第 11 卷 第 11 期 2011 年 4 月
1671—1815(2011)11-2399-06

科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering

Vol. 11 No. 11 Apr. 2011
© 2011 Sci. Tech. Engng.

论 文

数 学

紧图与超紧图的一些理论

陆伟成 张宣昊
(上海第二工业大学理学院,上海 201209)

摘 要 研究紧图与超紧图。得出连通且正则的紧图必为超紧图。研究了正则的紧图与点可迁图的关系。

关键词 紧图 超紧图 正则图 点可迁图 自同构群
中图法分类号 O157.2; **文献标志码** A

设 P_n 为所有 n 阶置换矩阵组成的集,n 阶简单图 G 的邻接矩阵为 A。P_n 中能与 A 交换的所有置换矩阵的集为 $P(A) = \{P \mid P \in P_n, PA = AP\}$。设 $\overline{P(A)} = \left\{\sum c_iP_i \,\middle|\, \sum c_i = 1, c_i > 0, P_i \in P(A)\right\}$,$\Omega_n$ 为所有 n 阶双随机矩阵组成的集,Ω_n 中能与 A 交换的所有双随机矩阵组成的集为 $\Omega(A) = \{X \mid X \in \Omega_n, XA = AX\}$,$\overline{P(A)} \subseteq \Omega(A)$。若 $\overline{P(A)} = \Omega(A)$(或 $\Omega(A) \subseteq \overline{P(A)}$),则称邻接矩阵为 A 的 n 阶图是紧图。

用 $X \geqslant 0$ 来表示矩阵 X 是元素全为非负的实矩阵,记 $Cone(A) = \{X \mid X \geqslant 0_n, XA = AX\}$,$P(A) = \left\{\sum c_iP_i \,\middle|\, c_i > 0, P_i \in P(A)\right\} \cup \{0_n\}$,$0_n$ 为零矩阵,$P(A) \subseteq Cone(A)$。若 $P(A) = Cone(A)$,则称邻接矩阵为 A 的 n 阶图是超紧图。

已知树,圈,完全偶图 $K_{m,n}$,(m,k) 星,(m,k) 链,满足一定条件的 (m,k) 圈都是紧图。此外,圈,完全图,完全偶图 $K_{m,n}$,满足一定条件的 (m,k) 圈为超紧图[1,2]。

2011 年 1 月 14 日收到
第一作者简介:陆伟成(1960—),上海人,副教授,研究方向:图论,组合数学。

本文给出连通且正则的紧图和超紧图的关系,并研究了正则的紧图与点可迁图之间的关系。

1 基本引理

引理 1 设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶连通图 G 的邻接矩阵,$u_1, u_2, \cdots, u_n$ 是 n 个实数且适合

$$\sum_{l=1}^{n} a_{il}u_l = \left(\sum_{l=1}^{n} a_{il}\right) \cdot u_i; i = 1, \cdots, n, \quad (1.1)$$

则 $u_1 = u_2 = \cdots = u_n$。

证 给图 G 中每一个点 v_i 赋一个权 $\omega(v_i) = u_i$;$i = 1, \cdots, n$,$V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$为图 G 的点集,令 $M = \max\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$。

首先证明:若 $\omega(v_i) = M$ 则对任意 $v' \in N_G(v_i)$ 必有 $\omega(v') = M$。这里 $N_G(v_i)$ 是 v_i 的邻集。不妨设 $N_G(v_i) = \{v_{j_1}, v_{j_2}, \cdots, v_{j_k}\}$,这里 $k = |N_G(v_i)| = d_G(v_i)$,则由已知条件式(1.1):$u_{j_1}, u_{j_2}, \cdots, u_{j_k} = k \cdot M$;而 $u_{j_m} \leqslant M$;$m = 1, \cdots, k$,故有 $u_{j_1} = u_{j_2} = \cdots = u_{j_k} = M$。

再设 $\omega(v) = M$,$v \in V(G)$,v'' 是图 G 中的任意一点,可以证明 $\omega(v'') = M$。由于图 G 是连通的,则在图 G 中存在长为 $r = d_G(v, v'')$ 的 (v, v'') 路:$vv_{i_1} \cdots v_{i_{r-1}}v''$,而 $\omega(v) = M$ 以及 $v_{i_1} \in N_G(v)$ 可知

$\omega(v_{i_1}) = M$ 且 $d_G(v_{i_1}, v'') = r-1$,对 r 进行数学归纳法即得 $\omega(v'') = M$。

这就证明了,若图 G 中某点 v 的权是最大的,则在图 G 中与点 v 相邻的所有点的权也是最大的。

由于图 G 是连通的,所以图 G 中每一点的权都是 M,从而 $u_1 = u_2 = \cdots = u_n$。

对于矩阵 $X = (x_{ij})_{m\times n}$,记 $R_i(X) = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ 为 X 的第 i 行行和,记 $S_j(X) = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}$ 为 X 的第 j 列列和,用 $\sigma(X)$ 表示 X 的所有元素的总和。

引理2 设 A 为 n 阶连通且正则的图 G 的邻接矩阵,X 为任意一个能与 A 交换的 n 阶实矩阵,则 X 的任一行行和与任一列列和均为同一常数。

证 设 G 是 n 阶 k- 正则连通图,$A = (a_{ij})$ 为图 G 的邻接矩阵,则矩阵 A 的任一行行和与任一列列和均为 k,再设 n 阶实数阵 $X = (x_{ij})$ 使得 $AX = XA$,从而

$$\sum_{l=1}^{n} a_{il}x_{lj} = \sum_{l=1}^{n} x_{il}a_{lj}; i,j = 1,\cdots,n \quad (1.2)$$

式(1.2)左右两端同时对 $j = 1,\cdots,n$ 求和得:

$$\sum_{l=1}^{n} a_{il}R_l(X) = kR_i(X); i = 1,\cdots,n \quad (1.3)$$

由于图 G 是连通的,并注意到 $\sum_{l=1}^{n} a_{il} = k$,则由式(1.3)及引理1得 $R_1(X) = R_2(X) = \cdots = R_n(X)$。式(1.2)左右两端同时对 $i = 1,\cdots,n$ 求和得:

$$\sum_{l=1}^{n} a_{lj}S_l(X) = kS_j(X); j = 1,\cdots,n \quad (1.4)$$

因矩阵 A 是对称的,所以 $\sum_{l=1}^{n} a_{jl}S_l(X) = k\cdot S_j(X); j = 1,\cdots,n$。由引理1得 $S_1(X) = S_2(X) = \cdots = S_n(X)$。由于 X 为 n 阶方阵,故 $R_i(X) = S_j(X); i,j = 1,\cdots,n$。

设 $A = (a_{ij})$ 与 $B = (b_{ij})$ 均为 n 阶非负矩阵,若 $b_{ij} > 0$ 则必有 $a_{ij} > 0$,则称 A 覆盖 B。

引理3 设 n 阶图 G 的邻接矩阵为 A,则图 G 是紧图的充要条件是 n 对于任意的 $X \in \Omega(A)$,在 $P(A)$ 中总存在 P 使得 X 覆盖 P。

证 充分性:用 $\tau(X)$ 表示矩阵 X 中非零元素的个数。任取 $X = (x_{ij}) \in \Omega(A)$,显然 $\tau(X) \geqslant n$。由假定存在 P 使得 X 覆盖 P,这里 P 为 n 阶置换矩阵,P 的 n 个1位置:$(1,j_1),(2,j_2),\cdots,(n,j_n)$,其中 $j_1,\cdots,j_n$ 是 $1,\cdots,n$ 的某个全排列。令 $\varepsilon = \min\{x_{1j_1}, x_{2j_2},\cdots,x_{nj_n}\}$,则 $0 < \varepsilon \leqslant 1$。

若 $\varepsilon = 1$,则 $X = P$,$\tau(X) = n$,$X \in \overline{P(A)}$。若 $0 < \varepsilon < 1$,令 $X' = \dfrac{1}{1-\varepsilon}(X - \varepsilon P)$,$X'$ 仍为 n 阶双随机矩阵。由 $XA = AX$ 及 $PA = AP$ 知 $X'A = AX'$,从而 $X' \in \Omega(A)$,且 $\tau(X') < \tau(X)$。由假定对于 X',在 $P(A)$ 中仍存在 P' 使得 X' 覆盖 P'。可以对 $\tau(X)$ 进行数学归纳,假设 $X' \in \overline{P(A)}$,$X' = c'_1P_1 + c'_2P_2 + \cdots + c'_tP_t$,这里 $c'_i > 0$,$\sum_{i=1}^{t} c'_i = 1$,$P_i \in P(A)$;$i = 1,\cdots,t$。由 $X = (1-\varepsilon)X' + \varepsilon P$ 知:$X = c'_1(1-\varepsilon)P_1 + \cdots + c'_t(1-\varepsilon)\cdot P_t \in \overline{P(A)}$,由于 $\Omega(A) \subseteq \overline{P(A)}$ 故图 G 必为紧图。

必要性:设图 G 是紧图,则 $\Omega(A) = \overline{P(A)}$,对 $X \in \Omega(A)$,有 $X = c_1P_1 + c_2P_2 + \cdots + c_tP_t$ 这里 $c_i > 0$,$\sum_{i=1}^{t} c_i = 1$,$P_i \in P(A)$,$i = 1,\cdots,t$,显然 X' 覆盖 P_1。

设 $Aut(G)$ 是 n 阶图 $G = [V,E]$ 的自同构群,$A = (a_{ij})$ 为图 G 的邻接矩阵,P_n 为所有 n 阶置换矩阵组成的集,$P(A) = \{P \mid P \in P_n, PA = AP\}$。设 $V = V(G) = \{1,2,\cdots,n\}$,任取 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \in Aut(G)$ 是 V 到 V 的一个一一映射。根据 σ 可构造出 n 阶置换矩阵 $P_\sigma = (p_{ij})$,这里 $p_{ij} = \begin{cases} 1, 若\ j = \sigma(i), \\ 0, 否则。\end{cases}$ 则 $P_\sigma A$ 在位置 (i,j) 处的元为 $\sum_{l=1}^{n} p_{il}a_{lj} = a_{\sigma(i)j}$,而 AP_σ 在位置 (i,j) 处的元为 $\sum_{l=1}^{n} a_{il}p_{lj} = a_{i\sigma^{-1}(j)}$。$a_{\sigma(i)j} = 1$ 的充要条件是点 $\sigma(i)$ 与点 j 在图 G 中相邻,其充要条件是点 i 与点 $\sigma^{-1}(j)$ 在图 G 中相邻,而此又等价于

$a_{i\sigma^{-1}(j)} = 1$,故对任意的 i,j 有 $(P_\sigma A)_{i,j} = (AP_\sigma)_{i,j}$,即 $P_\sigma A = AP_\sigma$,从而 $P_\sigma = P(A)$。

任取 $P \in P(A)$,设 P 的 n 个 1 位置:$(1,k_1)$,$(2,k_2)$,$\cdots$,(n,k_n),其中 $k_1,\cdots,k_n$ 是 $1,\cdots,n$ 的某个全排列。根据 P 可构造出 V 到 V 的一个一一映射:$\sigma_P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$,由 $PA = AP$,比较 PA 与 AP 各位置处的元素可知:$\sigma_P \in Aut(G)$。

由上述分析,如果 A 为图 G 的邻接矩阵,$\cdot$ 是矩阵的乘法,$P(A)$ 是所有能与 A 交换的 n 阶置换矩阵组成的集合,则有:

引理4 代数系统 $[P(A),\cdot]$ 是一个与 $Aut(G)$ 同构的群。

若对图 G 的任意两点 u 和 v,存在 $\sigma \in Aut(G)$ 使得 $\sigma(u) = v$,则称图为点可迁图。

引理5 设图 G 是 k- 正则的连通图,若图 G 是点可迁图,则图 G 的边连通度为 k。

证 用 $\lambda(G)$ 表示图 G 的边连通度,用 $[S,T]$ 表示图 G 中一个端点属于 S,另一个端点属于 T 的所有边组成的集,这里 $S \cap T = \phi$。选择 $X,X \neq \phi,X \neq V$,使 $|[X,\bar{X}]| = \lambda(G)$ 且 $|X|$ 是最少的,$|X| \leqslant \frac{n}{2}$,$n$ 为图 G 的阶数。对于任意 $X',X' \neq \phi,X' \neq V,|X'| \leqslant \frac{n}{2}$。如果 $|X'| < |X|$ 则根据 X 的选择,必有 $|[X',\overline{X'}]| > \lambda(G)$。

若 $|X| = 1$,G 是 k- 正则的,自然有 $\lambda(G) = k$。

若 $|X| \geqslant 2$,任取 $u,v \in X,u \neq v$。由于图 G 为点可迁图,必存在 $\sigma_0 \in Aut(G)$ 使得 $\sigma_0(u) = v$,令 $Y = \{y \mid y = \sigma_0(x),x \in X\}$,在图 G 中观察由 X 与 Y 生成的子图 $G[X]$ 与 $G[Y]$,令 τ 是 X 到 Y 的映射:$\tau(x) = \sigma_0(x),x \in X$,易知 τ 是 X 到 Y 的一一映射。对任意 $x',y' \in X,x'y' \in E(G[X])$ 的充要条件是 $\tau(x')\tau(y') \in E(G[Y])$,所以 τ 是 $G[X]$ 到 $G[Y]$ 的同构映射,即图 $G[X]$ 与 $G[Y]$ 同构。根据 σ_0 的作用可写成 $Y = \sigma_0(x)$。

从 $\begin{cases} 2E(G[X]) + |[X,\bar{X}]| = k|X| \\ 2E(G[Y]) + |[Y,\bar{Y}]| = k|Y| \end{cases}$ 可知 $|[X,\bar{X}]| = |[Y,\bar{Y}]| = \lambda(G)$。

因 $v \in X \cap Y$,故 $X \cap Y \neq \phi,X \cap Y \neq V,X \cup Y \neq \phi$,$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y| \leqslant |X| + |Y| - 1 \leqslant n - 1$,说明 $X \cup Y \neq V$,从而 $|[X \cap Y,\overline{X \cap Y}]| \geqslant \lambda(G)$,$|[X \cup Y,\overline{X \cup Y}]| \geqslant \lambda(G)$,再由

$$|[X \cap Y,\overline{X \cap Y}]| + |[X \cup Y,\overline{X \cup Y}]| + 2|[X\backslash Y,Y\backslash X]| = |[X,\bar{X}]| + |[Y,\bar{Y}]| \tag{1.5}$$

可知必有 $|[X \cap Y,\overline{X \cap Y}]| = \lambda(G)$,$X \cap Y \subseteq X$,由 X 选择及 $|X| = |Y|$,有 $X = Y$,即 $\sigma_0(x) = X$。

令 $\Gamma = \{\sigma \mid \sigma \in Aut(G),\sigma(X) = X\}$,易知 Γ 是 $Aut(G)$ 的一个子群。对任意 $\sigma \in \Gamma$,可构造 X 到 X 的双射 σ',使对任何 $x \in X,\sigma'(x) = \sigma(x)$,称 σ' 是 σ 在 X 上的限制。

令 $\Gamma' = \{\sigma' \mid \sigma'$ 是 σ 在 X 上的限制,$\sigma \in \Gamma\}$,易知 Γ' 就是图 $G[X]$ 的自同构群。对任意的 $x,y \in X,x \neq y$,由图 G 是点可迁图,故存在 $\sigma \in Aut(G)$ 使 $y = \sigma(x)$。由上述分析知 $\sigma \in \Gamma$,σ 在 X 上的限制 $\sigma' \in \Gamma'$ 且 $y = \sigma'(x)$,这说明 $G[X]$ 也是点可迁图,故 $G[X]$ 必为正则图。设 $G[X]$ 是 m- 正则图,$1 \leqslant m \leqslant |X| - 1$,由 $2E(G[X]) + |[X,\bar{X}]| = k|X|$ 可知:$|X|m + \lambda(G) = k|X|$,$\lambda(G) = (k-m)|X| \geqslant (k-m)(m+1) = k + (k-m-1)m \geqslant k$。故 $\lambda(G) = k$。

2　紧图的一些理论

已知超紧图是紧图,超紧图是正则图[3],超紧图必为连通图[4],对此有:

定理1 图 G 是超紧图的充要条件是图 G 是连通且正则的紧图。

证　仅需证明充分性即可。设 G 为 n 阶连通 k- 正则的紧图,A 为图 G 的邻接矩阵,任取 $X \in Cone(A)$ 先不妨假设 $X \neq 0_n$,X 为一个能与 A 可交换的 n 阶实非负矩阵,由引理 2 可知:$R_1(X) = \cdots = R_n(X) = S_1(X) = \cdots = S_n(X) = a$。这里 $a > 0$。由于

非负方阵$\frac{1}{a}X$ 的每行行和和每列列和均为 1，且 $\left(\frac{1}{a}X\right)\cdot A = A\cdot\left(\frac{1}{a}X\right)$，由此可知：$\frac{1}{a}X \in \Omega(A)$。由于图 G 是紧图，则由 $\Omega(A) = \overline{P(A)}$ 可知：$\frac{1}{a}X = c_1P_1 + c_2P_2 + \cdots + c_tP_t$，这里 $\sum_{i=1}^{t} c_i = 1, c_i > 0, P_i \in P(A)$，$i = 1,\cdots,t$，故 $X = (ac_1)P_1 + (ac_2)P_2 + \cdots + (ac_t)P_t \in P(A)$。若取 $X = 0_n$，当然也有 $X \in P(A)$。

由于 $Cone(A) \subseteq P(A)$，故邻接矩阵为 A 的图 G 必为超紧图。

引理6 G 是 n 阶简单图，其最大度 $\Delta(G) = \Delta$，则当 $n \geqslant 2\Delta + 1$ 时，G 的补图 G^c 必连通。

证 由于 G^c 中最小度 $\delta(G^c) = n - 1 - \Delta(G) \geqslant \frac{n-1}{2}$，故 n 阶图 G^c 必连通。

已知紧图的补图是紧图，对此有：

定理2 设 G 是 n 阶 k- 正则的紧图，则当 $n \geqslant 2k + 1$ 时，图 G 的补图 G^c 必为超紧图。

证 由引理6可知 G^c 为连通图，G^c 是$(n-k-1)$-正则图，因为 G 是紧图，由定理1，G^c 必为超紧图。

已知同一紧图点不交的并仍为紧图[5]。由于完全图 K_k 是紧图，m 个点不交的 K_k 的并 $K_k \cup \cdots \cup K_k$ 是一个 mk 阶的$(k-1)$ − 正则紧图，其补图是 m 部完全图 $K_{k,k,\cdots,k}$（共 m 个 k），当 $m \geqslant 2$ 时，$mk \geqslant 2(k-1)+1$，故由定理2，得：

推论1 当 $m \geqslant 2$ 时，$K_{k,k,\cdots,k}$（共 m 个 k）为超紧图。

已知当$m \geqslant 5$且$m \neq 0 \pmod 4$时，有mk个点的(m,k)圈是超紧图[3]，由于(m,k)图是$2k$-正则图，当 $m \geqslant 5$ 时，$mk \geqslant 2 \times 2k + 1$，由定理2可得：

推论2 当 $m \geqslant 5$ 且 $m \neq 0 \pmod 4$时，(m,k)圈的补图是超紧图。

以下讨论正则的紧图与点可迁图之间的关系。

定理3 若 G 是正则紧图，则 G 必为点可迁图。

证 设 G 是 n 阶 k- 正则紧图，A 为图 G 的邻接矩阵，$V(G) = \{1,2,\cdots,n\}$，显然 $\left(\frac{1}{n}\cdot J_n\right)A = A \times \left(\frac{1}{n}\cdot J_n\right)$，$\frac{1}{n}J_n$ 是与 A 可交换的双随机矩阵，故$\frac{1}{n} \times J_n \in \Omega(A)$因图 G 是紧图，$\Omega(A) = \overline{P(A)}$，故存在 $P_1, P_2, \cdots, P_t \in P(A)$使得

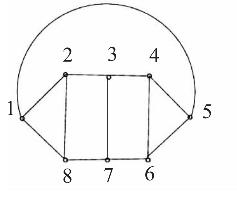
$$\frac{1}{n}J_n = c_1P_1 + c_2P_2 + \cdots + c_tP_t, \qquad (2.1)$$

这里 $\sum_{i=1}^{t} c_i = 1, c_i > 0, P_i \in P(A), i = 1,\cdots,t$，式(2.1)表明对任意 i,j 必存在 $P \in \{P_1, P_2, \cdots, P_t\}$使得$(P)_{i,j} = 1$，由引理4可知对任意 i,j 均存在 $\sigma \in Aut(G)$，使得 $\sigma(i) = j$，从而 G 为点可迁图。

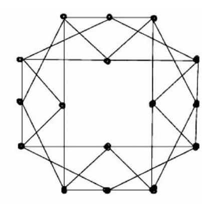
推论3 若图 G 是 k- 正则的超紧图，则 G 的边连通度为 k。

证 根据定理3，超紧图必为点可迁图，同时图 G 是连通的，根据引理5，$\lambda(G) = k$。

已知若图 G 是点可迁图，则图 G 必为正则图，并且对于任意的 $u,v \in V(G)$，$G - \{u\}$与 $G - \{v\}$是两个同构的图，根据定理3，如果一个图 G 是正则的但不是点可迁图，则该图 G 一定不是紧图。例如下图 G_1 是有8个点的3- 正则图，$G_1 - \{1\}$含有一个三角形，$G_1 - \{3\}$含有两个三角形，图 $G_1 - \{1\}$与 $G_1 - \{3\}$是不同构的，说明图 G_1 不是点可迁图，G_1 不是紧图。定理3的逆是不真的，例如有16个点的4-正则图(8,2)圈，它是点可迁图，不是紧图[1]。



G_1



(8,2)圈

同一个紧图的点不交的并仍是紧图[5]，当图是正则图时该定理的逆也是正确的。

定理4 设紧图 G 是正则图，$G_1, G_2, \cdots, G_m$ 是图 G 的所有连通分支，则

(1) 任意 G_i 与 G_j 是同构的 $i,j = 1,2,\cdots,m$。

(2) G_i 是超紧图 $i = 1,2,\cdots,m$。

证 (1) 由定理3，图 G 是点可迁图，对不连通的

点可迁图,其任意两个连通分支都是同构的。

(2) 由(1) 可知仅需证明图 G_1 是紧图即可。不妨假设 $G_1, G_2, \cdots, G_m$ 的邻接矩阵为同一个 l 阶矩阵 B,则 ml 阶图 G 的邻接矩阵可设为 $A = B + B + \cdots + B$(共 m 个 B),任取 $X \in \Omega(B)$,令

$$X' = \begin{pmatrix} X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

这里 I 为 l 阶单位矩阵,0 为 l 阶零矩阵。X' 是一个 ml 阶的双随机矩阵,由 $XB = BX$ 可知 $X'A = AX'$,即 $X' \in \Omega(A)$。由邻接矩阵为 A 的图 G 是紧图,故 $\Omega(A) = \overline{P(A)}$,从而

$$X' = c_1P_1 + c_2P_2 + \cdots + c_tP_t, \quad (2.3)$$

这里 $\sum_{i=1}^{t} c_i = 1, c_i > 0, P_i \in P(A); i = 1, \cdots, t$,由于 X' 覆盖所有 $P_i, i = 1, \cdots, t$,由式(2.2) 和式(2.3) 知:对任何一个 ml 阶置换矩阵 $P_i, i = 1, \cdots, t$,其分块矩阵形式必为

$$P_i = \begin{pmatrix} Q_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}; i = 1, 2, \cdots, t \quad (2.4)$$

式(2.4) 其中 Q_i 为 l 阶置换矩阵,由 $P_iA = AP_i$ 可知 $Q_iB = BQ_i$,从而 $Q_i \in P(B), i = 1, \cdots, t$,再由式(2.2),式(2.3),式(2.4) 可知

$$X = c_1 \cdot Q_1 + c_2 \cdot Q_2 + \cdots + c_t \cdot Q_t, \quad (2.5)$$

注意到 $\sum_{i=1}^{t} c_i = 1, c_i > 0, Q_i \in P(B); i = 1, \cdots, t$,由式(2.5) 知 $X \in \overline{P(A)}$,从而 $\Omega(B) \subseteq \overline{P(B)}$,说明邻接矩阵为 B 的 l 阶图 G_1 是紧图,由于 G_1 是连通的正则图,由定理 1 可知 G_1 为超紧图。

由此定理知:若图 G 是正则的紧图,则 G 必为同一个超紧图的点不交的并。

以下讨论在连通且正则的图当中阶数最小的非紧图的阶数。

点数不超过 3 的连通正则图均为完全图,当然都是超紧图。设 G 是连通正则的 4 阶图,则 G 是 C_4 或者 K_4,显然 G 是超紧图;设 G 是连通正则的 5 阶图,则 G 是 C_5 或者 K_5,显然 G 是超紧图;设 G 是连通正则的 6 阶图,则(1) G 是 2-正则图,则 G 就是 C_6,是超紧图,(2) G 是 2-正则图,则 G^c 是 2-正则图,一种可能 G^c 为 C_6,另一种可能 G^c 为 $C_3 \cup C_3$,无论如何均为紧图,而 $G = (G^c)^c$ 当然为紧图,也是超紧图,(3) G 是 4-正则图,G^c 为 $K_2 \cup K_2 \cup K_2$,当然为紧图,$G = (G^c)^c$ 是紧图,也是超紧图,(4) G 是 5-正则图,G 就是 K_6,是超紧图。

得出结论:阶数不超过 6 的连通正则图都是超紧图。

对于 7 阶图 $G = C_3 \cup C_4$,图 G 是 2-正则图,由于 C_3 与 C_4 不同构,由定理 4 可知 G 不是紧图。由于紧图的补图是紧图,故 G^c 一定不是紧图。由于 G^c 是连通的 4-正则图,所以有:

定理 5　最小阶的连通正则非紧图为 7 阶。

参　考　文　献

1　柳柏濂. 组合矩阵论. 北京:科学出版社,2005

2　Tinhofer G. Graph isomorphism and theorems of Birkhoff type. Computing,1986;36:285—290

3　Brualde R A. Some application of doubly stochastic matrices. Linear Algebra Apple,1988;107:77—86

4　张秀平. 关于紧图和超紧图的几个结果. 北京师范大学学报,1999;35(1):16—21

5　Tinhofer G. A note on compact graphs. Discrete Appl Math,1991;30:253—259

(下转第 2408 页)

参 考 文 献

1 Beylkin G, Coifman R, Rokhlin V. Fast wavelet trans – forms and numerical algorithms. Comm Pure Appl Math, 1991; 37: 141—183
2 Dahmen W, Harbrecht H, Schneider R. Compression techniques for boundary integral equations optimal complexity estimates. SIAM J Numer Anal, 2006; 43(6): 2251—2271
3 Tausch J. A variable order wavelet method for the sparse representation of layer potentials in the non-standard form. J Numer Math, 2004; 12(3): 233—254
4 Tausch J, White J. Multiscale bases for the sparse representation of boundary integral operators on complex geometry. SIAM J Sci Comput, 2003; 24(5): 1610—1629
5 Tausch J. Sparse BEM for Potential Theory and stokes flow using variable order wavelets. Comput Mech, 2003; 32: 312—319
6 Xiao J, Tausch J, Wen L. Approximate moment matrix decomposition in wavelet Galerkin BEM. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 2008; 197: 4000—4006
7 Xiao J, Tausch J, Hu Y. A-posteriori compression of wavelet-BEM matrices. Computational Mechanics, 2009; 44(5): 705—715
8 校金友, 曹衍闯, 文立华. 准消失矩变阶小波 Galerkin 边界元法. 西北工业大学学报, 2009; 27(6): 786—790
9 校金友, 曹衍闯, Tausch J S, 等. 电容提取的新摄动方程及小波边界元解法. 计算物理, 2010; 27(2): 240—244

T-wavelet Collocation Boundary Element Method

LIU Kai-ge, WU Bin, XIAO Jin-you

(Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, P. R. China)

[**Abstract**] Existing T-wavelet boundary element method (BEM) uses Galerkin scheme to discretize boundary integral equations, in which the evaluation of double integrals is complication and time-consuming. A method for constructing T-wavelet using Dirac δ-function is first proposed. By adopting these new wavelets as test functions in weighted residual method, a T-wavelet collocation BEM is then established. The method only involves single-layer integrals, thus easy to realize. Two representative real-world examples clearly show the $O(N\lg N)$ computational time and $O(N)$ memory requirements of the method.

[**Key words**] boundary element method T-wavelet wavelet collocation method matrix compression

(上接第 2403 页)

The Theory of Compact Graph and Supper Compact Graph

LU Wei-cheng, ZHANG Xuan-hao

(College of Science, Shanghai Second Polytechnic University, Shanghai 201209, P. R. China)

[**Abstract**] Discuss the compact graph and supper compact graph and it has been proved that the connected and regular compact graphs must be the supper compact graphs. It has also been discussed the relationship between regular compact graph and vertex-transitive graph.

[**Key words**] compact graph supper compact graph regular graph vertex-transitive graph automorphism group