

数 学

三次样条插值的推广

郭昌言 高 尚

(江苏科技大学计算机科学与工程学院, 镇江 212003)

摘 要 在分析了基本样条函数插值基础上,对第一种边界条件问题情形进行了推广,研究了任意两个插值点一阶导数已知的样条函数解法。最后通过一个实例,说明了该计算方法。

关键词 三次样条函数 第一边界条件 一阶导数

中图法分类号 O241.5; **文献标志码** A

自60年代以来,由于航空造船等工程设计的需要,发展了样条函数方法,现在样条函数越来越流行,它不仅是现代函数逼近的一个活跃的分支,而且也是现代数值计算中一个十分重要的数学工具。它已以各种方式应用到逼近论、数据拟合、数值微分、数值积分、微分方程和积分方程的数值求解中。在外形设计乃至计算机辅助设计的许多领域,样条函数都被认为是一种有效的数学工具。最常用的是最简单的三次样条插值函数。大多数文献研究第一边界条件中两个端点处一阶导数已知的情形,现在研究第一边界条件中,任意两个插值点一阶导数已知的样条函数解法。

1 三次样条插值函数及解法

给定区间 $[a, b]$ 一个分划 $\Delta: a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$,三次样条函数 $S(x)$ 满足以下条件^[1,2]:

(1) $S(x)$ 在每个区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上是一个三次

多项式;

(2) $S(x)$ 在每一个内接点 $x_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$ 上具有直到二阶的连续导数,即 $S(x) \in C^2[a, b]$;

(3) $S(x)$ 在所有节点满足 $S(x_i) = y_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 。

为了确定一个特定的样条插值函数,还需增加两个条件,这两个条件通常是在区间 $[a, b]$ 的两个端点处给出,即边界条件。边界条件根据实际问题的要求来确定,其类型很多,常见的边界条件类型有:

(1) 第一种边界条件 给定端点的一阶导数值

$$S'(x_0) = y'_0, S'(x_n) = y'_n;$$

(2) 第二种边界条件 给定端点的二阶导数值

$$S''(x_0) = y''_0, S''(x_n) = y''_n;$$

(3) 第三种边界条件 要求 $S(x)$ 为周期函数
 $S(x_0^+) = S(x_n^-), S'(x_0^+) = S'(x_n^-), S''(x_0^+) = S''(x_n^-)$ 。

以给定端点的一阶导数值情况(第一种边界条件)来讨论,记 $m_i = S'(x_i) (i = 0, 1, \dots, n)$,若 $m_0 = y'_0, m_n = y'_n$ 已知,参数 $m_1, m_2, \dots, m_{n-1}$ 由下列方程组确定

$$\begin{bmatrix} 2 & \alpha_1 & & & \\ 1-\alpha_2 & 2 & \alpha_2 & & \\ & 1-\alpha_3 & 2 & \alpha_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1-\alpha_{n-2} & 2 & \alpha_{n-2} \\ & & & & 1-\alpha_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 - (1-\alpha_1)m_0 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_{n-2} \\ \beta_{n-1} - \alpha_{n-1}m_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中: $h_{i-1} = x_i - x_{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $\alpha_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$),

$\beta_i = 3[(1-\alpha_i)\frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} + \alpha_i\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}]$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) 此方程组可采用追赶法^[1,2]求解出 $m_1, m_2, \dots, m_{n-1}$, $S(x)$ 在每个区间 $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 上 $S_i(x)$ 为

$$S_i(x) = \varphi_0\left(\frac{x-x_{i-1}}{h_{i-1}}\right)y_{i-1} + \varphi_1\left(\frac{x-x_{i-1}}{h_{i-1}}\right)y_i + h_{i-1}\psi_0\left(\frac{x-x_{i-1}}{h_{i-1}}\right)m_{i-1} + h_{i-1}\psi_1\left(\frac{x-x_{i-1}}{h_{i-1}}\right)m_i \quad (2)$$

其中: $\varphi_0(x) = (x-1)^2(2x-1)$, $\varphi_1(x) = x^2(-2x+3)$, $\psi_0(x) = x(x-1)^2$, $\psi_1(x) = x^2(x-1)$ 。

2 第一种边界条件其它情况

第一种边界条件一般给出 $S'(x_0) = y'_0, S'(x_n) = y'_n$, 即 x_0, x_n (两个端点) 处的一阶导数 m_0, m_n 已知, 这里研究任意其它两个一阶导数已知情况下的三次样条插值。

假设 m_j 和 m_k 已知, 不失一般性, $j < k$, 此时, 代入方程组(1), 消去方程组的 m_j 和 m_k 项, 方程组第 $j+1$ 个方程 ~ 第 $k-1$ 个方程组成的子方程组如下

$$\begin{bmatrix} 2 & \alpha_{j+1} & & & \\ 1-\alpha_{j+2} & 2 & \alpha_{j+2} & & \\ & 1-\alpha_{j+3} & 2 & \alpha_{j+3} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1-\alpha_{k-1} & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} m_{j+1} \\ m_{j+2} \\ m_{j+3} \\ \vdots \\ m_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{j+1} - (1-\alpha_{j+1})m_j \\ \beta_{j+2} \\ \beta_{j+3} \\ \vdots \\ \beta_{k-1} - \alpha_{k-1}m_k \end{bmatrix} \quad (3)$$

这是三对角方程组, 可以采用追赶法求解出 $m_{j+1}, m_{j+2}, \dots, m_{k-1}$ 。

把 m_{j+1} 代入第 j 个方程进行化简, 方程组第 1 个方程 ~ 第 j 个方程组成的子方程组如下

$$\begin{bmatrix} 1-\alpha_1 & 2 & \alpha_1 & & \\ 1-\alpha_2 & 2 & \alpha_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1-\alpha_{j-2} & 2 & \alpha_{j-2} \\ & & & 1-\alpha_{j-1} & 2 \\ & & & & 1-\alpha_j \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_{j-3} \\ m_{j-2} \\ m_{j-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{j-2} \\ \beta_{j-1} - \alpha_{j-1}m_j \\ \beta_j - 2m_j - \alpha_j m_{j+1} \end{bmatrix} \quad (4)$$

此方程组为 $j \times j$ 的上三对角三角方程, 先计算出 m_{j-1} , 很容易依次求出 $m_{j-2}, m_{j-3}, \dots, m_0$ 。

把 m_{k-1} 代入第 k 个方程进行化简, 方程组第 k 个方程 ~ 第 $n-1$ 个方程的子方程组组成如下

$$\begin{bmatrix} \alpha_k & & & & \\ 2 & \alpha_{k+1} & & & \\ 1-\alpha_{k+2} & 2 & \alpha_{k+2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1-\alpha_{n-1} & 2 & \alpha_{n-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} m_k \\ m_{k+1} \\ m_{k+2} \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_k \\ \beta_{k+1} \\ \beta_{k+2} \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_{k+1} \\ m_{k+2} \\ m_{k+3} \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_k - 2m_k - (1 - \alpha_k)m_{k-1} \\ \beta_{k+1} - (1 - \alpha_{k+1})m_k \\ \beta_{k+2} \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix},$$

此方程组为 $(n-k) \times (n-k)$ 的下三对角三角方程,先计算出 m_{k+1} , 同样依次求出 $m_{k+2}, m_{k+3}, \dots, m_n$ 。

3 实例计算

求 3 次样条 $S(x)$, 满足: $S(0) = 2, S(1) = 2, S(2) = 0.5, S(3) = 3, S(4) = -2, S(5) = 1, S(6) = 9, S(7) = 2, S(8) = 1.5, S(9) = 2, S(10) = 3, S(11) = 2$ 。

若 $m_3 = -1, m_8 = 0.5$ 已知, 把 $m_3 = -1, m_8 = 0.5$ 代入, 得到如下方程组

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 2 & 0.5 & & & & & & & & \\ & 0.5 & 2 & & & & & & & & \\ & & 0.5 & 0.5 & & & & & & & \\ & & & 2 & 0.5 & & & & & & \\ & & & 0.5 & 2 & 0.5 & & & & & \\ & & & & 0.5 & 2 & 0.5 & & & & \\ & & & & & 0.5 & 2 & & & & \\ & & & & & & 0.5 & 0.5 & & & \\ & & & & & & & 2 & 0.5 & & \\ & & & & & & & 0.5 & 2 & 0.5 & \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ m_7 \\ m_9 \\ m_{10} \\ m_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.25 \\ 2 \\ -1.75 \\ -2.5 \\ 16.5 \\ 1.5 \\ -11.5 \\ -2.5 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} \quad (5)$$

方程组第 4 个方程—第 7 个方程组成的子方程组如下

$$\begin{bmatrix} 2 & 0.5 & & \\ 0.5 & 2 & 0.5 & \\ & 0.5 & 2 & 0.5 \\ & & 0.5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ m_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.5 \\ 16.5 \\ 1.5 \\ -11.5 \end{bmatrix} \quad (6)$$

这是三对角方程组, 可以采用追赶法求解出

$$m_4 = -3.5407, m_5 = 9.1627, m_6 = -0.1100, m_7 = -5.7225。$$

把 $m_4 = -3.5407$ 代入第 3 个方程进行化简, 方程组第 1 个方程 ~ 第 3 个方程组成的子方程组如下:

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 2 & 0.5 \\ & 0.5 & 2 \\ & & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.25 \\ 2 \\ 0.0204 \end{bmatrix} \quad (7)$$

此方程组为 3×3 的上三角方程, 先计算出 $m_2 = 0.0408$, 依次求出 $m_1 = 3.8368, m_0 = -19.8880$ 。

把 $m_7 = -5.7225$ 代入第 8 个方程进行化简, 方程组第 8 个方程 ~ 第 10 个方程的子方程组组成如下:

$$\begin{bmatrix} 0.5 & & \\ 2 & 0.5 & \\ 0.5 & 2 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_9 \\ m_{10} \\ m_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3613 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} \quad (8)$$

此方程组为 3×3 的下三对角三角方程, 先计算出 $m_9 = 0.7225$, 依次求出 $m_{10} = 1.1100, m_{11} = -2.16125$ 。

根据(2)式, 所求的三次样条函数为

$$S(x) = \begin{cases} -16.0526x^3 + 35.9426x^2 + 19.89x + 2; & 0 \leq x < 1 \\ 6.878x^3 - 32.8493x^2 + 48.9019x - 20.9306; & 1 \leq x < 2 \\ -5.9593x^3 + 44.1746x^2 - 105.1495x + 0.4187; & 2 \leq x < 3 \\ 5.4593x^3 - 58.5933x^2 + 203.1579x + 226.5359; & 3 \leq x < 4 \\ -0.3780x^3 + 11.4545x^2 - 77.0335x + 147.0526; & 4 \leq x < 5 \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l} -6.9474x^3 + 109.9952x^2 - 569.7368x + 968.2249; \\ 5 \leq x < 6 \\ 8.1675x^3 - 162.0718x^2 + 1062.7x - 2296.6; \\ 6 \leq x < 7 \\ -4.2225x^3 + 98.1172x^2 - 758.6579x + 1953.2; \\ 7 \leq x < 8 \\ 2.2225x^3 - 56.5622x^2 + 478.7775x - 1346.7; \\ 8 \leq x < 9 \\ -2.1675x^3 + 61.9665x^2 - 587.9809x + 1853.6; \\ 9 \leq x < 10 \\ 0.9474x^3 - 31.4785x^2 + 285.3206x - 955.4689; \\ 10 \leq x \leq 11 \end{array}\right.$$

(9)

具体可参看有关文献。只研究第一种边界条件的情形,对于第二边界条件、第三边界条件等情形也可作类似处理。

其图形如图 1 所示。

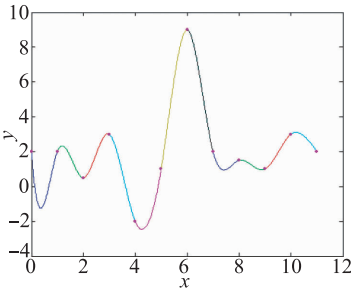


图 1 三次样条曲线

4 结束语

对于文中的解方程组的追赶法,未作详细讨论,

参 考 文 献

1 王能超. 数值分析简明教程. 北京: 高等教育出版社, 1999: 52—56
2 沈剑华. 计算数学基础. 上海: 同济大学出版社, 1989: 60—72

Generalization of Cubic Spline Interpolation

GUO Chang-yan, GAO Shang

(School of Computer Science and Engineering, Jiangsu University of Science and Technology, Zhenjiang 212003, P. R. China)

[Abstract] Based on analysis of basic cubic spline interpolation, on the condition of the first boundary the cubic spline interpolation is generalized. The methods are presented on the condition that the first derivatives of arbitrary two nodes are given. At last, this calculation method is illustrated through an example.

[Key words] cubic spline function first boundary first derivative