文章编号：1674-8085（2021）04-0001-04

闭黎曼流形上临界度量的研究

*肖　飞，俞柏慧

（井冈山大学数理学院，江西，吉安 343009）

摘　要：本文研究了闭黎曼流形上的双参数二次曲率泛函的临界度量，利用带 *Yamabe* 常数及曲率的 *pinching* 条件，以及我们证明了一个刚性定理。此外，我们也得到另外一些曲率条件下的刚性结果。

关键词：二次曲率泛函；临界度量；*Yamabe* 常数

中图分类号：O 186.1　　**文献标识码：**A　　DOI:10.3669/j.issn.1674-8085.2021.04.001

CRITICAL POINTS FOR QUADRATIC CURVATURE FUNCTIONAL ON CLOSED MANIFOLDS

*XIAO Fei, YU Bai-hui

(School of Mathmatics Science& Physics, Jinggangshan University, Ji'an, Jiangxi 343009, China)

Abstract: In this paper, the critical metrics for two-parameter quadratic curvature functionals on closed manifolds, and *pinching* conditions with *Yamabe* incariant and curvature were studied. Moreover, the results also provide a few rigidity results that involve the *Weyl* curvature, the trace-less *Ricci* curvature and the *Yamabe* invariant, accordingly.

Key words: quadratic curvature functionals; critical points; *Yamabe* invariant

0　引言和预备知识

最近几年，刚性定理成为微分几何研究的一个热点。研究者一般考虑带有拼挤条件的 *Bach* 平坦黎曼流形[1-2]或者考虑二次曲率泛函的临界点再加 *pinching* 条件[3-6]，也有学者研究最佳拼挤常数得到有趣的结果[7]。受以上文献启发，本文考虑闭流形上的二次曲率泛函：

$$F_{t,s}(g)=\int_M |Ric|^2 \mathrm{d}V_g + t\int_M |R|^2 \mathrm{d}V_g + s\int_M |Rm|^2 \mathrm{d}V_g$$

拼挤条件用到的 *Yamabe* 常数定义如下：

$$Y_M([g])=\inf_{g\in[g]}\frac{\int_M \overline{R}\,\mathrm{d}V_{\overline{g}}}{(\int_M \mathrm{d}V_{\overline{g}})^{\frac{n-2}{n}}}=$$

$$\frac{4(n-1)}{n-2}\inf_{u\in W^{1,2}(M)}\frac{\int_M |\nabla u|^2\mathrm{d}V_g+\frac{n-2}{4(n-1)}\int_M Ru^2\mathrm{d}V_g}{(\int_M |u|^{\frac{2n}{n-2}}\mathrm{d}V_g)^{\frac{n-2}{n}}},$$

根据 *Yamabe* 常数定义，可以得到不等式：

$$\frac{4(n-1)}{n-2}Y_M([g])(\int_M |u|^{\frac{2n}{n-2}}\mathrm{d}V_g)^{\frac{2n}{n-2}}\le$$

$$\int_M |\nabla u|^2\mathrm{d}V_g+\frac{n-2}{4(n-1)}\int_M Ru^2\mathrm{d}V_g$$

收稿日期：2021-04-05；修改日期：2021-05-26

基金项目：国家自然科学基金项目(11761032)；江西省自然科学基金重点项目(20202ACBL211001)；井冈山大学博士科研启动项目（JZB1921）.

作者简介：*肖　飞(1981-)，男,江西吉安人，讲师，博士，主要从事泛函分析、微分几何研究(E-mail: xiaofeishuxue@126.com);

俞柏慧(2001-)，女，江西景德镇人，井冈山大学数理学院数学与应用数学专业 2018 级本科生(E-mail:1697569176@qq.com).

此外，我们知道紧流形上*Yamabe*常数的符号由其度量共形类的数量曲率的符号所决定。

1 主要结论

定理1 令$(M^n,g)(n\geq 3)$是一个具有正数量曲率的闭黎曼流形，$g\in\mu_1(M)$是泛函$F_{t,s}$的临界度量，且满足以下积分不等式：

$$\int_M \left|W+AE\odot g\right|^{\frac{n}{2}}\mathrm{d}V_g)^{\frac{n}{2}}\leq BY_M([g]) \qquad (*)$$

其中$A=\dfrac{4s(n^2-3n+4)+4(n-2)}{2(n-2)^2+4ns}\dfrac{1}{\sqrt{2n}}$，

$$B=\frac{(n-2)\sqrt{n-2}}{2\sqrt{2(n-1)}}\frac{1+4s}{2(n-2)+4ns},$$

则当$t<0$，且t,s满足：

$$\begin{cases}1+2t+2s<0;\\ s<0;\\ 1+4s>0;\\ 1+4t-\dfrac{4}{11}s<0.\end{cases}$$

当$t>0$，且t,s满足：

$$\begin{cases}1+2t+2s<0;\\ s<0;\\ 1+4s>0;\\ 1+8t-\dfrac{4}{11}s<0.\end{cases}$$

则(M^n,g)是一个*Einstein*流形。

推论1 若(M^n,g) $(n\geq 3)$局部共形平坦且满足定理1条件，则(M^n,g) $(n\geq 3)$具有常正截面曲率。

推论2 若(M^4,g)是闭黎曼流形，度量g是泛函$F_{t,s}$的临界度量，如果

$$\int_M(|W|^2+\frac{5}{4}|E|^2)\mathrm{d}V_g\leq\frac{1}{48}\int_M R^2\mathrm{d}V_g$$

则(M^4,g)是一个*Einstein*流形。

推论3 若(M^4,g)是闭黎曼流形，度量g是泛函$F_{t,s}$的临界度量，如果

$$\frac{13}{8}\int_M(|W|^2\mathrm{d}V_g+\frac{1}{12}\int_M R^2\mathrm{d}V_g\leq 20\pi^2\chi(M)$$

其中$\chi(M)$为*Euler-Poincare*示性数，则(M^4,g)是一个*Einstein*流形。

2 证明

根据拉格朗日乘数法，$g\in\mu_1(M)$是泛函$F_{t,s}$的临界点，当且仅当$\nabla F=\lambda g$，因此有：

引理1[8] 若$(M^n,g)(n\geq 3)$是闭流形，$g\in\mu_1(M)$是泛函$F_{t,s}$的临界度量，当且仅当以下两个方程成立：

$$\Delta(1+4s)E_{ij}=(1+2t+2s)R_{,ij}-\frac{1+2t+2s}{n}(\Delta R)g_{ij}-$$
$$2(1+2s)R_{ikjl}E_{kl}-\frac{2+2nt-4s}{n}RE_{ij}+$$
$$\frac{2}{n}(|E|^2+s|Rm|^2)g_{ij}-2sR_{ikpq}R_{ikpq}+4sE_{ik}E_{jk}$$
$$(n+4(n-1)t+4s)\Delta R=$$
$$(n-4)(|Ric|^2+tR^2+s|Rm|^2-\lambda)$$

其中λ为常数。

对引理1的第一个方程积分，可以得到：

引理2 若$(M^n,g)(n\geq 3)$是闭流形，$g\in\mu_1(M)$是泛函$F_{t,s}$的临界度量，当且仅当以下方程成立：

$$(1+4s)\int_M|\nabla E_{ij}|^2\mathrm{d}V_g=\int_M\frac{(n-2)(1+2t+2s)}{2n}|\nabla R|^2\mathrm{d}V_g+$$
$$\int_M(\frac{2(n-2)+4ns}{n-2}W_{ikjl}E_{kl}E_{ij}+2sW_{ikpq}W_{jkpq}E_{ij})\mathrm{d}V_g-$$
$$\int_M\frac{4s(n^2-3n+4)+4(n-2)}{(n-2)^2}E_{ik}E_{jk}E_{ij}\mathrm{d}V_g-$$
$$\int_M\frac{4-2n-2n(n-1)t+4(n-2)s}{n(n-1)}R|E_{ij}|^2\mathrm{d}V_g$$

引理3[9] 若(M^n,g)是黎曼流形，λ是任意实数，则以下不等式成立：

$$|-W_{ijkd}E_{kd}E_{ij}+\lambda E_{ij}E_{jk}E_{kd}|\leq$$
$$\sqrt{\frac{n-2}{2(n-1)}}(|W|^2+\frac{2(n-2)\lambda^2}{n}|E|^2)^{\frac{1}{2}}|E|^2=$$
$$\sqrt{\frac{n-2}{2(n-1)}}\left|W+\frac{\lambda}{\sqrt{2n}}E\odot g\right||E|^2$$

引理4[10] 若(M^4,g)是一个闭黎曼流形，则

$Y_M^2([g]) \geq \int_M (R^2 - 12|E|^2)\mathrm{d}V_g$，且等号成立当且仅当$(M^4, g)$共形于一个 *Einstein* 流形。

定理 1 的证明：由引理 2 有

$$\int_M |\nabla E|^2 \mathrm{d}V_g = -\int_M (\frac{(n-2)(1+2t+2s)}{2n(1+4s)}|\nabla R|^2 + \frac{2(n-2)+4ns}{(n-2)(1+4s)}W_{ikjl}E_{kl}E_{lj})\mathrm{d}V_g + \int_M (\frac{2s}{1+4s}W_{ikpq}W_{jkpq}E_{ij} - \frac{4s(n^2-3n+4)+4(n-2)}{(n-2)^2(1+4s)}E_{ik}E_{jk}E_{ij})\mathrm{d}V_g - \int_M \frac{4-2n-2n(n-1)t+4(n-2)s}{n(n-1)(1+4s)}R|E_{ij}|^2\mathrm{d}V_g$$

再根据 *Yamabe* 常数的定义，有

$$\frac{n-2}{4(n-1)}Y_M([g])(\int_M |E_{ij}|^{\frac{2n}{n-2}}\mathrm{d}V_g)^{\frac{n-2}{n}} \leq \int_M (\frac{(n-2)(1+2t+2s)}{2n(1+4s)}|\nabla R|^2 + \frac{2(n-2)+4ns)}{(n-2)(1+4s)}W_{ikjl}W_{kl}E_{ij})\mathrm{d}V_g + \int_M (\frac{2s}{1+4s}W_{ijpq}W_{jkpq}E_{ij} - \frac{4s(n^2-3n+4)+4(n-2)}{(n-2)^2(1+4s)}E_{ik}E_{jk}E_{ij})\mathrm{d}V_g - \int_M \frac{n-2}{4(n-1)}R|E_{ij}|^2\mathrm{d}V_g =$$

$$\int_M (\frac{(n-2)(1+2t+2s)}{2n(1+4s)}|\nabla R|^2 + \frac{2(n-2)+4ns)}{(n-2)(1+4s)}W_{ikjl}E_{kl}E_{ij})\mathrm{d}V_g + \int_M (\frac{2s}{1+4s}W_{ikpq}W_{jkpq}E_{ij} - \frac{4s(n^2-3n+4)+4(n-2)}{(n-2)^2(1+4s)}E_{ik}E_{jk}E_{ij})\mathrm{d}V_g - \int_M \frac{8n(n-1)t+(n-2)(n+4ns-16s+8)}{4(n-1)(1-4s)}R|E_{ij}|^2\mathrm{d}V_g =$$

$$\int_M (\frac{2(n-2)+4ns}{(n-2)(1+4s)}W_{ikjl}E_{kl}E_{ij} + \frac{4s(n^2-3n+4)+4(n-2)}{(n-2)^2(1+4s)}E_{ik}E_{jk}E_{ij})\mathrm{d}V_g + \int_M \frac{(n-2)(1+2t+2s)}{2n(1+4s)}|\nabla R|^2\mathrm{d}V_g + \int_M \frac{8n(n-1)t+(n-2(n+4ns-16s+8)}{4(n-g)(1+4s)}R|E_{ij}|^2\mathrm{d}V_g \leq$$

$$\int_M (\frac{2(n-2)+4ns}{(n-2)(1+4s)}\Big| - W_{ikjl}E_{kl}E_{ij} + \frac{4s(n^2-3n+4)+4(n-2)}{2(n-2)^2+4ns(n-2)}E_{ik}E_{jk}E_{ij})\Big|\mathrm{d}V_g + \int_M (\frac{(n-2)(1+2t+2s)}{2n(1+4s)}|\nabla R|^2\mathrm{d}V_g + \frac{2s}{1+4s}W_{ikpq}W_{jkpq}E_{ij})\mathrm{d}V_g + \int_M \frac{8n(n-1)t+(n-2)(n+4ns-16s+8)}{4(n-1)(1+4s)}R|E_{ij}|^2\mathrm{d}V_g \leq$$

$$\frac{2(n-2)+4ns}{(n-2)(1+4s)}\sqrt{\frac{n-2}{2(n-1)}} \int_M \Big|W + \frac{4s(n^2-3n+4)+4(n-2)}{2(n-2)^2+4ns(n-2)}\frac{1}{\sqrt{2n}}E \odot \mathrm{g}\Big| |E|^2\mathrm{d}V_g + \int_M \frac{(n-2)(1+2t+2s)}{2n(1+4s)}|\nabla R|^2\mathrm{d}V_g + \frac{2s}{1+4s}\sqrt{\frac{n\text{-}1}{n}}\int_M |\mathrm{W}|^2|E|\mathrm{d}V_g + \int_M \frac{8n\ (n-1)t+(n-2)(n+4ns-16s+8)}{4(n-1)(1+4s)}R|E_{ij}|^2\mathrm{d}V_g$$

再根据*Holder*不等式，上式有

$$\leq \int_M \frac{2(n-2)+4ns}{(n-2)(1+4s)}\sqrt{\frac{n-2}{2(n-1)}} \int_M \Big|W + \frac{4s(n^2-3n+4)+4(n-2)}{2(n-2)^2+4ns(n-2)}\frac{1}{\sqrt{2n}}E \odot g\Big|^{\frac{n}{2}}\mathrm{d}V_g \times (\int_M |E|^{\frac{2n}{n-2}}\mathrm{d}V_g)^{\frac{n-2}{n}} + \int_M \frac{(n-2)(1+2t+2s)}{2n(1+4s)}|\nabla R|^2\mathrm{d}V_g + \frac{2s}{1+4s}\sqrt{\frac{n-1}{n}}\int_M |W|^2|E|\mathrm{d}V_g +$$

$$\int_M \frac{8n(n-1)t+(n-2)(n+4ns-16s+8)}{4(n-1)(1+4s)} R\left|E_{ij}\right|^2 \mathrm{d}V_g$$

因此，有

$$[\frac{n-2}{4(n-1)} Y_M([g]) - \frac{2(n-2)+4ns}{(n-2)(1+4s)} \sqrt{\frac{n-2}{2(n-1)}} \times$$

$$\int_M \left| W + \frac{4s(n^2-3n+4)+4(n-2)}{2(n-2)^2+4ns(n-2)} \frac{1}{\sqrt{2n}} E \odot g \right|^{\frac{n}{2}} \mathrm{d}V_g]$$

$$(\int_M |E|^{\frac{2n`}{n-2}} \mathrm{d}V_g)^{\frac{n-2}{n}} \le$$

$$\int_M \frac{(n-2)(1+2t+2s)}{2n(1+4s)} |\nabla R|^2 \mathrm{d}V_g +$$

$$\frac{2s}{1+4s} \sqrt{\frac{n-1}{n}} \int_M |W|^2 |E| \mathrm{d}V_g +$$

$$\int_M \frac{8n(n-1)t+(n-2)(n+4ns-16s+8)}{4(n-1)(1+4s)} R\left|E_{ij}\right|^2 \mathrm{d}V_g$$

如果 t,s 满足定理 1 条件，则

当 $t<0$ 时，

$$1+\frac{8n(n-1)}{(n-2)(n+8)} t + 4\frac{n-4}{n+8} s < 1+4t-\frac{4}{11} s < 0$$

当 $t>0$ 时，

$$1+\frac{8n(n-1)}{(n-2)(n+8)} t + 4\frac{n-4}{n+8} s < 1+8t-\frac{4}{11} s < 0$$

因此，如果满足条件

$$(\int_M |W + AE \odot g|^{\frac{n}{2}} \mathrm{d}V_g)^{\frac{2}{n}} \le BY_M([g])$$

则 $E=0$，因此 (M^n, g) 是 *Einstein* 流形。

推论 2 的证明：当 $n=4$ 时，定理 1 中 $A=\frac{1}{2\sqrt{2}}$，$B=\frac{1}{4\sqrt{3}}$，$(*)$ 式成为

$$(\int_M \left| W + \frac{1}{2\sqrt{2}} E \odot g \right|^2 \mathrm{d}V_g)^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{4\sqrt{3}} Y_M([g])$$

因此有

$$\int_M (|W|^2 + |E|^2) dV_g \le \frac{1}{48} Y_M^2([g])$$

$$\int_M (|W|^2 + |E|^2) dV_g - \frac{1}{48} Y_M^2([g]) \le$$

$$\int_M (|W|^2 + \frac{5}{4}|E|^2 - \frac{1}{48} R^2) \mathrm{d}V_g \le 0$$

由定理 1 立即得到推论 2。

推论 3 的证明：根据 *Gauss – Bonnet – Chern* 公式

$$\int_M (|W|^2 - 2|E|^2 + \frac{1}{6} R^2) \mathrm{d}V_g = 32\pi^2 \chi(M),$$

可得

$$\int_M (|W|^2 - \frac{5}{4}|E|^2) \mathrm{d}V_g = \frac{13}{8} \int_M |W|^2 \mathrm{d}V_g +$$

$$\frac{5}{48} \int_M R^2 \mathrm{d}V_g - 20\pi^2 \chi(M) \le \frac{1}{48} \int_M R^2 \mathrm{d}V_g$$

由推论 2 可得推论 3。

参考文献：

[1] Fu H P, Xiao L Q. Einstein manifolds with finite L^P -norm of the Weyl curvature[J]. Differ. Geom. Appl., 2017,53: 293-305.

[2] Kim S. Rigidity of noncompact complete manifolds with harmonic curvature[J]. Manuscripta Mathematica, 2011, 135(1): 107-116.

[3] Huang G. Some Rigidity characterizations on critical metrics for quadratic curvature functions[J]. Analysis and Mathemtical Physics , 2020(12):355-360.

[4] Ma B. Huang G. Chen Y. Rigidity of Einstein metrics as critical points of quadratic curvature functions on closed manifolds[J]. Nonlinear Anal, 2018(5):237-248.

[5] Anderson M. Extrema of curvature functionals on the space of metrics on 3-manifolds[J]. Calc. Var. Partial Differential Equations, 1997(5): 199-269.

[6] Gurskym M. Viaclovsky J. Ridigity and stability of Einstein metrics for quadratic curvature functions[J].J. Reine Angew. Math. , 2015(700): 37-91.

[7] Fu H P, Peng J K. Conformally flat Riemannian manifolds with finite L^P -norm curvature[J]. Annali di Matematica Pura ed Applicata , 2017: 1-10.

[8] Catino G. Some rigidity results on critical metrics for quadratic functionals[J]. Calc. Var. Partial Differential Equations, 2015,54(3):2921-2937.

[9] Catino G. Integral pinched shrinking Ricci solitons[J]. Adv. Math. , 2016(303) :279-294.

[10] Besse A. Einstein Manifolds[M].Berlin: Springer-Verlag, 2009.