文章编号：1000-8608(2018)02-0209-04

奇数网格(或棋盘)德杰尼斯问题解法

李盘林*[1]，赵铭伟[1]，徐喜荣[1]，李丽双[1]，李伯章[2]

(1.大连理工大学 电子信息与电气工程学部，辽宁 大连 116024；
2.滑铁卢大学 计算机工程系，加拿大 安大略 滑铁卢)

摘要： 在德杰尼斯五后问题泛化研究基础上，给出了$(2p+1)\times(2p+1)$奇数网格坐标表示，定义了解首格集，利用皇后控制或剩余控制数、马步格、解首格集，以及图形对称性，得到了奇数网格(或棋盘)德杰尼斯问题求解定理和求解方法，并给出了3×3网格、5×5网格和7×7网格德杰尼斯问题的1个、3个和24个基础解及其图示. 结果表明奇数网格(或棋盘)德杰尼斯问题是网格优化管控问题之一，具有一定的理论价值和应用价值.

关键词： 控制或剩余控制数；最佳(极佳)或剩余最佳(极佳)位置；马步格；解首格集

中图分类号： O158　　**文献标识码：** A　　**doi：** 10.7511/dllgxb201802015

0 引 言

鉴于五后问题的由来，作者在文献[1]中将它称为德杰尼斯五后问题，并先后进行了德杰尼斯五后问题解法[2]和德杰尼斯五后问题泛化研究[3]. 文献[3]是将文献[2]的论域8×8网格(或棋盘)推广到$2p\times2p$网格(或棋盘)$(p=1,2,\cdots)$上.

若对任意偶数e，称$e\times e$网格(或棋盘)为偶数网格(或棋盘)，用数学语言可表为$2p\times2p$网格(或棋盘)$(p=1,2,\cdots)$；若对任意奇数o，称$o\times o$网格(或棋盘)为奇数网格(或棋盘)，用数学语言可表为$(2p+1)\times(2p+1)$网格(或棋盘)$(p=1,2,\cdots,p=0$为平凡情形). 于是，文献[3]题目又可表述为偶数网格(或棋盘)德杰尼斯问题解法. 虽然只有一字之差，但是两者解决问题的方法还是有所区别的. 将本文与文献[3]合并起来，便得到一个新论题：对任意自然数n，$n\times n$网格(或棋盘)德杰尼斯问题解法. 可见，本文和文献[3]对这一论题的完成是不可或缺的.

1 求解前的准备

奇数网格(或棋盘)坐标表示如图1所示.

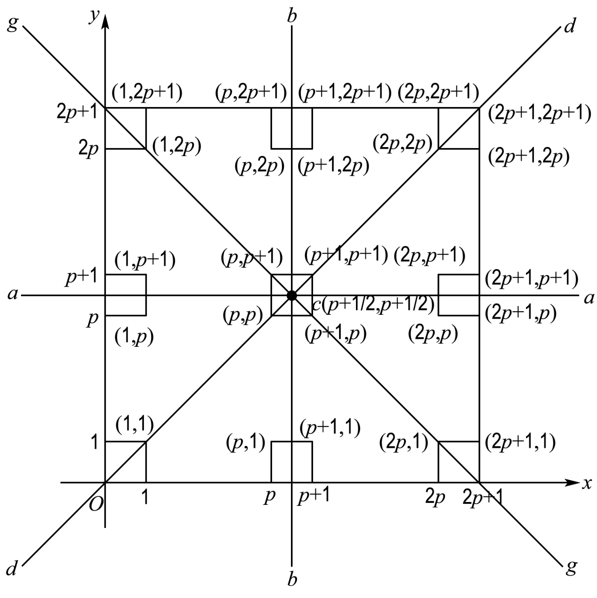

图1　$(2p+1)\times(2p+1)$网格坐标图示
Fig. 1　Coordinate illustration of $(2p+1)\times(2p+1)$ grid

从图1可知，该图形是关于直线aa、bb、dd和gg对称的，它们相交于c，其坐标为$(p+1/2,p+1/2)$，以c为中心的格，称为中心格，表示为$s_{p+1,p+1}$. 可见，本文格仍沿用文献[2]或文献[3]的表示方式，即用格的右上角顶坐标来表示. 为方

收稿日期：2017-07-10；　修回日期：2018-01-19.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(ZX20140589).
作者简介：李盘林*(1940-)，男，教授，E-mail：lipanlin@dlut.edu.cn；赵铭伟(1972-)，女，高级工程师，E-mail：zhaomw@dlut.edu.cn；徐喜荣(1967-)，女，副教授，E-mail：xirongxu@dlut.edu.cn；李丽双(1967-)，女，教授，E-mail：lils@dlut.edu.cn.

便计，$s_{i,j}$ 简记为 s_{ij}.

定义 1 $S=\{s_{ij} \mid 1\leqslant i,j\leqslant 2p+1\}$，即用 S 表示$(2p+1)\times(2p+1)$网格中的所有格集合.（文献[2]中是用 C 表示的）

定义 2 位于直线 dd 和 bb 上及其它们相交域(夹角$\leqslant 90°$)内的所有格，称为解首格集，表示为

$$S_{\mathrm{f}}=\{s_{ij} \mid j\leqslant i\leqslant p+1,1\leqslant j\leqslant p+1\}$$

与文献[1]、[2]中相同的定义，在此不再赘述.

又令 $S_{\mathrm{f}r}=\{s_{ij} \mid s_{p-r+2p-r+2},s_{p-r+3p-r+2},\cdots,s_{p+1p-r+2}\}$为 S_{f} 中从中心点 c 向下第 r 列中格的集合，则有下面定理：

定理 1 $S_{\mathrm{f}}=S_{\mathrm{f}1}\cup S_{\mathrm{f}2}\cup\cdots\cup S_{\mathrm{f}p+1}$，且$|S_{ij}|=r,1\leqslant r\leqslant p+1$.

定理 2 对任意 $s_{ij}\in S_{\mathrm{f}},j\leqslant i\leqslant p+1,1\leqslant j\leqslant p+1$，则

$$6p+2j-1\leqslant n(s_{ij})\leqslant 8p+1$$

定理 1 和定理 2 的验证留给读者完成.

2 解 法

首先选取 $s_{i_1j_1}\in S_{\mathrm{f}}$，使 $n(s_{i_1j_1})$为最大，作为第一个广义解的首格，由定理 2 知，$s_{i_1j_1}\neq s_{p+1p+1}$，即 $s_{i_1j_1}\in S_{\mathrm{f}1}$. 接着选取 $s_{i_1j_1}$ 的马步格，其集合表为 H_1. 若 $H_1\cap(S-s_{i_1j_1})\neq\varnothing$，则将 $H_1\cap(S-s_{i_1j_1})$中格按剩余控制数排序，择取最大(或极大，这时不止一个格，下同)者作为第一个广义解的第 2 格 $s_{i_2j_2}$；若 $H_1\cap(S-s_{i_1j_1})=\varnothing$，则将$(S-s_{i_1j_1})$中格按剩余控制数排序，择其最大(或极大)者作为第一个广义解的第 2 格 $s_{i_2j_2}$. 继而，选取$\{s_{i_1j_1},s_{i_2j_2}\}$的马步格，其集合表为 H_2. 若 $H_2\cap(S-s_{i_1j_1}-s_{i_2j_2})\neq\varnothing$，则将 $H_2\cap(S-s_{i_1j_1}-s_{i_2j_2})$中格按剩余控制数排序，择取最大(或极大)者作为第一个广义解的第 3 格 $s_{i_3j_3}$；若 $H_2\cap(S-s_{i_1j_1}-s_{i_2j_2})=\varnothing$，则将$(S-s_{i_1j_1}-s_{i_2j_2})$中格按剩余控制数排序，择其最大(或极大)者作为第一个广义解的第 3 格 $s_{i_3j_3}$. 依此类推，求出第一个广义解的第 4 格 $s_{i_4j_4}$，…，第 $k-1$ 格 $s_{i_{k-1}j_{k-1}}$. 于是选取$\{s_{i_1j_1},s_{i_2j_2},\cdots,s_{i_{k-1}j_{k-1}}\}$的马步格，其集合表为 H_{k-1}. 若 $H_{k-1}\cap(S-s_{i_1j_1}-s_{i_2j_2}-\cdots-s_{i_{k-1}j_{k-1}})\neq\varnothing$，将 $H_{k-1}\cap(S-s_{i_1j_1}-s_{i_2j_2}-\cdots-s_{i_{k-1}j_{k-1}})$中格按剩余控制数排序，择取最大(或极大)者作为第一个广义解的第 k 格 $s_{i_kj_k}$；若 $H_{k-1}\cap(S-s_{i_1j_1}-s_{i_2j_2}-\cdots-s_{i_{k-1}j_{k-1}})=\varnothing$，则将$(S-s_{i_1j_1}-s_{i_2j_2}-\cdots-s_{i_{k-1}j_{k-1}})$中格按剩余控制数排序，择其最大(或极大)者作为第一个广义解的第 k 格 $s_{i_kj_k}$.

需要指出的是：

(1)在求广义解的第 h 格 $s_{i_hj_h}$ $(h\geqslant 2)$时，若 $n(s_{i_hj_h})$为极大时，则有多个格，其剩余控制数与 $n(s_{i_hj_h})$相同，不妨令 $n(s_{x_1y_1})=n(s_{x_2y_2})=\cdots=n(s_{i_uj_u})$，其中 $s_{x_1y_1}=s'_{x_1y_1}$，以及 $s_{x_vy_v}$ $(2\leqslant v\leqslant u)$为第一个广义解的第 h 格. 选出$\{s_{i_1j_1},s_{i_2j_2},\cdots,s_{i_{n-1}j_{n-1}},s_{x_vy_v}\}$ $(2\leqslant v\leqslant u)$的马步格，其集合表为 H_v. 若$(H_v-\{s_{x_1y_1}\}-\cdots-\{s_{x_{v-1}y_{v-1}}\})\cap(S-s_{i_1j_1}-\cdots-s_{i_{n-1}j_{n-1}}-s_{x_vy_v})$中格按剩余控制数排序，择其最大(或极大)者作为第一个广义解的第 $h+1$ 格 $s_{i_{h+1}j_{h+1}}$；否则将$(S-s_{i_1j_1}-\cdots-s_{i_{n-1}j_{n-1}}-s_{x_vy_v})$中格按剩余控制数排序，择其最大(或极大)者作为第一个广义解的第 $h+1$ 格 $s_{i_{h+1}j_{h+1}}$. 如此这般，便可依次求出以 $s_{x_2y_2},s_{x_3y_3},\cdots,s_{x_uy_u}$ 为第 h 格的广义解.

(2)要求出以 S_{f} 中的每一个格为首格的基础解，即按 S_{f} 中子集次序 $S_{\mathrm{f}1},S_{\mathrm{f}2},\cdots,S_{\mathrm{f}p+1}$ 求出它们中每一格为首格的基础解.

定义 3 若

$$\sum_{l=1}^{k}n(s_{i_lj_l})=|S|$$

则称$\{s_{i_lj_l} \mid 1\leqslant l\leqslant k\}$为所求的第一个广义解，其广义解中格的个数，称为该广义解的基数或长度.

类似求第一个广义解那样，求第二个广义解. 第二个广义解的首格，可以是 $s_{i_1j_1}$ 即 s_{p+1p+1}，但也可能不是 s_{p+1p+1}，而是 $S_{\mathrm{f}r}$ 中的其他格$(r\geqslant 2)$. 这与 p 的取值有关. 取上述二广义解的基数或长度小者，称为问题候选基础解；若上述二广义解的基数或长度相同，则它们便都是问题候选基础解. 而候选基础解中格的个数，称为候选基础解的基数或长度.

在求解过程中，若当前广义解，其基数或长度比以前候选基础解的基数或长度小，则取当前广义解为该问题的候选基础解. 仿上，求出后面的候选基础解. 由此可知，在整个求解过程中，存在候选基础解的基数或长度不再是变小的一些解，称这些(或这个)解为问题的基础解. 基础解中格的个数，称为基础解的基数或长度.

根据奇数网格(或棋盘)图形对称性，可得下

面定理：

定理 3　对任给定奇数 $o(o\geqslant 5)$，若求出 $o\times o$ 网格(或棋盘)德杰尼斯问题的 n_o 个不同基础解，则它将有 $4\times n_o$ 个不同解.

为便于理解问题的解法，下面给出了图 2～4，分别是 3×3 网格、5×5 网格和 7×7 网格德杰尼斯问题的 1 个、3 个和 24 个基础解.

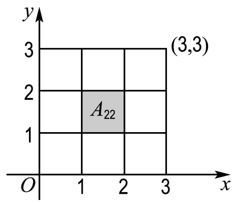

图 2　3×3 网格的基础解

Fig. 2　Basic solutions of 3×3 grid

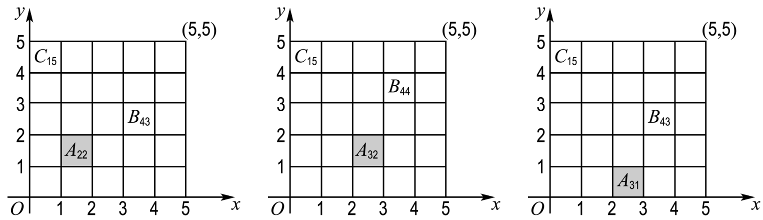

图 3　5×5 网格的基础解

Fig. 3　Basic solutions of 5×5 grid

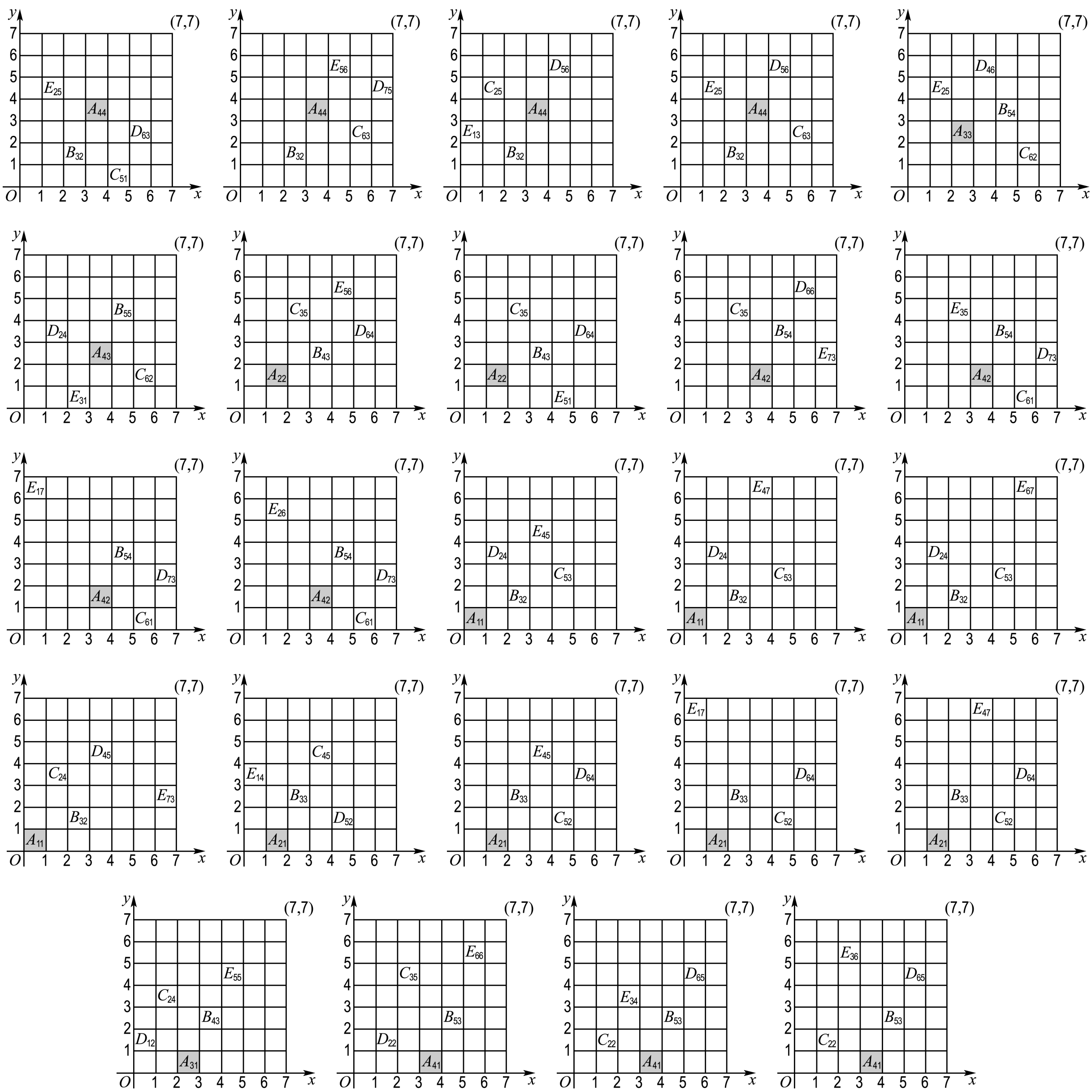

图 4　7×7 网格的基础解

Fig. 4　Basic solutions of 7×7 grid

3 结 语

本文完成了奇数网格(或棋盘)德杰尼斯问题解法,它与文献[2]共同给出了对任意自然数 n,$n\times n$ 网格(或棋盘)德杰尼斯问题求解.这不仅具有一定的理论价值,而且在防灾减灾和安全领域中前景利好.

参考文献:

[1] 李盘林,李丽双,赵铭伟,等. 离散数学[M]. 3 版. 北京:高等教育出版社,2016.
LI Panlin, LI Lishuang, ZHAO Mingwei, *et al*. **Discrete Mathematics** [M]. 3rd ed. Beijing: Higher Education Press, 2016. (in Chinese)

[2] 李盘林,赵铭伟,徐喜荣,等. 德杰尼斯五后问题求解方法[J]. 大连理工大学学报, 2016, **56**(3):304-308.
LI Panlin, ZHAO Mingwei, XU Xirong, *et al*. Solution to De Jaenisch's five queens problem [J]. **Journal of Dalian University of Technology**, 2016, **56**(3):304-308. (in Chinese)

[3] 李盘林,赵铭伟,徐喜荣,等. 德杰尼斯五后问题泛化研究[J]. 大连理工大学学报, 2017, **57**(3):327-330.
LI Panlin, ZHAO Mingwei, XU Xirong, *et al*. Research on generalization of De Jaenisch's five queens problem [J]. **Journal of Dalian University of Technology**, 2017, **57**(3):327-330. (in Chinese)

Solutions of De Jaenisch's problem on odd number grid (or chess board)

LI Panlin*[1], ZHAO Mingwei[1], XU Xirong[1], LI Lishuang[1], LI Bozhang[2]

(1. Faculty of Electronic Information and Electrical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;
2. Department of Computer Engineering, University of Waterloo, Waterloo, ON, Canada)

Abstract: On the basis of the generalization research of De Jaenisch's five queens problem, the coordinate representation of the $(2p+1)\times(2p+1)$ odd number grid is introduced, and the first grid set of the solution is defined. Using the control number and the remaining control number of the queen, lattice of the horse's walking in Chinese chess, the first grid set of the solution, as well as the symmetrical properties of the figure, solutions and theorem of De Jaenisch's problem on odd number grid (or chess board) are obtained. 1, 3 and 24 basic solutions of 3×3 grid, 5×5 grid and 7×7 grid of De Jaenisch's problem shown in illustrations are given. The results show the De Jaenisch's problem on odd number grid (or chess board) is one of the grid optimal control problems, and it has a theoretical value and prospects of good value.

Key words: control number or the remaining control number; the optimum (heuristically) or the remaining optimum (heuristically) positions; lattice of the horse's walking in Chinese chess; the first grid set of the solution