

建筑技术

开口薄壁截面圆弧拱空间动力稳定性分析

董宁娟¹ 赵洪金²

(中国飞机强度研究所¹, 西安 710065; 西安建筑科技大学土木工程学院², 西安 710055)

摘要 通过能量法和 Hamilton 原理,建立了径向均布周期荷载作用下开口薄壁截面圆弧拱动力稳定偏微分方程。利用 Galerkin 方法将其转化为二阶常微分 Mathieu-Hill 型参数振动方程。求得周期解所包围的动力不稳定区域。探讨了开口截面圆弧拱发生空间参数振动的动力稳定性问题。分析了恒载系数、圆弧半径以及圆心角等参数对空间动力不稳定区域的影响,为工程结构动力设计提供参考依据。

关键词 能量法 圆弧拱 动力稳定性 参数共振

中图法分类号 TU311.3; **文献标志码** A

薄壁曲梁因其流线造型在桥梁工程和建筑工程中得到了日益广泛的应用。曲梁不同于直梁之处在于初始曲率的存在,这使得其弯曲、扭转、翘曲的几何方程大都是相互耦合的,其变形常为弯扭变形,导致了曲梁理论分析的复杂性。对于任意的薄壁曲梁,在承受周期性动载荷情况下,有可能发生剧烈的横向振动、扭转振动或弯扭耦合振动,从而导致薄壁曲梁的动力失稳,即所谓的参数共振^[1,2]。研究一般薄壁压件和薄壁直梁的动力稳定问题文献已有报道^[3-10]。文献[3]用差分法研究了闭口截面薄壁杆件偏心周期荷载作用下弯矩作用平面外动力屈曲;文献[4]用加权残值方法研究了开口截面薄壁杆件偏心周期荷载作用下动力屈曲;文献[5]用谐波平衡法求解了在简谐外载荷作用下两端简支开口薄壁杆的动力稳定性问题,讨论了不同参数对其动力不稳定区域的影响;文献[6]采用有限单元法应用 Matlab 程序设计语言编制程序,计算在无阻尼和有阻尼两种情况下薄壁杆件的动力不稳定区域;文献[7-10]研究了复合材料薄壁杆件的动力不稳定问题,讨论了材料参数和荷载参数对动

力不稳定区域的影响。对于薄壁曲梁的动力稳定性问题,研究还鲜有报道。

针对薄壁构件较一般杆件更容易发生动力失稳,且动力失稳的形式也更为复杂的问题,来研究薄壁截面圆弧拱在周期性动载荷作用下的动力稳定性。通过能量法和 Hamilton 原理推导出薄壁圆弧拱动力稳定性方程,利用 Galerkin 方法将其转化为二阶常微分 Mathieu-hill 型参数振动方程,求得周期解所包围的动力不稳定区域,为工程结构动力设计提供参考依据。

1 空间动力稳定微分方程

受均布径向荷载作用下的圆弧拱,其拱轴在侧倾后是其位移和变形的几何关系用曲线坐标 x 轴(侧向), y 轴(径向)以及 z 轴(切向)来描述。图 1 为拱侧倾后拱轴上任意一点在 x, y, z 三个方向的线位移和角位移分别为面外侧向位移 u 、径向位移 v 、切向位移 w 、面内弯曲角 β 、面内弯曲角 ψ 以及侧向扭转角 θ 。

发生空间失稳后,圆弧拱的应变能 U 等于侧向弯曲应变能和扭转应变能之和^[11]

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_0^s M_\eta K_y ds = \frac{EI_y}{2} \int_0^s \left(\frac{\psi}{R} - \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right)^2 ds;$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \int_0^s M_\xi K_z ds = \frac{1}{2} \int_0^s \left[GI_d \left(\frac{\partial \psi}{\partial s} + \frac{\partial u}{R \partial s} \right)^2 \times \right.$$

2012年7月2日收到

第一作者简介:董宁娟(1982—),女,陕西宝鸡人,工程师,博士研究生,研究方向:结构动力稳定与振动控制。E-mail: zhaohungking@yahoohoo.cn。

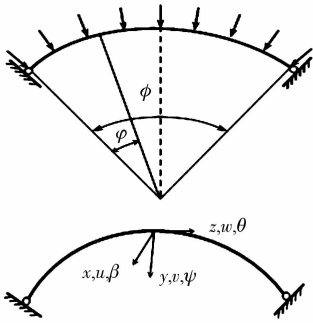


图1 圆弧拱空间几何参数

$$EI_{\omega} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{R \partial s^2} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial s} + \frac{\partial u}{R \partial s} \right) ds;$$

$$U = U_1 + U_2 =$$

$$\begin{aligned} & \frac{EI_y}{2} \int_0^s \left(\frac{\psi}{R} - \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right)^2 ds + \int_0^s \left[\frac{GI_d}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial s} + \frac{\partial u}{R \partial s} \right)^2 - \right. \\ & \left. \frac{EI_{\omega}}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{R \partial s^2} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial s} + \frac{\partial u}{R \partial s} \right) \right] ds = \\ & = \frac{1}{2R^3} \int_0^{\varphi} EI_y \left(R\psi - \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right)^2 d\varphi + \\ & \frac{1}{2R^3} \int_0^{\varphi} GI_d \left(R \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2 d\varphi - \\ & \frac{1}{2R^3} \int_0^{\varphi} EI_{\omega} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial \varphi^3} + \frac{\partial^3 u}{R \partial \varphi^3} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{R \partial \varphi} \right) d\varphi \quad (1) \end{aligned}$$

两端铰接圆弧拱在径向均布周期荷载 $q(t) = q_0 + q_1 \cos \theta t$ 作用下,其压力线与拱轴线重合,拱内只产生轴力 $N = qR$,为均匀受压的受力状态。外力势能 V 等于拱侧倾后外荷载所做功的负值,即

$$V = - \int_0^s q(t) v ds = - (q_0 + q_1 \cos \theta t) \int_0^s v ds \quad (2)$$

根据圆弧拱侧倾时拱轴不可伸缩条件

$$\int_s v ds = \frac{R}{2} \int_s \left(\frac{du}{ds} \right)^2 ds \quad (3)$$

$$V = - \frac{1}{2} (q_0 + q_1 \cos \theta t) \int_0^{\varphi} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2 d\varphi \quad (4)$$

薄壁圆弧拱在周期径向荷载作用下空间稳定总势能为

$$\Pi = U + V_0.$$

结构的动能为

$$T = \frac{1}{2} m \int_0^t \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + r_0^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \right] dt \quad (5)$$

式(5)中,其中 $r_0^2 = (I_x + I_y)/A$; u 为平面外侧向位

移, ψ 为侧向扭转角, v 为径向位移; I_y 为圆弧拱的横截面对于 y 轴的惯性矩, EI_y 表示拱的横向抗弯刚度, GI_d 为扭转刚度, m 为沿拱轴的分布质量。

根据 Hamilton 原理,有

$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi) dt = 0$, 分别对 u, ψ 进行变分,经分部积分后,可得到圆弧拱空间动力稳定性方程。

$$\begin{aligned} & \frac{E}{R^3} \left(I_y + \frac{I_{\omega}}{R^2} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4} - \frac{GI_d}{R^3} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \frac{EI_y + GI_d}{R^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \\ & \frac{EI_{\omega}}{R^4} \frac{\partial^4 \psi}{\partial \varphi^4} + (q_0 + q_1 \cos \theta t) \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (6a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{EI_{\omega}}{R^4} \frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4} - \frac{EI_y + GI_d}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{EI_y}{R} \psi - \\ & \frac{GI_d}{R} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{EI_{\omega}}{R^3} \frac{\partial^4 \psi}{\partial \varphi^4} + m r_0^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (6b)$$

令 $\eta = \frac{EI_y}{GI_d}$ 为刚度比, $\mu = \frac{EI_{\omega}}{GI_d R^2}$, 上式变为

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\mu}{\eta} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4} - \frac{1}{\eta} \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + (q_0 + q_1 \cos \theta t) \frac{R^3}{EI_y} \times \\ & \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + R \frac{\mu}{\eta} \frac{\partial^4 \psi}{\partial \varphi^4} - R \left(1 + \frac{1}{\eta} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{m R^3}{EI_y} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{\eta} \frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4} - \left(1 + \frac{1}{\eta} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + R \frac{\mu}{\eta} \frac{\partial^4 \psi}{\partial \varphi^4} - \\ & \frac{R}{\eta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + R \psi + \frac{m R^2}{EI_y} r_0^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (7b)$$

2 Mathieu-Hill 型参数振动方程

对于两铰拱取位移函数为

$$u(\varphi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(t) \sin \lambda_k \varphi \quad (8a)$$

$$\psi(\varphi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Theta_k(t) \sin \lambda_k \varphi \quad (8b)$$

其中 $\lambda_k = k\pi/\varphi$, φ 为拱的圆心角。满足拱的边界条件,利用 Galerkin 方法将式(8)代入方程(7)进行离散,可得到以下常微分方程组

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\mu}{\eta} \right) U_k(t) \lambda_k^4 \sin \lambda_k \varphi + \frac{1}{\eta} U_k(t) \lambda_k^2 \sin \lambda_k \varphi + \\ & \frac{R \mu}{\eta} \Theta_k(t) \lambda_k^4 \sin \lambda_k \varphi + R \left(1 + \frac{1}{\eta} \right) \Theta_k(t) \lambda_k^2 \times \end{aligned}$$

$$\sin\lambda_k\varphi + \frac{mR^3}{EI_y} \frac{d^2U_k(t)}{dt^2} \sin\lambda_k\varphi - (q_0 + q_t \cos\theta t) \frac{R^3}{EI_y} U_k(t) \lambda_k^2 \sin\lambda_k\varphi = 0 \tag{9a}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\mu}{\eta} U_k(t) \lambda_k^4 \sin\lambda_k\varphi + U_k(t) \left(1 + \frac{1}{\eta}\right) \lambda_k^2 \sin\lambda_k\varphi + \\ &R \frac{\mu}{\eta} \Theta_k(t) \lambda_k^4 \sin\lambda_k\varphi + \frac{R}{\eta} \Theta_k(t) \lambda_k^2 \sin\lambda_k\varphi + \\ &R \Theta_k(t) \sin\lambda_k\varphi + \frac{mR^2}{EI_y} r_0^2 \frac{d^2\Theta_k(t)}{dt^2} \sin\lambda_k\varphi = 0 \end{aligned} \tag{9b}$$

为了简化表达式(9)写成矩阵的形式

$$mFf_k'' + [P - q(t)S]f_k = 0 \tag{10}$$

式(1)中 $f_k = \begin{bmatrix} U_k \\ \Theta_k \end{bmatrix}$ $F = \begin{bmatrix} \frac{R^3}{EI_y} & 0 \\ 0 & \frac{R^3}{EI_y} r_0^2 \end{bmatrix}$ 。

$$P = \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{\mu}{\eta}\right) \lambda_k^4 + \frac{1}{\eta} \lambda_k^2 & \frac{R\mu}{\eta} \lambda_k^4 + R\left(1 + \frac{1}{\eta}\right) \lambda_k^2 \\ \frac{R\mu}{\eta} \lambda_k^4 + R\left(1 + \frac{1}{\eta}\right) \lambda_k^2 & \frac{R^2\mu}{\eta} \lambda_k^4 + \frac{1}{\eta} R^2 \lambda_k^2 + R^2 \end{bmatrix};$$
$$S = \begin{bmatrix} \frac{R^3}{EI_y} \lambda_k^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

3 动力不稳定区域的确定

为了确定由周期解所包围的不稳定区域,设式(10)有周期 $4\pi/\theta$ 的周期解为

$$f(t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(a_n \sin \frac{n\theta t}{2} + b_n \cos \frac{n\theta t}{2} \right), \text{代入式(10)整理合并同类项,根据周期解存在的条件得到临界频率方程为}$$

$$\begin{vmatrix} P - \left(q_0 \pm \frac{1}{2}q_t\right)S - \frac{1}{4}m\theta^2 F & -\frac{1}{2}q_t S \\ -\frac{1}{2}q_t S & P - q_0 S - \frac{9}{4}m\theta^2 F \\ 0 & -\frac{1}{2}q_t S \\ \dots & \dots \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \vdots \\ -\frac{1}{2}q_t S & \vdots \\ P - q_0 S - \frac{25}{4}m\theta^2 F & \vdots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \tag{11}$$

在求主动力不稳定区域时,可取方程式(11)第一阶主子式,即

$$\left| P - \left(q_0 \pm \frac{1}{2}q_t\right)S - \frac{1}{4}m\theta^2 F \right| = 0 \tag{12}$$

便有足够的精确度。由此即可解出位于 $\theta = 2\Omega$ 附近的动力不稳定区域边界。

若 $q(t) = q_0 + q_t \cos\theta t = \alpha q_{cr} + \beta q_{cr} \cos\theta t$ 。则式(12)可以写为

$$\left| P - \left(\alpha \pm \frac{1}{2}\beta\right)q_{cr}S - \frac{1}{4}m\theta^2 F \right| = 0 \tag{13}$$

- 由式(13)可以看出
- (1) $\alpha = 1, \beta = \theta = 0$ 时, $|P - q_{cr}S| = 0$ 对应于静力稳定问题;
 - (2) $\alpha = 0, \beta = 0, \theta = 2\omega$ 时, $|P - m\omega^2 F| = 0$ 对应于结构自由振动问题;
 - (3) $\alpha \in (0, 1), \beta = 0, \theta = 2\omega$ 时, $|P - \alpha q_{cr}S - m\Omega^2 F| = 0$ 对应于恒载下结构的自由振动问题。

因此参数共振问题就是静力稳定和自由振动的耦合问题,根据相应的公式可求解相应的问题。

对于有周期 $2\pi/\theta$ 的周期解为

$$f(t) = \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \left(a_0 + a_n \sin \frac{n\theta t}{2} + b_n \cos \frac{n\theta t}{2} \right)。$$

决定的动力不稳定区域,也可得到相似的方程。

$$\begin{vmatrix} P - q_0 S - m\theta^2 F & -\frac{1}{2}q_t S & 0 & \vdots \\ -\frac{1}{2}q_t S & P - q_0 S - 4m\theta^2 F & -\frac{1}{2}q_t S & \vdots \\ 0 & -\frac{1}{2}q_t S & P - q_0 S - 9m\theta^2 F & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \tag{14}$$

及

$$\begin{vmatrix}
 P - q_0 S & -\frac{1}{2} q_t S & 0 & \vdots \\
 -q_t S & P - q_0 S - m \theta^2 F & \frac{1}{2} q_t S & \vdots \\
 0 & -\frac{1}{2} q_t S & P + q_0 S - 4m \theta^2 F & \vdots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{vmatrix} = 0 \quad (15)$$

4 算例分析

弧长 $S = 20$ m 的双轴对称工字型截面圆弧拱, 截面特性如下: $A = 2.152 \times 10^{-2} \text{ m}^2$, $I_x = 1.019 \times 10^{-3} \text{ m}^4$, $I_y = 2.13 \times 10^{-4} \text{ m}^4$, $I_\omega = 1.23 \times 10^{-5} \text{ m}^6$, $I_d = 2.46 \times 10^{-6} \text{ m}^4$, 回转半径 $r_0 = 0.239 3$ m, 弹性模量 $E = 200$ GPa, 剪切模量 $G = 77.2$ GPa。通过求解, 确定动力不稳定区域分别如图 2—图 4 所示。

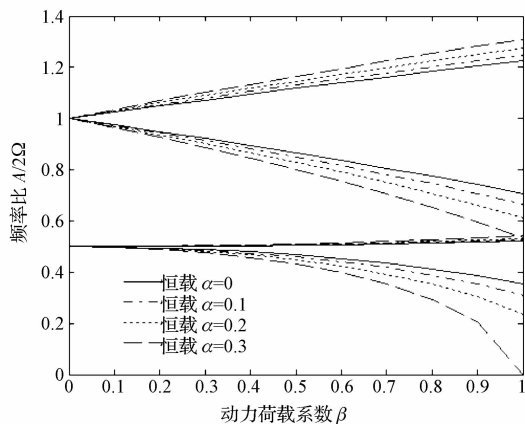


图 2 恒载对圆弧拱空间动力不稳定区域的影响

由图 2 可知, 随着动力荷载中恒荷分量的增加, 结构发生空间参数共振时的频率也降低, 动力不稳定区域扩大, 但恒载对动力不稳定区域的影响相对较小。

由于矢高和跨度并不是反映拱的屈曲性能的两个独立因素。当截面相同、跨度固定、矢高变化时, 拱的矢跨比变化了, 同时拱的弧长也变化了, 即拱的长细比也变化了; 此时, 无法定性或定量地离析出究竟是矢跨比还是长细比以何种程度影响拱的屈曲性能。当矢高固定、跨度变化时, 情形也是类似的。因此分析时考虑圆弧拱的弧长固定, 此时当截面相同、矢高变化时, 拱的矢跨比变化了, 由于

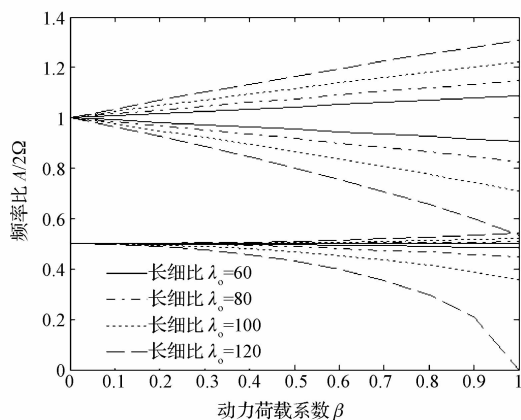


图 3 长细比对圆弧拱空间动力不稳定区域的影响

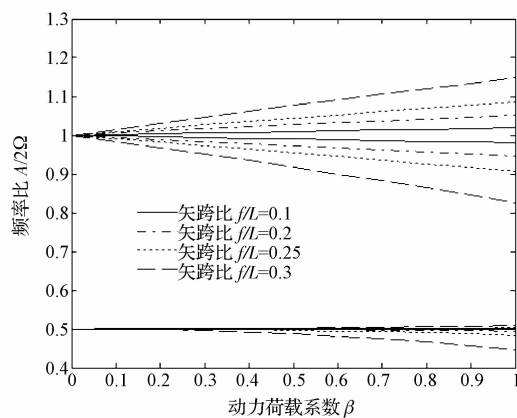


图 4 矢跨比对圆弧拱空间动力不稳定区域的影响

拱的弧长固定, 因此拱的长细比也是固定的。

由图 3 和图 4 可知, 随着矢跨比、长细比增加, 结构发生空间参数共振时的频率降低, 动力不稳定区域迅速扩大, 说明矢跨比或长细比越大, 发生参数共振的可能性也越大, 因此拱矢跨比和长细比是决定拱结构空间动力不稳定区域的重要因素。

5 结语

通过能量法和 Hamilton 原理, 建立了径向均布周期荷载作用下开口薄壁截面圆弧拱动力稳定平衡方程, 求得周期解所包围的动力不稳定区域, 探讨了恒载系数、矢跨比、长细比、圆弧半径以及圆心角等参数对动力不稳定区域的影响。

恒载的增加会使圆弧拱空间动力不稳定区域变宽, 但对动力不稳定区域的影响相对较小; 随着

矢跨比、长细比的增加,结构发生参数共振时的频率降低,动力不稳定区域迅速扩大,因此矢跨比、长细比不只是决定静力稳定的主要因素,也是决定拱结构动力不稳定区域的重要因素。

参 考 文 献

1 Bolotin V V. The dynamic stability of elastic systems. Holden-Day, INC, 1961

2 Hagedorn P,Koval L P, On the parametric stability of a Timoshenko beam subjected to a periodic axial load, Ingenieur Archiv,1971;40 (3) :211—220

3 童乐为,周国梁. 偏心周期荷载作用下闭口薄壁构件的动力稳定性.上海力学,1992;13(2) :41—48

4 杨 平,孙 兰. 偏心周期荷载作用下薄壁构件的动力稳定性.武汉交通科技大学学报,1998; 22(4) :403—407

5 傅衣铭,宋丽霞. 开口薄壁构件的非线性动力稳定性. 湖南大学学报,1998; 25(4) :9—14

6 罗 漪. 薄壁杆件的动力稳定性. 华侨大学学位论文,2000

7 茅人杰,李 军,凌复华. 复合材料薄壁杆的动力稳定性. 上海交通大学学报, 1990; 24 (5,6) : 186—196

8 茅人杰,孙国钧,雷中旺. 轴压下各向异性开口薄壁杆的非线性共振. 应用力学学报, 1992; 9 (3) : 8—18

9 Lin C Y,Chen L W, Dynamic stability of rotating composite beams with a viscoelastic core. Composite Structures, 2002; 58 (2) : 185—194

10 Machado S P,Cortnez V H. Dynamic stability of thin-walled composite beams under periodic transverse excitation, Journal of Sound and Vibration,2009;32 (1) :220—241

11 项海帆,刘光栋. 拱结构的稳定与振动. 北京:人民交通出版社. 1991

Analysis of Spatial Dynamic Stability for Thin-walled Circular Arches with Open-section

DONG Ning-juan¹,ZHAO Hong-jin²

(Aircraft Strength Research Institute of China¹, Xi'an 710065, P. R. China;
School of Civil Engineering², Xi'an University of Architecture& Technology, Xi'an 710055, P. R. China)

[Abstract] Spatial dynamic stability differential equation of thin-walled circular arch with open-section subject to under distributing radial periodic load is established through applying the energy method and Hamilton principle. Galerkin's method is used to convert the partial differential equations into the ordinary differential Mathieu equations, so as to deduce the critical frequency equations of primary parameter resonance of deep arch, and then dynamic instability regions surrounded by periodic solutions are obtained. Spatial dynamic stability problems of parametric vibration is discussed about thin-walled circular arch with open section,through analyzing the influences of dead load, radius of circle and central angle etc. on the dynamic stabilities, which provides reference basis for dynamic analysis and design in structure engineering.

[Key words] theory method circular arch dynamic stability parametric resonance