第 14 卷　第 20 期　2014 年 7 月
1671—1815(2014)20-0001-05
科　学　技　术　与　工　程
Science Technology and Engineering
Vol. 14　No. 20　Jul. 2014
© 2014　Sci. Tech. Engrg.

力学

功能梯度材料梁的非线性研究

张　驰　于　耕　张　硕
(沈阳航空航天大学民用航空学院,沈阳 110036)

摘　要　研究了热/机械载荷作用下几何非线性对功能梯度材料梁的位移及应力的影响。首先根据一阶剪切变形梁理论推导了机械载荷条件下功能梯度材料梁位移和应力的平衡方程,热载荷条件通过求解一维热传导方程即可获得;然后采用解析法和摄动技术两种方法对平衡方程求解,并利用非线性应变－位移关系分析非线性对位移和应力的影响;最后引入算例采用不同方法计算功能梯度材料梁的位移及应力并对比分析。数值计算结果表明,几何非线性对梁的位移和应力的影响是显著的,材料常数和边界条件对梁的非线性弯曲也有一定的影响。这种求解非线性平衡方程解析解的新方法对高阶剪切变形和层理论有一定的指导意义。

关键词　功能梯度梁　非线性分析　解析解　热机械载荷　摄动技术　剪切变形
中图法分类号　O302　TB333;　　**文献标志码**　A

随着现代科学技术的不断进步和发展,材料的属性和功能需求呈现多样化,而传统材料在一些极端的环境条件下(如超高温)可能无法满足工况使用要求。功能梯度材料是一种新型复合材料,通常由陶瓷和金属两种不同性能的材料组成,通过连续平滑的改变两种材料的组织和结构,使其结合部位的界面消失,而其机械性能从一面到另一面是平滑连续的,与经典的层状结构复合材料相比,在一定的载荷环境条件下功能梯度材料的机械性能表现更好[1,2];在传热方面,由于陶瓷具有低传热系数可用于抵抗高温,金属则由于其良好的延展性能够防止因短时间温度剧变产生的应力而导致的断裂破坏[3,4]。同时,功能梯度材料可以提高蠕变性能、机械工具的断裂韧度、耐磨性以及高温环境的抗氧化性等[5—8],因此这种材料在很多工程领域得到广泛应用。

关于功能梯度材料梁或板的热机械性能方面的研究也得到了很多学者的积极关注,吴晓,等[9]推导了功能梯度材料板在均匀温度场的非线性振动及屈曲微分方程并求得了近似解;顾勇军[10]研究了热环境中弹性功能梯度圆柱薄壳分岔屈曲的边界约束效应问题;Carlos 等[11]利用拉格朗日公式对功能梯度材料梁的几何非线性进行了分析,但从目前的文献资料中很难找到非线性问题对求解功能梯度材料梁平衡方程精确解的影响分析。鉴于此,首先采用一阶剪切变形梁理论分析功能梯度材料梁的位移及应力,然后对方程进行求解并利用非线性应变-位移关系分析几何非线性对梁的位移及应力的影响,同时用摄动方法获得平衡方程的解,并在不同的载荷和边界条件下对这两种方法获得的解进行比较,以证明上述几何非线性对功能梯度材料梁的变形位移和应力的影响分析是否正确。

1　梁变形理论的数学推导

考虑某功能梯度材料梁,其长度为 L,宽度为 b,厚度为 h。梁的底面($z=-h/2$)承受一横向载荷,假定功能梯度材料梁的属性按照结构组分材料的体积分数沿 z 方向以幂函数形式分布。

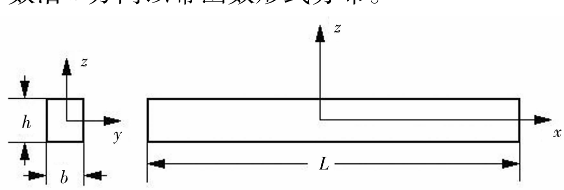

图 1　功能梯度材料梁的几何示意图
Fig. 1　The schematic diagram of the FGM beam geometry

若考虑梁承受温度载荷,则假定温度的变化同样也只沿厚度方向,热传导方向同样沿梁的厚度方向,边界条件为 $z=h/2$ 处 $T=T_c$,在 $z=-h/2$ 处 $T=T_m$。对于热载荷状况下几何非线性对功能梯度材料梁的位移及应力的影响分析通过求解一个简单的稳态热传导方程即可实现[12]。

这里采用一阶剪切变形板理论来推导一阶剪切

2014 年 3 月 5 日收到
第一作者简介:张　驰(1981—),讲师,硕士。研究方向:航空材料力学特性分析。E-mail:feixingjishu@126.com。

变形梁理论,假定位移场为:

$$\begin{cases} u(x,y,z) = u_0(x,y) + z\psi_y(x,y) \\ v(x,y,z) = v_0(x,y) + z\psi_x(x,y) \\ w(x,y,z) = w(x,y) \end{cases} \tag{1}$$

式(1)中 u_0、v_0 及 w 表示板中截面上的点的位移,ψ_x 及 ψ_y 分别表示绕 y 轴和 x 轴的截面旋转量的未知函数。为了研究几何非线性对输出响应的影响,在处理应变-位移关系时考虑冯卡曼几何非线性理论。将方程(1)代入应力-应变关系中结果为

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z\kappa_x,\ \varepsilon_y = \varepsilon_y^0 + z\kappa_y,\ \varepsilon_z = 0 \\ \gamma_{yz} = \gamma_{yz}^0,\ \gamma_{xz} = \gamma_{xz}^0,\ \gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy} \end{cases} \tag{2}$$

式(2)中

$$\begin{cases} \varepsilon_x^0 = u_{0,x} + (w_x)^2/2,\ \kappa_x = \psi_{x,x} \\ \varepsilon_y^0 = u_{0,y} + (w_y)^2/2, \kappa_y = \psi_{y,y} \\ \gamma_{yz}^0 = \psi_y + w_y,\ \gamma_{yz}^0 = \psi_x + w_x \\ \gamma_{xy}^0 = u_{0,y} + v_{0,x} + w_x w_y,\ \kappa_{xy} = \psi_{x,y} + \psi_{y,x} \end{cases} \tag{3}$$

根据最小势能原理[13],平衡方程可以表达为

$$\begin{cases} N_{x,x} + N_{xy,y} = 0,\ N_{xy,x} + N_{y,y} = 0 \\ M_{x,x} + M_{xy,y} - Q_x = 0,\ M_{xy,x} + M_{y,y} - Q_y = 0 \\ Q_{x,x} + Q_{y,y} + N(w) + q(x,y) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

式(4)中

$$N(w) = (N_x w_x + N_{xy} w_y)_x + (N_{xy} w_x + N_y w_y)_y \tag{5}$$

而 $q(x,y)$ 是施加在板底面的横向载荷。同样的力和力矩定义如下

$$\begin{cases} (N_x, N_y, N_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy})\,\mathrm{d}z \\ (M_x, M_y, M_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) z\,\mathrm{d}z \\ (Q_x, Q_y) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xz}, \sigma_{yz})\,\mathrm{d}z \end{cases} \tag{6}$$

线性本构关系[14]为

$$\begin{cases} \sigma_x = Q_{11}(\varepsilon_x - \alpha\Delta T) + Q_{12}(\varepsilon_y - \alpha\Delta T) \\ \sigma_y = Q_{12}(\varepsilon_x - \alpha\Delta T) + Q_{22}(\varepsilon_y - \alpha\Delta T) \\ \sigma_{yz} = Q_{44}\gamma_{yz}, \sigma_{xz} = Q_{55}\gamma_{xz}, \sigma_{xy} = Q_{66}\gamma_{xy} \end{cases} \tag{7}$$

将式(7)代入式(6),则力和力矩可通过如下方式表达

$$\begin{cases} N_x = A_{11}\varepsilon_x^0 + A_{12}\varepsilon_y^0 + B_{11}\kappa_x + B_{12}k_y - N_x^{\mathrm{T}} \\ N_y = A_{12}\varepsilon_x^0 + A_{22}\varepsilon_y^0 + B_{12}\kappa_x + B_{22}k_y - N_y^{\mathrm{T}} \\ M_x = B_{11}\varepsilon_x^0 + B_{12}\varepsilon_y^0 + D_{11}\kappa_x + D_{12}k_y - M_x^{\mathrm{T}} \\ M_y = B_{12}\varepsilon_x^0 + B_{22}\varepsilon_y^0 + D_{12}\kappa_x + D_{22}k_y - M_y^{\mathrm{T}} \end{cases} \tag{8a}$$

$$N_{xy} = A_{66}\gamma_{xy}^0 + B_{66}k_{xy},\ M_{xy} = B_{66}\gamma_{xy}^0 + D_{66}k_{xy} \tag{8b}$$

$$Q_y = k^2 A_{44}\gamma_{yz}^0,\ Q_x = k^2 A_{55}\gamma_{xz}^0 \tag{8c}$$

式中

$$\begin{cases} (A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z, z^2)\,\mathrm{d}z \\ (N_x^{\mathrm{T}}, M_x^{\mathrm{T}}) = \int_{-h/2}^{h/2} (Q_{11} + Q_{12})\alpha\Delta T(1, z)\,\mathrm{d}z \\ (N_y^{\mathrm{T}}, M_y^{\mathrm{T}}) = \int_{-h/2}^{h/2} (Q_{12} + Q_{22})\alpha\Delta T(1, z)\,\mathrm{d}z \end{cases} \tag{9}$$

式(9)中 k^2 为剪切校正因子。

为了推导出一阶剪切变形梁理论,假定 $N_y = M_y = 0$。将此假设引入式(8a)中可得

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{B}_{11} \\ \bar{B}_{11} & \bar{D}_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ k_x \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \bar{N}_x^{\mathrm{T}} \\ \bar{M}_x^{\mathrm{T}} \end{Bmatrix} \tag{10}$$

式(10)中

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{B}_{11} \\ \bar{B}_{11} & \bar{D}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} \\ B_{11} & D_{11} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{12} & B_{12} \\ B_{12} & D_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{22} & B_{22} \\ B_{22} & D_{22} \end{bmatrix}^{-1} \times$$

$$\begin{bmatrix} A_{12} & B_{12} \\ B_{12} & D_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{N}_x^{\mathrm{T}} \\ \bar{M}_x^{\mathrm{T}} \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} A_{12} & B_{12} \\ B_{12} & D_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{22} & B_{22} \\ B_{22} & D_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{Bmatrix} N_y^{\mathrm{T}} \\ M_y^{\mathrm{T}} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N_x^{\mathrm{T}} \\ M_x^{\mathrm{T}} \end{Bmatrix} \tag{11}$$

又假定所有的力及力矩都仅是关于坐标 x 的函数。因此,方程(4)可以简化如下

$$\frac{\mathrm{d}N_x}{\mathrm{d}x} = 0,\ \frac{\mathrm{d}N_{xy}}{\mathrm{d}x} = 0,\ \frac{\mathrm{d}M_x}{\mathrm{d}x} - Q_x = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}M_{xy}}{\mathrm{d}x} - Q_y = 0,\ \frac{\mathrm{d}Q_x}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(N_x \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right) + q(x) = 0 \tag{12}$$

式(12) $q(x)$ 是指施加在梁底面的横向载荷。

2 求解方法

针对上述梁底面受均匀横向载荷或热载荷的情况,推导其精确解及扰动解。

为得到方程(12)的精确解,假定在 $x = \pm L/2$ 处的边界条件相同,对式(11)中第一个方程进行关于 x 的积分可得

$$\varepsilon_x^0 = (\bar{N}_x^{\mathrm{T}} + N_x^0 - \bar{B}_{11}k_x)/\bar{A}_{11} \tag{13}$$

式(13)中 N_x^0 是积分常数。将式(13)、式(3)及式(8),以及 $\partial/\partial y = 0$ 代入式(12)可得

$$u_0' + (w')^2/2 = (\bar{N}_x^{\mathrm{T}} + N_x^0 - \bar{B}_{11}\psi_x')/\bar{A}_{11} \quad (14a)$$

$$A_{66}v_0'' + B_{66}\psi_y'' = 0 \quad (14b)$$

$$\left(\bar{D}_{11} - \frac{\bar{B}_{11}^2}{\bar{A}_{11}}\right)\psi_x'' - k^2A_{55}(\psi_x + w') = \frac{\mathrm{d}\bar{M}_x^{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}x} - \frac{\bar{B}_{11}}{\bar{A}_{11}}\frac{\mathrm{d}\bar{N}_x^{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}x} \quad (14c)$$

$$B_{66}v_0'' + D_{66}\psi_y - k^2A_{44}\psi_y = 0 \quad (14d)$$

$$k^2A_{55}(\psi_x' + w'') + N_x^0 w'' = -q(x) \quad (14e)$$

式(14a)~式(14e)是五个普通的常系数线性微分方程,其中式(14b)和式(14d)只是都关于 v_0 和 ψ_y 的齐次方程。由于其边界条件是齐次的且变量只有 v_0 和 y_y,式(14b)和式(14d)的解很容易获得,其余方程可以根据边界条件(两端简支或两端固支)来确定未知常数项 N_x^0 进而求其解析解。求得方程组式(14a)~式(14e)的各解后再需一个条件就可以得到最终解,例如假设 $x = \pm L/2$ 处 $u_0 = 0$,就可以获得 N_x^0。首先对式(14a)从 0 到 $L/2$ 进行积分如下。

$$u_0(L/2) = u_0(0) - \int_0^{L/2}[\bar{B}_{11}\psi_x'/\bar{A}_{11} + (w')^2/2]\mathrm{d}x + N_x^0 L/2\bar{A}_{11} \quad (15)$$

显然,由于对称性有 $u_0(0) = 0$,因此可得

$$\int_0^{L/2}[(\bar{N}_x^{\mathrm{T}} - \bar{B}_{11}\psi_x')/\bar{A}_{11} - (w')^2/2]\mathrm{d}x = -N_x^0 L/2\bar{A}_{11} \quad (16)$$

最后,通过将式(14a),式(14c)和式(14e)中的解代入式(16)进行验算,可以得到 N_x^0 的精确值。

然后再采用 $L-P$ 法摄动技术[15]求解三个耦合非线性常微分方程。定义 $w(0) = w_0$,未知变量表达如下

$$u_0(x) = u_1(x)w_0 + u_2(x)w_0^2 + u_3(x)w_0^3 + \cdots \quad (17a)$$

$$\psi_x(x) = \psi_{x1}(x)w_0 + \psi_{x2}(x)w_0^2 + \psi_{x3}(x)w_0^3 + \cdots \quad (17b)$$

$$w(x) = w_1(x)w_0 + w_2(x)w_0^2 + w_3(x)w_0^3 + \cdots \quad (17c)$$

$$C_i = C_{i1}w_0 + C_{i2}w_0^2 + C_{i3}w_0^3 + \cdots, i = 1,2,\cdots,6 \quad (17d)$$

式中未知参数 w_0 将在最后求得。下一步,在机械载荷(此时热载荷 $\Delta T = 0$)作用下,令

$$q(x) = q_0 = q_1w_0 + q_2w_0^2 + q_3w_0^3 + \cdots \quad (18)$$

在热载荷(此时机械载荷 $q(x) = 0$)作用下,假定梁的上表面温度为 ΔT,令

$$\Delta T = \Delta T_0 = \Delta T_1w_0 + \Delta T_2w_0^2 + \Delta T_3w_0^3 + \cdots \quad (19)$$

式(19)中 $\Delta T_0 = 300$ ℃,所有的 q_i 及 ΔT_i 是一些未知常数,可以通过其他的边界条件加以确定。从 $w(0) = w_0$ 以及式(17c)可以得到

$$w_1(0) = 1,\ w_i(0) = 0;i = 2,3,\cdots \quad (20)$$

将式(17)和式(18)(或式(19))代入平衡方程中,可以得到一个耦合线性常微分方程的无限集,其解很容易求得。常数 q_i 或 ΔT_i 可以通过将已知条件代入式(20)而获得。最后 w_0 通过对多项式(18)[或式(19)]进行数值求解而获得。

3　算例及分析

根据上述理论推导,研究一两端夹紧功能梯度材料梁的位移和应力情况。假设功能梯度梁的底面为金属铝,顶面为陶瓷材料氧化锆。为简化运算,假设梁仅受均匀横向载荷且长宽比为 $L/h = 15$。相关材料的力学属性如表 1 所示。

数值分析中采用的无量纲参数如表 2 所示。

表 1　功能梯度材料梁组分材料的力学属性

Table 1　The mechanical properties of constituent materials in FG beams

弹性模量	泊松比
$E_{\mathrm{m}} = 70$ GPa	$\nu_{\mathrm{m}} = 0.3$
$E_{\mathrm{c}} = 151$ GPa	$\nu_{\mathrm{c}} = 0.3$

其中 m 和 c 分别表示金属材料(即铝)和陶瓷材料(即氧化锆)。

表 2　相关无量纲参数

Table 2　The non-dimensionalized parameters

无量纲参数	计算公式
长度	$\bar{x} = x/L$
挠度	$\bar{w} = w/h$
纵向应力	$\bar{\sigma}_x = (\sigma_x h/q_0 L)$
载荷参数	$\bar{q} = (q_0L^4/E_{\mathrm{m}}h^4)$

其中 q_0 表示梁所受的均匀横向载荷强度。为了简化计算在数值分析中取功能梯度材料梁的幂指数 $n = 3$。

根据上述理论推导及求解方法,编写 MATLAB 程序,对梁的挠度变化和应力变化进行了分析和计算,计算结果典型列举如图 1 和图 2 所示。

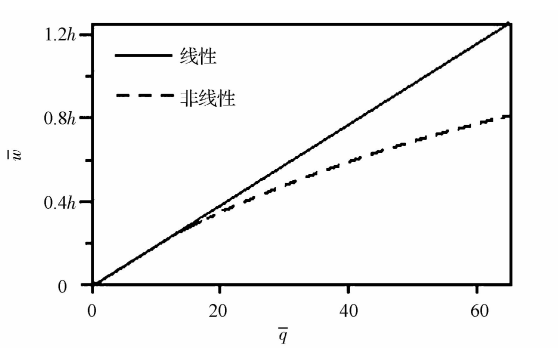

图 2　功能梯度材料梁中点挠度的变化

Fig. 2　Variation of center deflection of the FG beam

图 2 所示为梁的中点挠度随载荷参数 $\bar{q}$ 的变化规律,从图中看出当最大挠度小于 0.3 h 时,线性解

与非线性解几乎是重合的；而当最大挠度大于 0.3h 时，线性解与非线性解开始背离，并且随着载荷强度 $\bar{q}$ 的增大而增大，这时说明几何非线性对挠度计算结果的影响较大，因此要获得准确的计算结果需要考虑非线性因素。

图 3 表示采用不同方法计算所得的梁底面的纵向应力 $\bar{\sigma}_x$ 的变化。从图中可以看出考虑非线性影响的解析解与采用摄动技术所得结果吻合良好，而线性解与这两者的差异较大，这说明非线性因素对应力计算的影响较大。

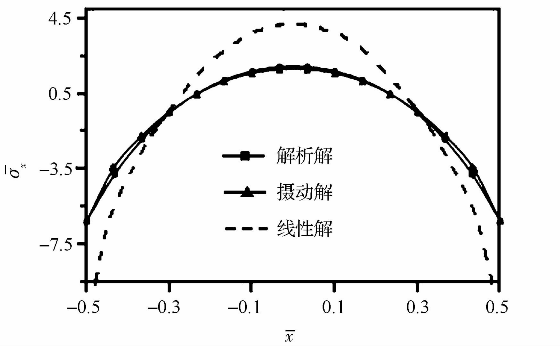

图 3 功能梯度梁底面纵向应力的变化

Fig. 3 Variation of $\bar{\sigma}_x$ along the bottom surface of the FG beam

同时从这两图中明显看出在非线性分析中最大挠度和正应力的数值均比线性分析中所得的数值小。

4 结论

在底面横向载荷或热载荷条件下，假定材料属性根据组分材料的体积分数按幂函数形势变化，首先采用一阶剪切变形梁理论，推导了功能梯度材料梁位移和应力变化的平衡方程(温度沿梁厚度方向的分布通过求解一维热传导方程获得)并求解。然后应用非线性应变-位移关系分析了几何非线性对位移和应力的影响。最后将理论推导进行了程序编写，引入功能梯度材料梁的算例进行分析求解，并采用摄动技术证明了所得解析解的准确性。从研究结果来看非线性问题对梁的位移和应力的影响较大，同时材料常数 n 及边界条件也是梁的非线性弯曲的影响因素之一。

这种方法从理论角度对功能梯度材料梁受非线性的影响进行了阐述，为高阶剪切变形及层理论的深入研究提供了理论基础，但是目前此法仅限用于相同边界条件的梁，而对任意边界条件梁的求解需要进一步深入探讨。

参 考 文 献

1 康颖安. 功能梯度梁的静动态力学行为分析. 长沙：中南大学，2012

Kang Y A. Static/dynamic mechanical behavior analysis of functionally graded beams. Changsha：Central South University，2012

2 仲 政，吴林志，陈伟球. 功能梯度材料与结构的若干力学问题研究进展. 力学进展，2010；40(5)：528—541

Zhong Z，Wu L Z，Chen W Q. Progress in the study on mechanics problems of functionally graded materials and structures. Advances in Mechanics，2010；40(5)：528—541

3 Pradyumna S，Nanda N，Bandyopadhyay J N. Geometrically nonlinear transient analysis of functionally graded shell panels using a higher-order finite element formulation. Journal of Mechanical Engineering Research，2010；2(2)：39—51

4 Talha M，Singh B N. Nonlinear mechanical bending of functionally graded material plates under transverse loads with various boundary conditions. International Journal of Modeling，Simulation，and Scientific Computing，2011；2(2)：237—258

5 Barbosa J A T，Ferreira A J M. Geometrically nonlinear analysis of functionally graded plates and shells. Mechanics of Advanced Materials and Structures，2009；17(1)：40—48

6 Arefi M. Nonlinear thermoelastic analysis of thick-walled functionally graded piezoelectric cylinder. Acta Mechanica，2013；224(11)：2771—2783

7 Jam J E，Maleki S，Andakhshideh A. Non-linear bending analysis of moderately thick functionally graded plates using generalized differential quadrature method. International Journal of Aerospace Sciences，2012；1(3)：49—56

8 Hao Y X，Zhang W，Yang J，*et al*. Nonlinear dynamic response of a simply supported rectangular functionally graded material plate under the time-dependent thermalmechanical loads. Journal of Mechanical Science and Technology，2011；25(7)：1637—1646

9 吴 晓，黄 翀，杨立军，等. 功能梯度材料圆板的非线性热振动及屈曲. 动力学与控制学报，2012；10(1)：52—57

Wu X，Huang C，Yang L Y，*et al*. Nonlinear thermal vibration and buckling of functionally graded circular plate. Journal of Dynamic and Control，2012；10(1)：52—57

10 顾勇军. 热环境中功能梯度材料及其结构的力学行为. 长沙：湖南大学，2011

Gu Y J. Mechanical behavior of functional graded materials and structures in thermal environment. Changsha：Hunan University，2011

11 Almeida C A，Albino J C R，Menezes I F M，*et al*. Geometric nonlinear analyses of functionally graded beams using a tailored Lagrangian formulation. Mechanics Research Communications，2011；38(8)：553—559

12 Giunta G，Crisafulli D，Belouettar S，*et al*. A thermo-mechanical analysis of functionally graded beams *via* hierarchical modelling. Composite Structures，2013；95(7)：676—690

13 Komijani M，Reddy J N，Eslami M R. Nonlinear analysis of microstructure-dependent functionally graded piezoelectric material actuators. Journal of the Mechanics and Physics of Solids，2014；63(2)：214—227

(下转第 11 页)

The Constant Temperature Improvement and Calibration Method of LI-840A CO_2/H_2O Gas Analyzer

LI Han-chao, LIU Shou-dong, DENG Li-chen, XIAO Wei, GAO Yun-qiu, WANG Shu-min

(Yale-NUIST Center on Atmospheric Environment, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, P. R. China)

[**Abstract**] The LI-840A CO_2/H_2O gas analyzer had been improved in the aspect of constant temperature control since the measuring accuracy of LI-840A gas analyzer was greatly influenced by the fluctuation of temperature. In addition, some suggestions on further improvement of observational methods had also been put forward on the basis of improved constant temperature control test and instrument performance test. Results showed that: (1) the temperature range of self-made incubator can be controlled from 1 to 45 ℃ with a precision of ± 0.1 ℃. (2) after the modification of the constant temperature control both the observed CO_2 and H_2O concentration of LI-840A and Picarro G1101-I analyzer were well closed to each other. Calibration of CO_2 concentration with the frequency of once a day can make the observational error of CO_2 concentration within 2μmol · mol^{-1} and this had been validated in the urban CO_2 concentration observation.

[**Key words**] LI-840A　　constant temperature control　　CO_2 concentration observation　　observational error　　calibration methods

(上接第 4 页)

14 Kaci A, Bakhti K, Hebali H, *et al*. Mathematical solution for nonlinear cylindrical bending of sigmoid functionally graded plates. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2013; 54(1): 124—131

15 Andakhshideh A, Maleki S, Aghdam M M. Non-linear bending analysis of laminated sector plates using generalized differential quadrature. Composite Structures, 2010; 92(9): 2258—2264

Nonlinear Analysis of Functionally Graded Beams

ZHANG Chi, YU Geng, ZHANG Shuo

(Civil Aviation School, Shenyang Aerospace University, Shenyang 110136, P. R. China)

[**Abstract**] It was the intention to examine the effect of geometric nonlinearity on displacements and stresses in beams made of functionally graded materials subjected to thermo-mechanical loadings. Firstly with the mechanical loading condition, the equilibrium equations about the displacement and stress were obtained based on the first-order shear deformation beam theory (FSDBT). Temperature distribution through the thickness of the beams in thermal loadings was obtained by solving the one-dimensional heat transfer equation. Then the nonlinear strain-displacement relations were used to study the effect of geometric nonlinearity. And the equations were solved exactly and also by using a perturbation technique. Finally the results obtained from those two methods were compared for various loadings and boundary conditions by an example. The numerical results showed that the nonlinearity effect on the displacements and stresses of the beams was significant. Also the effects on the nonlinear bending behavior of the beams of material constant and the boundary conditions were determined. This new method for getting the solutions of the nonlinear equilibrium equations was significant for the high order shear deformation and layer theory.

[**Key words**] functionally graded beams　　nonlinear analysis　　analytical solution　　thermo-mechanical loadings　　perturbation technique　　shear deformation