t_1\},(i=1,2,3,4)\rangle。$$

定理 2　群 G 有下列性质:

(1) $G'=G_2=\langle\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\rangle$，$G_3=\langle\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\rangle$，$G_4=\langle\alpha_4,\alpha_5\rangle$，$G_5=\langle\alpha_5\rangle$，$G/G'=\langle\alpha G',\alpha_1G'\rangle$，$\Phi(G)=\langle\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\rangle\langle\alpha^p,\alpha_1^p\rangle$；

(2)G 为亚交换 p-群;

(3)若 $p>5$，则 G 为正则 p-群;

(4) $Z(G)=Z_1(G)=\langle\alpha^{p^{t_2}},\alpha_1^{p^{t_2}},\alpha_2^{p^{t_3}},\alpha_3^{p^{t_4}},\alpha_4^{p^{t_5}},\alpha_5\rangle$ 且 $|Z(G)|=p^{t+t_1-t_2}$；

(5) $Z_2(G)=\langle\alpha^{p^{t_3}},\alpha_1^{p^{t_3}},\alpha_2^{p^{t_4}},\alpha_3^{p^{t_5}},\alpha_4,\alpha_5\rangle$，其中 $|Z_2(G)|=p^{t+t_1+t_2-t_3}$，$|G/Z_2(G)|=p^{2t_3+t_4+t_5}$；

(6) $Z_3(G)=\langle\alpha^{p^{t_4}},\alpha_1^{p^{t_4}},\alpha_2^{p^{t_5}},\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\rangle$，$Z_4(G)=\langle\alpha^{p^{t_5}},\alpha_1^{p^{t_5}},\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\rangle$；

(7)G 为 PN-群;

(8)若 $t=t_1=t_2=t_3=t_4=t_5=1$，则 $G\cong\Phi_{38}(1^6)$。

证明：(1) (i) $G'=G_2=[G,G]=\langle\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\rangle$，从而可得

$G/G'=\langle\alpha G',\alpha_1G'\rangle$，

$G_3=[G,G_2]=\langle\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\rangle$，

$G_4=[G,G_3]=\langle\alpha_4,\alpha_5\rangle$，

$G_5=[G,G_4]=\langle\alpha_5\rangle$， $G_6=1$。

从而可得 G 的下中心群列

$G=G_1\ge G_2\ge G_3\ge G_4\ge G_5\ge G_6=1$

所以 G 是幂零群，且幂零类 $c(G)=5$。

(II)由有限群 G 的子群 $P(G)$ 定义有 $P(G)=\langle g^p \mid g\in G\rangle$，$\Phi(G)$ 为 G 的 Frattini 子群，即 $P(\mathrm{G})=\langle\alpha^p,\alpha_1{}^p,\alpha_2{}^p,\alpha_3{}^p,\alpha_4{}^p,\alpha_5{}^p\rangle$，所以 $\Phi(G)=G'P(G)=\langle\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\rangle\langle\alpha^p,\alpha_1^p\rangle$。

(2)因为 $[\alpha_2,\alpha_3]=[\alpha_2,\alpha_4]=[\alpha_2,\alpha_5]=[\alpha_3,\alpha_4]=[\alpha_3,\alpha_5]=[\alpha_4,\alpha_5]=1$，所以 $G''=[G',G']=1$， 故 G 为亚交换 p-群。

(3)当 $p>5$ 时， 由(1)知 $c(G)=5<p$， 再利用引理 1.5 得，此时 G 为正则 p-群。

(4)对 $\forall z\in Z(G)$，设 $z=\alpha^x\alpha_1{}^{x_1}\alpha_2{}^{x_2}\alpha_3{}^{x_3}\alpha_4{}^{x_4}\alpha_5{}^{x_5}$，则

$1=[\alpha,z]=[\alpha,\alpha^x\alpha_1{}^{x_1}\alpha_2{}^{x_2}\alpha_3{}^{x_3}\alpha_4{}^{x_4}\alpha_5{}^{x_5}]=$

$[\alpha,\alpha_5{}^{x_5}][\alpha,\alpha^x\alpha_1^{x_1}\alpha_2^{x_2}\alpha_3^{x_3}\alpha_4^{x_4}]^{\alpha_5{}^{x_5}}=$

$[\alpha,\alpha_4{}^{x_4}]^{\alpha_5{}^{x_5}}[\alpha,\alpha^x\alpha_1^{x_1}\alpha_2^{x_2}\alpha_3^{x_3}]^{\alpha_4{}^{x_4}\alpha_5{}^{x_5}}=$

$\alpha_5{}^{-x_4}[\alpha,\alpha^x\alpha_1^{x_1}\alpha_2^{x_2}\alpha_3^{x_3}]^{\alpha_4{}^{x_4}\alpha_5{}^{x_5}}=$

$\alpha_5{}^{-x_4}[\alpha,\alpha_1^{x_1}\alpha_2^{x_2}\alpha_3^{x_3}]^{\alpha_4{}^{x_4}\alpha_5{}^{x_5}}=$

$\alpha_5{}^{-x_4}\alpha_4{}^{-x_3}[\alpha,\alpha_1^{x_1}\alpha_2^{x_2}]^{\alpha_3^{x_3}\alpha_4{}^{x_4}\alpha_5{}^{x_5}}=$

$\alpha_5{}^{-x_4}\alpha_4{}^{-x_3}[\alpha,\alpha_2^{x_2}]^{\alpha_3^{x_3}\alpha_4{}^{x_4}\alpha_5{}^{x_5}}[\alpha,\ \alpha_1^{x_1}]^{\alpha_2{}^{x_2}\alpha_3^{x_3}\alpha_4{}^{x_4}\alpha_5{}^{x_5}}=$

$\alpha_5{}^{-x_4}\alpha_4{}^{-x_3}\alpha_3{}^{-x_2}\alpha_2{}^{-x_1}\alpha_4{}^{\binom{x_1}{2}}\alpha_5{}^{\binom{x_1}{3}}$

$[\alpha_1,z]=[\alpha_1,\alpha^x\alpha_1{}^{x_1}\alpha_2{}^{x_2}\alpha_3{}^{x_3}\alpha_4{}^{x_4}\alpha_5{}^{x_5}]=$

$[\alpha_1,\alpha_5{}^{x_5}][\alpha_1,\alpha^x\alpha_1^{x_1}\alpha_2^{x_2}\alpha_3^{x_3}\alpha_4^{x_4}]^{\alpha_5{}^{x_5}}=$

$[\alpha_1,\alpha^x\alpha_1^{x_1}\alpha_2^{x_2}\alpha_3^{x_3}]^{\alpha_4{}^{x_4}\alpha_5{}^{x_5}}=$

$[\alpha_1,\alpha_3^{x_3}]^{\alpha_4{}^{x_4}\alpha_5{}^{x_5}}[\alpha_1,\alpha^x\alpha_1^{x_1}\alpha_2^{x_2}]^{\alpha_3^{x_3}\alpha_4^{x_4}\alpha_5{}^{x_5}}=$

$\alpha_5^{x_3}[\alpha_1,\alpha_2^{x_2}]^{\alpha_3^{x_3}\alpha_4^{x_4}\alpha_5{}^{x_5}}[\alpha_1,\alpha^x\alpha_1^{x_1}]^{\alpha_2^{x_2}\alpha_3^{x_3}\alpha_4^{x_4}\alpha_5{}^{x_5}}=$

$\alpha_5{}^{x_3}\alpha_4{}^{x_2}\alpha_5{}^{-x_2}[\alpha_1,\alpha^x]^{\alpha_1^{x_1}\alpha_2^{x_2}\alpha_3^{x_3}\alpha_4^{x_4}\alpha_5{}^{x_5}}=$

$\alpha_5{}^{x_3+x_1x-x_1\binom{x}{2}+\binom{x}{4}-x_2}\alpha_4{}^{x_2-x_1x+\binom{x}{3}}\alpha_3{}^{\binom{x}{2}}\alpha_2{}^x=1$

同理

$[\alpha_2,z]=\alpha_5{}^{x_1-x_1x+\binom{x}{3}}\alpha_4{}^{\binom{x}{2}-x_1}\alpha_3{}^x=1$，

$[\alpha_3,z]=\alpha_4{}^x\alpha_5{}^{\binom{x}{2}-x_1}=1$，

$[\alpha_4,z]=\alpha_5{}^x=1$， $[\alpha_5,z]=1$。

由此可得

$p^{t_5}\mid x$，$p^{t_4}\mid x$，$p^{t_3}\mid x$，$p^{t_2}\mid x$，$p^{t_5}\mid x_1$，$p^{t_4}\mid x_1$，$p^{t_2}\mid x_1$，$p^{t_5}\mid x_2$，$p^{t_4}\mid x_2$，$p^{t_3}\mid x_2$，$p^{t_5}\mid x_3$，$p^{t_4}\mid x_3$，$p^{t_5}\mid x_4$。

由 $t_5\le t_4\le t_3\le t_2\le\min\{t,t_1\}$ 得

$z\in\langle\alpha^{p^{t_2}},\alpha_1{}^{p^{t_2}},\alpha_2{}^{p^{t_3}},\alpha_3{}^{p^{t_4}},\alpha_4{}^{p^{t_5}},\alpha_5\rangle$

即由 z 的任意性可得

$\mathrm{Z}(G)\le\langle\alpha^{p^{t_2}},\alpha_1{}^{p^{t_2}},\alpha_2{}^{p^{t_3}},\alpha_3{}^{p^{t_4}}\ \ ,\alpha_4{}^{p^{t_5}},\alpha_5\rangle$。

又因为

$\langle\alpha^{p^{t_2}},\alpha_1{}^{p^{t_2}},\alpha_2{}^{p^{t_3}},\alpha_3{}^{p^{t_4}},\alpha_4{}^{p^{t_5}},\alpha_5\rangle\le\ Z(G)$，

于是 $\mathrm{Z}(G)=\langle\alpha^{p^{t_2}},\alpha_1{}^{p^{t_2}},\alpha_2{}^{p^{t_3}},\alpha_3{}^{p^{t_4}},\alpha_4{}^{p^{t_5}},\alpha_5\rangle$，从而

$Z(G)=\langle\alpha^{p^{t_2}}\rangle\times\langle\alpha_1{}^{p^{t_2}}\rangle\times\langle\alpha_2{}^{p^{t_3}}\rangle\times\langle\alpha_3{}^{p^{t_4}}\rangle\times$

$\langle\alpha_4{}^{p^{t_5}}\rangle\times\langle\alpha_5\rangle$

所以 $|Z(G)|=p^{t+t_1-t_2}$。

(5) 因为 $Z_2(G)/Z_1(G)=Z(G/Z_1(G))$，所以 $[Z_2(G),G]\subseteq Z_1(G)$。

那么对任意的 $z=\alpha^x\alpha_1{}^{x_1}\alpha_2{}^{x_2}\alpha_3{}^{x_3}\alpha_4{}^{x_4}\alpha_5{}^{x_5}\in Z_2(G)$ 有

$[z,\alpha],[z,\alpha_1],[z,\alpha_2],[z,\alpha_3],[z,\alpha_4],[z,\alpha_5]\in Z(G)$

由此可得

$p^{t_5}\mid x$，$p^{t_5}\mid x_1$，$p^{t_5}\mid x_2$ $p^{t_5}\mid x_3$，$p^{t_5}\mid x_4$，$p^{t_4}\mid x$，$p^{t_4}\mid x_2$， $p^{t_3}\mid x$， $p^{t_3}\mid x_1$，

从而 $z\in\langle\alpha^{p^{t_3}},\alpha_1{}^{p^{t_3}},\ \alpha_2{}^{p^{t_4}},\alpha_3{}^{p^{t_5}},\alpha_4,\alpha_5\rangle$，

由 z 的任意性 $Z_2(G)\le\langle\alpha^{p^{t_3}},\alpha_1{}^{p^{t_3}},\alpha_2{}^{p^{t_4}},\alpha_3{}^{p^{t_5}},\ \ \alpha_4,\alpha_5\rangle$，

因为 $Z_2(G)\ge\langle\alpha^{p^{t_3}},\alpha_1{}^{p^{t_3}},\alpha_2{}^{p^{t_4}},\alpha_3{}^{p^{t_5}},\alpha_4,\alpha_5\rangle$，故

$\mathrm{Z}_2(G)=\langle\alpha^{p^{t_2}},\alpha_1{}^{p^{t_2}},\alpha_2{}^{p^{t_3}},\alpha_3{}^{p^{t_4}},\alpha_4,\alpha_5\rangle$。

所以 $Z_2(G)=\langle\alpha^{p^{t_3}}\rangle\times\langle\alpha_1{}^{p^{t_3}}\rangle\times\langle\alpha_2{}^{p^{t_4}}\rangle\times\langle\alpha_3{}^{p^{t_5}}\rangle\times\langle\alpha_4\rangle\times\langle\alpha_5\rangle$，于是 $|Z_2(G)|=p^{t+t_1+t_2-t_3}$。可求的 $|G/Z_2(G)|=p^{2t_3+t_4+t_5}$。

(6) 因为 $Z_3(G)/Z_2(G)=Z(G/Z_2)$，且有 $[Z_3(G),G]\subseteq Z_2(G)$。

那么对任意的 $z=\alpha^{x}\alpha_1^{x_1}\alpha_2^{x_2}\alpha_3^{x_3}\alpha_4^{x_4}\alpha_5^{x_5}\in Z_3(G)$，由上定理（5）得 $p^{t_4}\mid x_1$，$p^{t_5}\mid x_2$，$p^{t_4}\mid x$，$p^{t_5}\mid x$。

所以 $Z_3(G)=\langle\alpha^{p^{t_4}},\alpha_1^{p^{t_4}},\alpha_2^{p^{t_5}},\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\rangle=\langle\alpha^{p^{t_4}}\rangle\times\langle\alpha_1^{p^{t_4}}\rangle\times\langle\alpha_2^{p^{t_5}}\rangle\times\langle\alpha_3\rangle\times\langle\alpha_4\rangle\times\langle\alpha_5\rangle$

于是 $|Z_3(G)|=p^{t+t_1+t_2+t_3-t_4}$。

同理

$Z_4(G)=\langle\alpha^{p^{t_5}},\alpha_1^{p^{t_5}},\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\rangle$，

$|Z_4(G)|=p^{t+t_1+t_2+t_3+t_4-t_5}$，

$Z_5(G)=\langle\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\ \alpha_5\rangle=G$。

综上可得：$1=Z_0(G)\le Z_1(G)\le Z_2(G)\le Z_3(G)\le Z_4(G)\le Z_0(G)=G$ 是 G 的中心群列。

(7)由引理 1.7 及(1)知，$Z(G)\le\Phi(G)$，故 G 为 PN-群。

(8)若 $t=t_1=t_2=t_3=t_4=t_5=1$，则 $G\cong\Phi_{38}(1^6)$。

定理 3 证明新群 G 为 LA-群

证明**:**令 $R=\mathrm{Inn}(G)A_c(G)$（$A_c(G)$ 为 G 的中心自同构），则易知 R 为 $\mathrm{Aut}(G)$ 的正规 p 子群。即 $R\le Aut(G)$ 于是只需证明 $|R|\ge|G|$，即可知 G 为 LA-群。由引理 1.6 有

$|R|=|\mathrm{Inn}(G)\cdot A_c(G)|=$

$$\frac{|\mathrm{Inn}(G)|\cdot|A_c(G)|}{|\mathrm{Inn}(G)\cap A_c(G)|}=\frac{|G/Z(G)|\cdot|A_c(G)|}{|Z(G/Z(G))|}=\frac{|G/Z(G)|\cdot|A_c(G)|}{|Z_2(G)/Z(G)|}=|A_c(G)|\cdot|G:Z_2(G)|。$$

由定理 2 的(1)知 $G/G'=\langle\alpha G',\alpha_1G'\rangle=\langle\alpha G'\rangle\times\langle\alpha_1G'\rangle$，其不变型为 (t,t_1)。

由定理 2 的（4）知 $|Z_2(G)|=p^{t+t_1+t_2-t_3}$，又 $|G|=p^{t+t_1+t_2+t_3+t_4+t_5}$，所以 $|G/Z_2(G)|=p^{2t_3+t_4+t_5}$，$Z(G)=\langle\alpha^{p^{t_2}},\alpha_1^{p^{t_2}},\alpha_2^{p^{t_3}},\alpha_3^{p^{t_4}},\alpha_4^{p^{t_5}},\alpha_5\rangle=\langle\alpha^{p^{t_2}}\rangle\times\langle\alpha_1^{p^{t_2}}\rangle\times\langle\alpha_2^{p^{t_3}}\rangle\times\langle\alpha_3^{p^{t_4}}\rangle\times\langle\alpha_4^{p^{t_5}}\rangle\times\langle\alpha_5\rangle$

其不变型为 $(t-t_2,t_1-t_2,t_2-t_3,t_3-t_4,t_4-t_5,t_5)$。

由 G/G' 的不变型为 (t,t_1)，根据引理 1.8 将 G 分类讨论，分成两组，情形 1:$t\ge t_1$ 与情形 2：$t\le t_1$。只要证明这两种情况，即证得 G 均为 LA−群。

(A) 证明情形 1 下群 G 为 LA-群：

在 $t\ge t_1$ 的条件下已经有 $t-t_2\ge t_1-t_2$，$t\ge t_1\ge t_5$ 成立，$Z(G)$ 的不变形为 $(t-t_2,t_1-t_2,t_2-t_3,t_3-t_4,t_4-t_5,t_5)$，此时分析 t，t_1，$t-t_2$，t_1-t_2，t_2-t_3，t_3-t_4，t_4-t_5，t_5 的大小关系。

(I)当 $t_1-t_2\ge t_2-t_3$ 时，

(i)$t_1-t_2\ge t_2-t_3\ge t_3-t_4\ge t_4-t_5\ge t_5$ 时，$t-t_2\ge t_1-t_2\ge t_2-t_3\ge t_3-t_4\ge t_4-t_5\ge t_5$。

在计算 a 时分以下二类：

(1)$t_1\ge t-t_2$ 时，

$$\begin{aligned}a=&\min\{t,t-t_2\}+\min\{t,t_1-t_2\}+\\&\min\{t,t_2-t_3\}+\min\{t,t_3-t_4\}+\\&\min\{t,t_4-t_5\}+\min\{t,t_5\}+\min\{t_1,t-t_2\}+\\&\min\{t_1,t_1-t_2\}+\min\{t_1,t_2-t_3\}+\min\{t_1,t_3-t_4\}+\\&\min\{t_1,t_4-t_5\}+\min\{t_1,t_5\}=2(t+t_1-t_2)\end{aligned}$$

因此 $|A_c(G)|=p^a=p^{2(t+t_1-t_2)}$，

$$\begin{aligned}|R|=&|A_c(G)|\cdot|G:Z_2|=p^{2(t+t_1-t_2)}\cdot p^{2t_3+t_4+t_5}=\\&p^{2t+2t_1-2t_2+2t_3+t_4+t_5}=|G|\cdot p^{t+t_1-3t_2+t_3}>|G|\end{aligned}$$

故群 G 为 LA-群。

(2)$t-t_2\ge t_1$ 时，

$a=t+3t_1-t_2$，

故 $|R|=|G|\cdot p^{2t_1-2t_2+t_3}>|G|$，故群 G 为 LA-群。

(ii)同理关于在 $t_1-t_2\ge t_2-t_3$ 下的其它大小关系

$t_1-t_2\ge t_3-t_4\ge t_4-t_5\ge t_2-t_3\ge t_5$；

$t_1-t_2\ge t_3-t_4\ge t_4-t_5\ge t_5\ge t_2-t_3$；

$t_1-t_2\ge t_3-t_4\ge t_2-t_3\ge t_4-t_5\ge t_5$

完全可按(i)中的方式验证 G 是 LA−群。

(II)当 $t-t_2\ge t_2-t_3\ge t_1-t_2$ 时，一共分为五种情况：

(i)$t_2-t_3\ge t_1-t_2\ge t_3-t_4\ge t_4-t_5\ge t_5$ 时，

$t-t_2\ge t_2-t_3\ge t_1-t_2\ge t_3-t_4\ge t_4-t_5\ge t_5$。

在计算 a 时分以下三类：

(1)$t_1\ge t-t_2$ 时，和上(*I*)(*i*)(1)相同，因此 G 为 LA−群。

(2) $t-t_2\ge t_1\ge t_2-t_3$ 时，$a=t+t_1+t_2$，因此 $|R|=|G|\cdot p^{t_3}>|G|$，G 为 LA-群。

(3) $t_2-t_3\ge t_1\ge t_1-t_2$ 时，$a=t+3t_1-t_2$，因此 $|R|=|G|\cdot p^{3t_1-3t_2+2t_3}>|G|$，$G$ 为 LA-群。

(ii) $t_2-t_3\ge t_3-t_4\ge t_4-t_5\ge t_1-t_2\ge t_5$ 时，

$t-t_2\ge t_2-t_3\ge t_3-t_4\ge t_4-t_5\ge t_1-t_2\ge t_5$。

在计算 a 时分以下二类：

(1) $t_4-t_5\ge t_1\ge t_1-t_2$ 时，$a=t+6t_1-2t_2+t_5$，因此 $|R|=|G|\cdot p^{5t_1-3t_2+t_3+t_5}>|G|$，$G$ 为 LA-群。

(2) $t_3-t_4\ge t_1\ge t_4-t_5$ 时，$a=t+5t_1-2t_2+t_4$，因此 $|R|=|G|\cdot p^{4t_1-3t_2+t_3+t_4}>|G|$，$G$ 为 LA-群。

(iii) $t_2-t_3\ge t_3-t_4\ge t_1-t_2\ge t_4-t_5\ge t_5$ 时，

$t-t_2\ge t_2-t_3\ge t_3-t_4\ge t_1-t_2\ge t_4-t_5\ge t_5$。

在计算 a 时分以下二类：

(1) $t_2-t_3\ge t_1\ge t_3-t_4$ 时，$a=t+3t_1-t_2$，故 $|R|=|G|\cdot p^{3t_1-3t_2+2t_3}>|G|$，故群 G 为 LA-群。

(2) $t_3-t_4\ge t_1\ge t_1-t_2$ 时，$a=t+5t_1-2t_2+t_4$，故 $|R|=|G|\cdot p^{4t_1-3t_2+t_3+t_4}>|G|$，故群 G 为 LA-群。

(iv) $t_2-t_3\ge t_3-t_4\ge t_4-t_5\ge t_5\ge t_1-t_2$ 时，$a=t+6t_1-2t_2+t_5$，故 $|R|=|G|\cdot p^{5t_1-3t_2+t_3+t_5}>|G|$，$G$ 为 LA-群。

(B) 证明情形 2: $t\le t_1$ 下群 G 为 LA-群：

情形 2 和情形 1 是完全相同的讨论方法。同理可以得到情形 2 的 G 也都是 LA-群。

综上可知扩展的群：

$$G=\langle \alpha,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5 \mid [\alpha_1,\alpha]=\alpha_2,[\alpha_2,\alpha]=\alpha_3,$$
$$[\alpha_3,\alpha]=\alpha_4,[\alpha_2,\alpha_3]=[\alpha_3,\alpha_1]=[\alpha_4,\alpha_1]=\alpha_5,$$
$$\alpha^{p^t}=\alpha_1^{p^{t_1}}=\alpha_2^{p^{t_2}}=\alpha_3^{p^{t_3}}=\alpha_4^{p^{t_4}}=\alpha_5^{p^{t_5}}=1\rangle$$

是 LA-群。

参考文献：

[1] Ban G N, Zhang J S,Yu S X. The lower bound for the order of the automorphism groups[J].Proc. Roy. Irish Acad. Vol. A, 1996, 96(2): 159-167.

[2] Zhang X Z Wang Y, Ban G N. The Orders of Automorphism Groups of p^6 RankGroups[J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics, 2003, 18(4): 369-377.

[3] Ban G N, Zhang X Z, Wang Y. The orders of automorphism group of p-gr-oups[J]. Journal of Southwest China Normal University:Natural Science, 2005, 30(4): 600-603.

[4] 王勇，班桂宁. 若干家族 p-群的自同构群的阶[J]. 数学进展, 2006, 35(2): 217-222.

[5] Ban G N, Chen L Y, Zhou Y. A new series of LA-groups[J]. Journal of Guangxi Teachers Education University:Natural Science Edition, 2007, 24(4): 5-7.

[6] Rodney J. The groups of order p^6 (p an odd prime)[J]. Math. Comput. 1980, 34: 613 -637.

[7] Flynn J,MacHale D, O' Brien E A, et al. Finite groups whose automorphism groups are 2-groups[J]. Proc Roy Irish Acad Sect A,1944,94(2):137-145.

[8] 徐明曜. 有限群导引(上,下)[M]. 2 版. 北京：科学出版社, 2001.

[9] 俞曙霞，班桂宁. 具有循环中心和小中心商的有限 p-群[J]. 广西大学学报:自然科学版, 1993, 18(3): 15-23.