

一类带时滞 PDE 模型在图像去噪中的理论研究

刘桂兰

(盐城工学院 基础教学部, 江苏 盐城 224003)

摘要:基于经典的 P. L. Loins 模型, 提出了一类带时滞非线性 PDE 模型在图像去噪中的应用。该模型与以往图像去噪模型不同。以 2 阶扩散张量代替经典的各向异性扩散系数的方法, 给出一种简单有效的描述方法。针对新模型, 给出了模型解的适定性证明, 为进一步进行数值模拟提供了理论依据。

关键词:Perona - Malik 模型; 偏微分方程; 图像去噪; 时滞方程

中图分类号:O175 **文献标识码:**A **文章编号:**1671 - 5322(2007)03 - 0051 - 03

图像信号在产生、传输和记录过程中, 经常会受到各种噪声的干扰, 由于其严重地影响了图像的视觉效果, 因此, 在进一步进行边缘检测、图像分割、特征提取、模式识别等工作之前, 有必要对图像进行去噪。一个好的去噪方法既要能消除噪声, 又要保留图像的边缘轮廓, 线条不模糊。目前在图像去噪方面主要有两大方法: 基于小波理论的图像去噪和基于 PDE 理论的图像去噪^[1-2]。本文主要是研究利用 PDE 的理论进行图像去噪。

1 模型的提出

1990 年, Perona 和 Malik^[3] 提出了如下的非线性各向异性扩散方程:

$$\begin{cases} u_t = \operatorname{div}(g(|\nabla u|) \nabla u) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

其中 $g(x)$ 是一个非增的光滑函数, 并且满足 $g(0) = 1, g(x) \geq 0, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ 。 $g(x)$ 的设计, 目的是使得当 $|\nabla u|$ 较大时, $g(|\nabla u|)$ 取值很小, 而当 $|\nabla u|$ 较小时, $g(|\nabla u|)$ 取值相对较大, 通过 $g(|\nabla u|)$ 的控制, 方程在与边缘垂直的法线方向上扩散速度很小, 而沿着图像边缘的切线方向有一定的扩散速度。因此, 该模型在图像去噪和平滑方面具有良好性能。

P-M 建立的非线性扩散方程, 人们发现它也有许多不足之处: (1) 由 P-M 方程进行平滑处理

不能很好的保留细节边缘; (2) 有时当噪声很大时, P-M 方程引入的各项异性扩散将些噪声保留下来而达不到去噪的效果; (3) 特别是理论上有很大困难。

对于 P-M 方程, 关于扩散系数的选取, 人们根据各自对图像处理的需要, 对原方程提出了各种各样的改进形式。现在我们想, 如果能够对扩散系数进行比较特殊的改进, 同时又保留各向异性这一特点, 在具体研究中又比较简单。本着这一想法, 提出用一个二阶扩散张量来代替 P-M 方程中扩散系数。

空间上的平均化模型很多, 他们主要考虑的是将梯度进行均匀化, 这样对噪声能进行较好的消除。然而, 与许多模型想法不同的是, 将时间的均值化进入我们考虑的问题中, 这样, 我们对初始扩散张量的选取依赖少了许多^[4]。

综合上述因素提出新的模型:

$$\begin{cases} u_t = \operatorname{div}(L \nabla u) + \varepsilon(u - u_0) \\ u|_{t=0} = u_0 \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} = 0 \end{cases}$$

$$\text{其中} \quad \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{L}{\tau} = \frac{F(\nabla_\sigma u)}{\tau} \\ L|_{t=0} = L_0 \end{cases}$$

其中 $L_0 \geq \alpha Id, \alpha > 0$ 。

F 非负对称: $(F(v)w, w) \geq 0, \forall v, w \in \mathbb{R}^2$

收稿日期: 2007-05-10

作者简介: 刘桂兰 (1968-), 女, 山西大同人, 讲师, 上海交通大学应用数学系硕士研究生, 主要研究方向为偏微分方程应用。

F 自身及其导数的有界性:

$$|F(v)| + |\nabla F(v)| \leq C, \forall v \in R^2$$

同样,对 f 及其导数也有相同的假设。

2 模型解的存在性

设 $(u_0, L_0) \in L^2(\Omega) \times [L^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)]^4$

原问题有唯一解 $u(x, t)$

$$\text{满足} \begin{cases} u_t = \operatorname{div}(L \nabla u) + \varepsilon(u - u_0) \\ u|_{t=0} = u_0 \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} = 0 \end{cases}$$

$$\text{其中} \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{L}{\tau} = \frac{F(\nabla_\sigma u)}{\tau} \\ L|_{t=0} = L_0 \end{cases}$$

证明:

首先,引进空间

$$W(0, T) =$$

$$\left\{ w \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \frac{\partial w}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \right\} \quad (1)$$

取 $w \in W(0, T) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ 使得

$$\|w\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)} \quad (2)$$

由此,得到弱问题:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v \right) + (L(w) \nabla u, \nabla v) + \varepsilon(u - u_0, v) &= 0 \\ \forall v \in H^1(\Omega) \text{ a. e. } t \in [0, T] \end{aligned} \quad (3)$$

$$L(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} L_0 + \frac{1}{\tau} \int_0^t e^{-\frac{t-s}{\tau}} F[\nabla_\sigma w(\cdot, s)] ds$$

$$u(0) = u_0 \quad L(0) = L_0$$

因为 $w \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$,

根据条件 F 的有界性,得到

$$\begin{aligned} |L(x, t)| &= \left| e^{-\frac{t}{\tau}} L_0 + \frac{1}{\tau} \int_0^t e^{-\frac{t-s}{\tau}} F[\nabla_\sigma w(\cdot, s)] ds \right| \leq \\ &= \left| e^{-\frac{t}{\tau}} L_0 \right| + \left| \frac{1}{\tau} \int_0^t e^{-\frac{t-s}{\tau}} F[\nabla_\sigma w(\cdot, s)] ds \right| \leq \\ &= |L_0| + C_1 \leq C \end{aligned}$$

即, $L \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$ 。

另一方面,由非负对称假设 $(F(v)w, w) \geq 0$, $\forall v, w \in R^2$, 以及正定假设 $L_0 \geq \alpha Id, \alpha > 0$, 于是

$$L(x, t) \geq e^{-\frac{t}{\tau}} L_0 \geq \alpha e^{-\frac{t}{\tau}} Id$$

即,当 $t \leq T$ 时, L 一致正定。所以,有

$$L(x, t) \geq e^{-\frac{t}{\tau}} L_0 \geq \alpha e^{-\frac{t}{\tau}} Id,$$

$$|L| \leq C, \forall x \in \Omega, -\infty < t \leq T_0.$$

由抛物线方程的经典结论,我们得到弱问题存在唯一解。

在方程(1)两边同乘 u , 并在 Ω 上积分,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2}^2 + (L(w) \nabla u, \nabla u) + \int_\Omega \varepsilon(u - u_0)u = 0$$

进一步在 $(0, m)$ 上积分,

$$\int_0^m (L \nabla u, \nabla u) + \frac{1}{2} \|u(m)\|_{L^2}^2 =$$

$$\frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2}^2 - \int_0^m \int_\Omega \varepsilon(u - u_0)u \quad \forall m \in (0, T)$$

从而得到,

$$\frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2}^2 - \int_0^m \int_\Omega \varepsilon(u - u_0)u \leq$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon T}{2} \right) \|u_0\|_{L^2}^2 - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^m \|u\|_{L^2}^2$$

所以,

$$\int_0^m (L \nabla u, \nabla u) + \frac{1}{2} \|u(m)\|_{L^2}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^m \|u\|_{L^2}^2 \leq$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon T}{2} \right) \|u_0\|_{L^2}^2 \leq C \|u_0\|_{L^2}^2$$

利用对 L 的估计,由上式得到

$$\alpha e^{-\frac{t}{\tau}} \int_0^m \|\nabla u(\cdot, s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{1}{2} \|u(m)\|_{L^2}^2 +$$

$$\frac{\varepsilon}{2} \int_0^m \|u\|_{L^2}^2 \leq C \|u_0\|_{L^2}^2$$

选取适当的参数 C, C_1, C_2, C_3 , 我们有

$$C_1 \max_{0 \leq t \leq T} \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_2 \int_0^t \|u(\cdot, s)\|_{L^2}^2 ds +$$

$$C_3 \int_0^t \|\nabla u(\cdot, s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq C \|u_0\|_{L^2}^2$$

根据方程得到, $\|\frac{\partial u}{\partial t}\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))} \leq C_4$

结合以上两式得到

$$\|U(w)\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))} \leq C_5 \quad (4)$$

$$\|U(w)\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \leq \|u_0\|_{L^2}^2 \quad (5)$$

$$\|U(w)\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))} \leq C_6 \quad (6)$$

引进的 W 子集 W_0

$$W_0 = \{ w \in W(0, T) \mid \|w\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))} \leq C_5,$$

$$\|w\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)},$$

$$\|\frac{\partial w}{\partial t}\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))} \leq C_6, w(0) = u_0 \}$$

根据式(4)~(6),构造映射 $U: W_0 \rightarrow W_0$ 。

进一步可以证明 W_0 是 W 的非空凸的弱紧子集。

为了利用 Schauder 不动点定理,下面证明映射 U 是 W_0 的一个弱连续。

证明:由于 $W(0, T) \subset L^2(0, T; L^2(\Omega))$, 且 $W(0, T)$ 是紧子集, 假设 $\{w_i\}_{i \geq 0} \subset W_0, w_i = u(w_i)$, 且 $w_i \rightharpoonup w$ in W_0

由 Rellich 及 Kondrachov 的经典结论,
 $\{w_i\}_{i \geq 0}$ 中含有一个子列(仍记为 $\{w_i\}_{i \geq 0}$)使得

$$\begin{aligned} u_i &\rightharpoonup u \quad \text{in } L^2(0, T; H^1(\Omega)); \\ \frac{du_i}{dt} &\rightharpoonup \frac{du}{dt} \quad \text{in } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)); \\ u_i &\rightarrow u \quad \text{in } L^2(0, T; L^2(\Omega)); \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &\rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial x_j} \quad \text{in } L^2(0, T; L^2(\Omega)), i = 1, 2; \\ w_i &\rightarrow w \quad \text{in } L^2(0, T; L^2(\Omega)); \\ L(w_i) &\rightarrow L(w) \quad \text{in } L^2(0, T; L^2(\Omega)); \\ u_i(0) &\rightarrow u(0) \quad \text{in } H^{-1}(\Omega) \end{aligned}$$

因此,在 (E_{w_i}) 中,令 $i \rightarrow \infty$,可以得到 $u = u(w)$,即映射 U 是 W_0 到 W_0 的弱连续。进一步,由 (E_{w_i}) 中的解的唯一性,我们得到上述收敛对整个函数列 u_i 与 w_i 均成立。即原问题的解存在。

3 模型解的唯一性

设 $(\bar{u}, L)(\hat{u}, M)$ 是问题

$$\begin{cases} u_t = \operatorname{div}(L \nabla u) + \varepsilon(u - u_0) \\ u|_{t=0} = u_0 \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

其中 $\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{L}{\tau} = \frac{F(\nabla_\sigma u)}{\tau} \\ L|_{t=0} = L_0 \end{cases}$ 的两个解。

则 $\bar{u}, \hat{u}$ 对几乎所有的 $t \in [0, T]$ $\bar{u} = \hat{u}$ 。

证明:

由已知,

$$\begin{cases} \bar{u}_t = \operatorname{div}(L \nabla \bar{u}) + \varepsilon(\bar{u} - \bar{u}_0) \\ \bar{u}|_{t=0} = \bar{u}_0 \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

$$\text{其中 } \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{L}{\tau} = \frac{F(\nabla_\sigma \bar{u})}{\tau} \\ L|_{t=0} = L_0 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \hat{u}_t = \operatorname{div}(M \nabla \hat{u}) + \varepsilon(\hat{u} - \hat{u}_0) \\ \hat{u}|_{t=0} = \hat{u}_0 \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

$$\text{其中 } \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{M}{\tau} = \frac{F(\nabla_\sigma \hat{u})}{\tau} \\ M|_{t=0} = M_0 \end{cases} \quad (8)$$

两式相减,令 $E = L - M, c = \bar{u} - \hat{u}$

$$c_t = \operatorname{div}(M \nabla c) - \operatorname{div}(E \nabla \bar{u}) + \varepsilon c \quad (9)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + E = F(\nabla_\sigma \bar{u}) - F(\nabla_\sigma \hat{u}) \quad (10)$$

在式(9)两边同时乘以 c ,

$$\forall t \leq T,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|c\|_{L^2}^2 + (M \nabla c, \nabla c) + \varepsilon \int_{\Omega} c^2 &\leq (E \nabla \bar{u}, \nabla c) \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|c\|_{L^2}^2 + \alpha e^{\frac{\tau}{2}} \|\nabla c\|_{L^2}^2 &\leq \|E \nabla c\|_{L^2} \|\nabla c\|_{L^2} \leq \\ &\frac{1}{2} (2\alpha e^{\frac{\tau}{2}} \|\nabla c\|_{L^2} + \frac{\tau}{2\alpha} \|E \nabla c\|_{L^2}^2) \\ \frac{d}{dt} \|c\|_{L^2}^2 &\leq C \|E \nabla c\|_{L^2} \leq C \|E\|_{L^2}^2 \|\nabla c\|_{L^2}^2 \end{aligned} \quad (11)$$

另一方面,

$$\begin{aligned} \|E(\cdot, t)\|_{L^\infty} &\leq C_1 \int_0^t \|F(\nabla_\sigma \bar{u}) - F(\nabla_\sigma \hat{u})\|_{L^\infty} ds \leq \\ C_2 \int_0^t \|\nabla F\|_{L^\infty} \|\nabla_\sigma c\|_{L^\infty} ds &\leq \\ C_3 \int_0^t \|c(\cdot, s) \cdot \nabla f_\sigma\|_{L^\infty} ds &\leq \\ C \int_0^t \|c(\cdot, s)\|_{L^2} ds \end{aligned} \quad (12)$$

进而,根据式(11),得到

$$\begin{aligned} \|c(\cdot, t)\|_{L^2}^2 &\leq \\ C \int_0^t \|\nabla \bar{u}(\cdot, s)\|_{L^2}^2 ds \cdot \int_0^t \|c(\cdot, s)\|_{L^2}^2 ds \end{aligned} \quad (13)$$

因为 $\nabla \bar{u} \in L^2(\Omega)$ 所以 $\int_0^t \|\nabla \bar{u}(\cdot, s)\|_{L^2}^2 ds \leq C_0$, 则(3.13)化简为

$$\|c(\cdot, t)\|_{L^2}^2 \leq C \int_0^t \|c(\cdot, s)\|_{L^2}^2 ds$$

由 Gronwall 不等式和初始条件,可得 $c=0$,

再由 $\|E(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq C \int_0^t \|c(\cdot, s)\|_{L^2} ds$, 可得 $E=0$ 。

所以原问题的解唯一。

4 结论

以上给出了以 2 阶扩散张量代替经典模型中的高斯磨光核的方法,而这种方法是一个简化问题的手段。同时充分考虑了时间方向的均匀化,即带时滞的扩散张量模型,给出了与以往在空间方向对图像梯度作均匀化处理所不同的新模型。针对这个新的模型,目前已经证明了其解在一定条件下的适定性。当然,这个模型还有很大的发展空间,比如可以进一步离散、数值模拟等,以便在实践中获得验证,从而在图像去噪又增添了一种新的方法。

(下转第 56 页)

参考文献:

- [1] 卢业广. 次对称矩阵和次正交矩阵[J]. 大学数学, 1989(1): 13 - 16.
- [2] 许永平, 石小平. 正交矩阵的充要条件与 O - 正交矩阵的性质[J]. 南京林业大学学报, 2005(3): 29 - 31.
- [3] 许永平, 胡卫群. 矩阵的 O - 相似与 O - 合同[J]. 南京林业大学学报, 2006(7): 30 - 4.
- [4] 刘丽萍. 次正交矩阵及其性质[J]. 山西财经大学学报, 2006(6): 22 - 23.
- [5] Johnson C R Positive definite matrices[J]. Amer Math Monthly, 1970, 77: 259 - 264.

O - Subcongruent of Matrices

ZHANG Yan, GUO Dong-xi

(College of Mathematics and Science, Chongqing University, Chongqing 400044, China;
Yucui High School, Shandong Jinan 272000, China)

Abstract: In this paper, O - subcongruent of matrices was introduced by the concepts of sub - congruent and O - congruent. The fact that O - subcongruent is a kind of equivalent relation was proved. Meanwhile, this paper also gave some necessary and sufficient conditions for O - subcongruent of matrices. Then by the properties of sub - orthogonal matrix, the relations of their determinant were gained.

Keywords: full - transposed; sub - transposed; O - subcongruent; sub - orthogonal matrix

(上接第 53 页)

参考文献:

- [1] 何东健. 数字图像处理[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2003.
- [2] 张亶, 陈刚. 基于偏微分方程的图像处理[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [3] Perona, Malik. Scale space and edge detection using anisotropic diffusion. Proc. IEEE Computer Society[M]. Workshop on Computer Vision, 1987.
- [4] Chen Y, Barcelos C A Z, Mair B A. Smoothing and Edge Detection by Time - Varying Coupled Nonlinear Diffusion Equation[J]. Computer Vision and Image Understanding archive, 2001, 82(2): 1147 - 1163.

A Theoretical Research of PDE Model Based on Anisotropic Diffusion

LIU Gui-lan

(Department of Basic Sciences, Yancheng Institute of Technology, Jiangsu Yancheng 224003, China)

Abstract: Based on the classical model of P. L. Loins, the article presented a new nonlinear PDE model with time - delay effect in denoising of image processing. Different from the previous model, the article also yield a new simple and effective method in image denoising. For the new model, the existence and uniqueness of a solution to the model was verified, which provides the theoretical basis for the coming numerical experiments.

Keywords: Perona - Malik's model; partial differential equation; denoising of image processing; time - delay equation