第10卷　第26期　2010年9月　1671—1815(2010)26-6490-02
科　学　技　术　与　工　程
Science Technology and Engineering
Vol. 10　No. 26　Sep. 2010


# 关于奇筛数序列的均值公式

谢日勤

(西安铁路职业技术学院 土木工程系,西安 710600)

**摘　要**　引入了奇筛数序列,利用初等及解析方法研究了欧拉函数在此序列集合中值的得分布,并给出了两个有趣的渐近公式。

**关键词**　奇筛数　均值　渐近公式　欧拉函数

**中图法分类号**　O156.4;　**文献标志码**　A

## 1　引言及结论

设 $n$ 为正奇数,如果 $n$ 满足不等于任意两个素数之差,则称 $n$ 为奇筛数。记 $\{a(n)\}$ 为所有奇筛数集合。即: $\{a(n)\} = \{7,13,19,23,25,31,33,37,43\cdots\}$。在文献[1]中,罗马尼亚数论专家 F. Smarandache 教授建议研究奇筛数序列的性质。显然,可以通过下面方法得到奇筛数序列。具体说,也就是:若 $A$ 表示全体正奇数集合,$B$ 为所有每个减去2的素数序列,即:$B = \{p_1 - 2, p_2 - 2, p_3 - 2, p_4 - 2, \cdots\}$,$p_i$ 为任一素数,则 $\{a(n)\} = A - B$。关于这个问题,似乎很少见文献报道。本文的主要目的是利用解析方法研究欧拉函数在此集合中的均值性质,并得到了两个有趣的渐近公式,即就是证明下面的定理。

**定理**　设 $n$ 为任意正整数,$\varphi(n)$ 为 Euler 函数。$d(n)$ 为除数函数,则对任意实数 $x \geqslant 1$,有渐近公式

$$\sum_{n \leqslant x} \varphi(a(n)) = \frac{3}{\pi^2} x^2 + O(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon})。$$

其中:$\gamma$ 为 Euler 常数;$\zeta(s)$ 为 Riemann-zeta 函数;$\varepsilon$ 为任意给定的正数。

2010年6月21日收到　国家自然科学基金项目(10671155)、陕西省自然科学基金项目(SJ08A28)资助

作者简介:谢日勤(1958—),女,江西宜春人,副教授,研究方向:数论及数学应用。E-mail: jszhang6x@163.com。

## 2　两个简单引理

为了完成定理的证明,需要引入下面两个简单引理,首先有

**引理1**　设 $p$ 为任一素数,$\varphi(n)$ 为 Euler 函数,则对任意实数 $x \geqslant 1$,有

$$\sum_{1 \leqslant p-2 \leqslant x} \varphi(p-2) = O(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon})。$$

其中 $\varepsilon$ 为任意给定的正数。

**证明**　见参考文献[2]。

**引理2**　设 $p$ 为任一素数,$\varphi(n)$ 为 Euler 函数,则对任意实数 $x \geqslant 1$,有

$$\sum_{n \leqslant x} \varphi(2n-1) = \frac{3}{\pi^2} x^2 + O(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}),$$

其中 $\varepsilon$ 为任意给定的正数。

**证明**　设对任意的 $s = \sigma + \mathrm{i}t$ 为复变量,$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(a(n))}{n^s}$。

因为 $\varphi(a(n)) < < n^{\varepsilon}$,很显然,$f(s)$ 是绝对收敛。

所以 $f(s)$ 在半平面 $Re(s) > 2$ 上绝对一致收敛的 Dirichlet 级数,于是根据 Euler 乘积公式[3] 及 $\varphi(a(n))$ 函数的定义,有

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varphi(2n-1)}{(2n-1)^s}\right) = \prod_{p \neq 2} \left[1 + \frac{\varphi(p)}{p^s} + \frac{\varphi(p^2)}{p^{2s}} + \frac{\varphi(p^3)}{p^{3s}} + \cdots + \frac{\varphi(p^n)}{p^{ns}} + \cdots\right] = \prod_{p} \left[1 + \right.$$

$$\frac{(p^1-p^0)}{p^s}+\frac{(p^2-p^1)}{p^{2s}}+\frac{(p^3-p^2)}{p^{3s}}+\cdots+\frac{(p^n-p^{n-1})}{p^{ns}}+\cdots\Big]=\prod_p\Big(\Big(1+\frac{1}{p^{s-1}}+\frac{1}{p^{2(s-1)}}+\frac{1}{p^{3(s-1)}}+\cdots+\frac{1}{p^{n(s-)}}+\cdots\Big)-\frac{1}{p}\Big(\frac{1}{p^{s-1}}+\frac{1}{p^{2(s-1)}}+\frac{1}{p^{3(s-1)}}+\cdots+\frac{1}{p^{n(s-)}}+\cdots\Big)\Big)=$$

$$\prod_p\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^{s-1}}}-\frac{1}{p}\frac{\frac{1}{p^{s-1}}}{1-\frac{1}{p^{s-1}}}\right)=$$

$$\zeta(s-1)\prod_p\Big(1-\frac{1}{p^s}\Big)=\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}\qquad(1)$$

式(1)中:$\zeta(s)$是 Riemann zeta-函数;$p$ 是素数。由文献[3]中的 Perron 公式知:

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\varphi(a(n))}{n^{s_0}}=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}f(s+s_0)\frac{x^s}{s}ds+O\Big(\frac{x^bB(b+\sigma_0)}{T}\Big)+O\Big(x^{1-\sigma_0}H(2x)\min(1,\frac{\log x}{T})\Big)\times O\Big(x^{-\sigma_0}H(N)\min\Big(1,\frac{x}{Tx}\Big)\Big),$$

其中 $N$ 为离 $x$ 最近的整数,当 $x$ 为半奇数时,取 $N=x-\frac{1}{2}$, $\|x\|=|x-N|$。取 $a(n)=U(n)$,$s_0=0$,$b=3$,$T=x^{1+\frac{1}{2}}$,$H(x)=x$,$B(\sigma)=\frac{1}{(\sigma-1)^\alpha}$,则

$$\sum_{n\leqslant x}\varphi(2n-1)=\frac{1}{2\pi i}\int_{1+\frac{3}{2}-iT}^{1+\frac{3}{2}+iT}\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}ds+O\Big(\frac{x^{1+\frac{3}{2}}}{T}\Big)\qquad(2)$$

计算线积分,从 $s=\frac{3}{2}\pm iT$ 到 $s=\frac{1}{2}\pm iT$,被积函数为$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$,

在 $s=2$ 处有一个一阶极点,其留数为

$$L(x)=\operatorname*{Res}_{s=2}\Big(\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}\Big)=\lim_{s\to2}\Big((s-2)\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}\Big)=\frac{1}{2\zeta(2)}x^2,$$

注意到估计式

$$\frac{1}{2i\pi}\Big(\int_{\frac{3}{2}+iT}^{\frac{1}{2}+iT}+\int_{\frac{1}{2}+iT}^{\frac{1}{2}-iT}+\int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{3}{2}-iT}\Big)\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}ds<<x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}。$$

由此,立即得到

$$\sum_{n\leqslant x}\varphi(2n-1)=\frac{3}{\pi^2}x^2+O(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon})。\qquad(3)$$

于是完成了引理 2 的证明。

## 3　定理的证明

现在给出定理 1 的证明,事实上,应用引理 1 及引理 2 有

$$\sum_{\substack{n=1\\a(n)\leqslant x}}^{\infty}\varphi(a(n))=\sum_{n\leqslant\frac{x+1}{2}}\varphi(2n-1)-\sum_{1\leqslant p-2\leqslant x}\varphi(p-2)=\frac{3}{\pi^2}x^2+O(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon})。$$

于是完成了定理的证明。

### 参　考　文　献

1　Smarandache F. Only problems, Not solutions. Chicago: Xiquan Publ House, 1993

2　Bredihin B M. Binary additive problems of indeterminate type. Izv Akad Nauk SSSR Ser Mat, 1963;27: 439—462

3　Tom M A. Introduction to analytic number theory. New York: Springer-Verlag, 1976

# An Mean Value Formula on Smarandache Odd Sieve Sequence

XIE Ri-qin

(Department of Civil Engineering, Xi'an Railway Vocational & Technical Institute, Xi'an 710600, P. R. China)

[**Abstract**]　Odd sieve sequence is studied, the elementary methods and analytical methods are used to study the mean value property of it, and an interesting asymptotic formula on odd sieve sequence is given.

[**Key words**]　odd sieve　mean value　asymptotic formula　Euler function