第52卷第6期
2012年11月

大连理工大学学报
Journal of Dalian University of Technology

Vol. 52, No. 6
Nov. 2012

工程力学

文章编号：1000-8608(2012)06-0781-06

热荷载下梁基频和热屈曲临界变温优化设计

程耿东*， 于 娜， 王 斌

（大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室，辽宁 大连 116024）

摘要： 改变梁截面沿轴线的分布可以改变轴向力，提高梁的基频以及梁热屈曲的临界变温. 研究在给定材料体积下，以热荷载作用下梁的基频及屈曲临界变温最大化为目标的优化问题. 对两端固支梁截面尺寸优化的研究表明，受热荷载时，采用优化设计可以使频率目标值提高更多；随着热荷载的增大，优化的截面积分布形式与最大化屈曲临界荷载的截面积分布形式更相近；最大化临界变温与最大化轴向力的截面积分布形式非常相似；分析了使轴向力最小的截面积分布，验证了上述现象.

关键词： 热屈曲；热振动；基频；屈曲临界变温

中图分类号： V414.3；V414.19　　**文献标志码：** A

0 引 言

工程中的很多承载结构处于温度变化剧烈的工作环境. 当结构的热变形受到外部约束，或结构各部分温度变化不均匀，将在结构内引起附加的热应力，并改变结构的频率. 当温度荷载增大到一定值时，结构甚至可能发生热屈曲. 热变形、热应力和热屈曲都可能影响结构的功能，甚至使结构失效.

国内外已经有大量的结构热响应分析的研究. 文献[1-4]中系统地介绍了一维、二维、三维弹性体和板壳结构的热应力、热屈曲和热振动的分析. Tauchert[5]综述了板的热变形、热屈曲和热振动的解析解. Thornton[6]和邓可顺[7]研究了板壳和复杂结构的热屈曲问题. 航天航空工业对结构的热性能提出了更高的要求，极大地推动了热结构分析工作的进展. Thornton[8, 9]综述了近40年的发展情况，李松年[10]介绍了航天领域热结构力学的应用背景和工作任务，指出该研究是航天领域中的关键技术之一.

已有的热弹性结构优化研究大部分针对板壳结构，例如，Krysko 等[11]研究了板壳结构的尺寸优化. Tauchert 等[12]以纤维铺设角度为设计变量研究了复合材料层合板优化设计. Cheu[13]研究了涡轮盘的形状优化设计. Jansson 等[14, 15]研究了金属基纤维增强复合材料的热应力优化设计. Gu 等[16]研究了热和机械荷载作用下的火车车轮和涡轮发动机轮盘的形状优化. Rodrigues 等[17]采用均匀化方法研究了热弹性结构的拓扑优化. Li 等采用进化算法研究了热荷载作用下的结构拓扑优化. 对结构热屈曲优化设计有：Noor 等[18]研究了复合材料层合板结构的热屈曲灵敏度分析，Faria 等[19,20]讨论了热残余应力作用的复合材料层合板和圆柱壳结构的优化，Spallino 等[21]采用遗传算法对复合材料层合板进行热屈曲的优化.

本文研究以热荷载作用下梁的基频及热屈曲临界变温为目标的优化问题.

1 问题描述及有限元分析

1.1 问题描述

考虑两端轴向变形受到限制的固支梁，假设梁上均匀分布热荷载 $\Delta t > 0$，即梁结构整体处在均匀的温度场中. 由于轴向位移受到约束，随着热荷载的增大，轴向力增大，梁的自振频率将降低，当热荷载达到一定值时，梁便发生失稳. 当然，如果减少梁的材料，由热荷载产生的轴向力也就下降. 但是，由于所考虑的梁结构还需要满足其他功

收稿日期： 2012-05-01；　**修回日期：** 2012-09-13.
作者简介： 程耿东*(1941-)，男，教授，博士生导师，中国科学院院士，E-mail：chenggd@dlut.edu.cn.

能，例如，梁还受到横向荷载的作用，而梁的横向挠度受到限制，所以假定梁的材料是给定的.

在有热荷载时，改变沿梁长度方向截面尺寸的分布，在改变梁的刚度和质量分布的同时，还可改变梁内的轴向刚度、弯曲刚度和轴向力，这些因素都导致频率及屈曲临界温度的改变. 本文将设计梁截面沿梁长的分布使梁在热荷载下的基频最大化，或者使梁的热屈曲临界变温最高. 求解优化问题时，将长为L的梁划分为等长度的N_e个梁单元，每一段长为ΔL，单元截面积为$A_i(i=1,2,\cdots,N_e)$.

为了求解这一问题，需要梁截面的横截面积A与截面惯性矩I之间有确定的关系. 假设截面形状为矩形，且截面宽度b和高度h的比值为定值，此时

$$\frac{b}{h}=C,\quad A=\frac{b^2}{C},\quad I=\frac{b^4}{12C^3}=\frac{1}{12C}A^2$$

1.2 热荷载下梁的振动与稳定性分析

1.2.1 轴向力求解 为了求解上述问题，首先要求得由温度变化Δt引起的轴向力P. 在温度升高Δt时，如果梁两端位移不受约束，整个梁的自由膨胀为$\alpha\Delta tL$. 在轴向力P的作用下，全梁缩短了$\int_0^L\frac{P}{EA(x)}\mathrm{d}x$，由此可以求得在温度升高$\Delta t$时，如果梁两端位移受到约束，梁内的轴向力

$$P=\frac{\alpha\Delta tLE}{\int_0^L A^{-1}(x)\mathrm{d}x} \tag{1}$$

1.2.2 梁弯曲振动和热失稳的特征问题求解 得到温度变化Δt时的轴向力P后，就可求得考虑轴向力及弯曲的梁单元的几何刚度矩阵. 梁单元的弯曲刚度矩阵、几何刚度矩阵及质量矩阵均可在教科书中得到，在此基础上，结构弯曲刚度矩阵$\boldsymbol{K}_1$、质量矩阵$\boldsymbol{M}$及几何刚度矩阵$\boldsymbol{K}_g$可按常规有限元法组集，并可以建立热荷载作用下结构的频率问题：

$$(\boldsymbol{K}_1+\boldsymbol{K}_g-\omega^2\boldsymbol{M})\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{0} \tag{2}$$

对于热屈曲问题，可归结为求解下式的广义特征值方程：

$$(\boldsymbol{K}_1+\lambda\boldsymbol{K}_g)\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{0} \tag{3}$$

其中式(2)中的ω和$\boldsymbol{\varphi}$是热振动频率和相应振型，式(3)中λ和$\boldsymbol{\varphi}$是梁的屈曲荷载因子和屈曲模态，其中最小特征值λ_1即为屈曲临界荷载因子，结构的热屈曲临界变温$\Delta t_{cr}=\lambda_1\Delta t$.

2 优化列式及灵敏度分析

2.1 优化列式

热荷载作用下梁的振动基频最大化的优化列式可表示为

$$\begin{aligned}
&\text{find}\quad \boldsymbol{A}=(A_1\quad A_2\quad\cdots\quad A_{N_e})\\
&\max\quad \omega_1^2\\
&\text{s.t.}\quad V=\sum_{i=1}^{N_e}V_i=\Delta L\sum_{i=1}^{N_e}A_i=\overline{V};\\
&\qquad A_{\min}\leqslant A_i\leqslant A_{\max},\ i=1,2,\cdots,N_e\\
&\qquad(\boldsymbol{K}_1(\boldsymbol{A})+\boldsymbol{K}_g(\boldsymbol{A})-\omega_j^2\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A}))\boldsymbol{\varphi}_j=\boldsymbol{0}\\
&\qquad\boldsymbol{\varphi}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\varphi}_k=\delta_{jk};\ j\geqslant k,\ k,j=1,\cdots,J
\end{aligned} \tag{4}$$

梁热屈曲临界变温最大化的优化列式可表示为

$$\begin{aligned}
&\text{find}\quad \boldsymbol{A}=(A_1\quad A_2\quad\cdots\quad A_{N_e})\\
&\max\quad \lambda_1\\
&\text{s.t.}\quad V=\sum_{i=1}^{N_e}V_i=\Delta L\sum_{i=1}^{N_e}A_i=\overline{V};\\
&\qquad A_{\min}\leqslant A_i\leqslant A_{\max},\ i=1,2,\cdots,N_e\\
&\qquad(\boldsymbol{K}_1(\boldsymbol{A})+\lambda_j\boldsymbol{K}_g(\boldsymbol{A}))\boldsymbol{\varphi}_j=\boldsymbol{0}\\
&\qquad\boldsymbol{\varphi}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_g(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\varphi}_k=\delta_{jk};\ j\geqslant k,\ k,j=1,\cdots,J
\end{aligned} \tag{5}$$

其中$\overline{V}$是给定的材料体积用量，$\boldsymbol{\varphi}_j$为对质量阵(或几何刚度阵)归一化后的第j阶振型(或屈曲模态)，δ_{jk}是Kronecker符号. 在上述优化列式的约束条件中，只需要求出最低的特征值，但是为了考虑可能发生的振型切换，求出了多个特征值.

2.2 设计灵敏度分析

为了使热荷载下梁的基频以及屈曲临界变温最大化，本文采用了梯度类算法，所以需要进行灵敏度分析.

梁的基频对设计变量A_i的灵敏度如下：

$$\frac{\partial\omega_1^2}{\partial A_i}=\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial\boldsymbol{K}_1}{\partial A_i}+\frac{\partial\boldsymbol{K}_g}{\partial A_i}-\omega_1^2\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial A_i}\right)\boldsymbol{\varphi} \tag{6}$$

屈曲荷载因子对设计变量A_i的灵敏度如下：

$$\frac{\partial\lambda_1}{\partial A_i}=\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial\boldsymbol{K}_1}{\partial A_i}+\lambda_1\frac{\partial\boldsymbol{K}_g}{\partial A_i}\right)\boldsymbol{\varphi} \tag{7}$$

式(6)、(7)中$\boldsymbol{\varphi}$分别为归一化后的振动一阶模态和屈曲一阶模态.

式(2)、(3)中，结构弯曲刚度矩阵$\boldsymbol{K}_1$和质量矩阵$\boldsymbol{M}$对设计变量的灵敏度求解比较容易，几何刚度矩阵$\boldsymbol{K}_g$的灵敏度可表示为

$$\frac{\partial\boldsymbol{K}_g}{\partial A_i}=\frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{N_e}\boldsymbol{k}_g^i\right)}{\partial A_i}=\sum_{i=1}^{N_e}\frac{\partial\boldsymbol{k}_g^i}{\partial A_i}=\sum_{i=1}^{N_e}\left(\int_l\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\frac{\partial P}{\partial A_i}\mathrm{d}x\right) \tag{8}$$

其中$\boldsymbol{G}$为单元位移形函数对节点坐标的灵敏度. 这样，原目标函数对设计变量的灵敏度归结为求单元

轴向力 P 对设计变量 A_i 的灵敏度. 由式(1)可得

$$\frac{\partial P}{\partial A_i}=\frac{P^2}{\alpha\Delta t N_e E}\frac{1}{A_i^2} \tag{9}$$

利用这些公式就可得到优化问题目标函数的灵敏度，并利用移动渐近线法(method of moving asymptotes，MMA)求解器进行优化求解.

3　数值算例

运用上面的列式，本文求解了一系列问题，这里只给出特定尺寸下的一些结果. 优化时采用的梁的结构尺寸参数及材料属性参数如表 1 所示.

表 1　梁的结构尺寸参数及材料属性参数

Tab. 1　Structure parameters and material property parameters of beam

L/m	V/m^3	C	N_e	α/℃$^{-1}$
10	2.5	1	100	2.4×10^{-5}

E/Pa	ρ/(kg·m^{-3})	A_{min}/m^2	A_{max}/m^2
0.7×10^{11}	2 700	0.15	0.35

3.1　最大化基频设计

(1)没有热荷载作用时

$\Delta t=0$ ℃时，初始均匀设计的基频为 26.20 Hz，优化后基频提高到 34.50 Hz，提高了 31.7%. 迭代收敛很快，截面积分布示意图见图 1. 优化结果中材料大部分分布在靠近约束的两端，两端端部截面积为上限 0.35 m^2，中间有相当长的一段梁的截面积均为下限 0.15 m^2.

(2)有热荷载作用时

$\Delta t=100$ ℃时，初始均匀设计由热荷载引起的轴向力为 4.20×10^7 N；结构基频为 22.10 Hz，低于无热荷载时的情况. 优化后，梁基频提高到 30.10 Hz，轴向力降低到 3.62×10^7 N. 与初始设计相比优化后频率提高了 36.2%，轴向力降低了 0.58×10^7 N. 与没有受到热荷载的情形相比，结构基频提高幅度更大.

$\Delta t=200$ ℃时，初始均匀设计的轴向力为 8.40×10^7 N；结构基频为 17.10 Hz，低于 $\Delta t=100$ ℃时的情况. 优化后，梁基频提高到 25.10 Hz，轴向力降低到 7.55×10^7 N. 与初始设计相比优化后频率提高了 46.8%，轴向力降低了 0.85×10^7 N，比 $\Delta t=100$ ℃时的情形提高幅度更大.

$\Delta t=300$ ℃时，初始均匀设计的轴向力为 1.3×10^8 N；结构基频为 9.38 Hz，低于 $\Delta t=200$ ℃时的情况. 优化后，梁基频提高到 19.72 Hz，轴向力降低到 1.1×10^7 N. 从表 2 的数据中可见随着温度的升高最优频率下降，频率提高量明显.

图 2 给出 Δt 为 0、100、200、300 ℃时第一阶频率的优化迭代历史以及 $\Delta t=200$ ℃时优化结果的截面积分布示意图，发现迭代历史稳定，收敛较快. 从图 1 中可以看出，与不考虑热荷载作用的结果相比，有热荷载作用时梁的中间位置会有一段凸起，而且热荷载越大，分布在中间区域的材料越多，中间位置的凸起越大. 优化截面积的分布除了直接提高频率，还可以降低轴向力，这可以进一步提高梁的频率，而且随着热荷载升高，这种优势更加明显，因此在考虑热荷载的优化结果中频率提高量更为明显.

3.2　最大化屈曲临界变温设计

均匀梁的屈曲临界变温 $\Delta t_{cr}=342.7$ ℃，此时对应的临界轴向力 $P_{cr}=1.44\times10^8$ N. 优化后屈曲临界变温 $\Delta t_{cr}=474.5$ ℃，对应的临界轴向力 $P_{cr}=1.81\times10^8$ N，相对于初始均匀设计临界变温提高了 38.5%，临界轴向力提高了 25.7%.

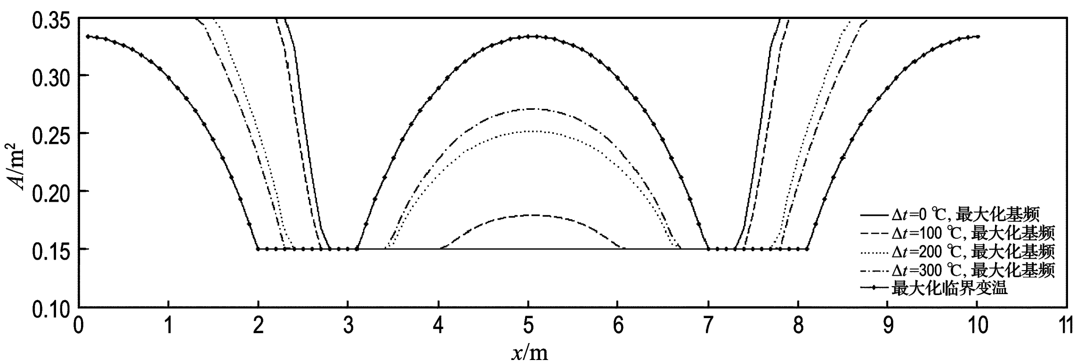

图 1　两端固支梁最大化屈曲临界变温以及不同变温下最大化基频截面积分布

Fig. 1　Maximum critical buckling temperature and cross-sectional area distribution for maximum fundamental frequency of different temperature of clamped-clamped beam

表2　目标函数值对比

Tab.2　Comparison of the objective function value

Δt/℃	f_b/Hz 均匀设计	f_b/Hz 优化设计	改进量/%
0	26.20	34.50	31.7
100	22.10	30.10	36.2
200	17.10	25.10	46.8
300	9.38	19.72	110.2

Olhoff(1977)研究了在给定材料体积的条件下,受到轴向压力柱的失稳临界轴向力最大化的设计.本文独立地重复计算了Olhoff的优化结果,其结果对应的临界轴向力 $P_{cr}=1.84\times10^8$ N,屈曲临界变温 $\Delta t_{cr}=472.3$ ℃,图3给出本文得到的最大化屈曲临界变温的优化结果和由Olhoff得到的最大化临界轴向力的截面积分布示意图,两个结果非常相近.从图3中还可看出最大化临界变温的截面积分布形式与热荷载下最大化梁的基频的设计相似,且与热荷载较大时的截面积分布形式更为接近.

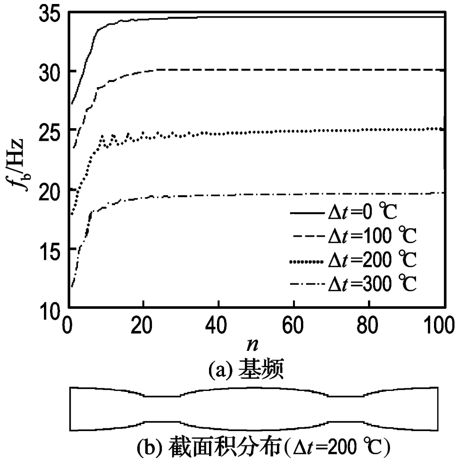

图2　两端固支梁优化设计的结构基频迭代历史及优化结果截面积分布

Fig.2　Fundamental frequency iteration history of clamped-clamped beam and the optimization results of cross-sectional area distribution

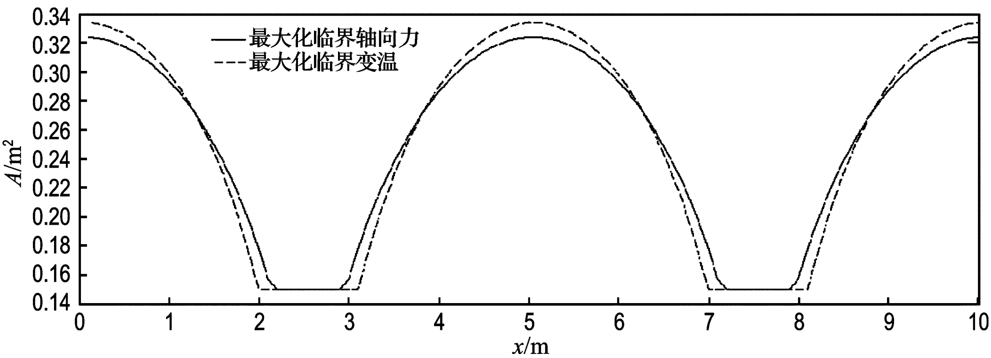

图3　两端固支梁最大化临界轴向力与最大化临界变温的截面积分布

Fig.3　Cross-sectional area distribution of maximum critical buckling temperature and the axial pressure of clamped-clamped beam

4　结果与讨论

从上面的结果可知,当最大化梁的基频时,优化方法导致的结构频率的改进量,随热荷载的增大而增大.随着热荷载的增大,最大化频率的梁的频率逐渐降低(表2),其横截面积的分布和最大化临界变温的结果愈趋相似(图1).这一现象是可以理解的,根据受到轴向力的梁的振动理论和稳定性理论,如果轴向力增大到使得柱的自振频率为零,柱就发生失稳.结构频率的降低和失稳是密切相关的.

从图3还可看到,最大化临界轴向力和最大化临界变温的最优截面积分布非常相似.下面对这一现象进行分析.为此,先求解在给定热荷载和材料体积的条件下,使得梁内轴向力最小的最优截面积分布设计.

由式(2)可以构造给定材料体积,使轴向力最小化的梁截面积沿梁长的最优分布问题如下:

$$\begin{aligned}&\text{Find}\quad A(x);\ 0\leqslant x\leqslant L\\&\min\quad P=\frac{\alpha\Delta tLE}{\int_0^L A^{-1}(x)\mathrm{d}x}\\&\text{s.t.}\quad \int_0^L A(x)\mathrm{d}x=V;\\&\qquad A_{\min}\leqslant A(x)\leqslant A_{\max}\end{aligned}\tag{10}$$

将其离散化并适当变换后,可改写成

$$\begin{aligned}&\text{Find}\quad \boldsymbol{A}=(A_1\quad A_2\quad\cdots\quad A_n)^{\mathrm{T}}\\&\min\quad f=-\Delta L\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{A_i}\\&\text{s.t.}\quad \Delta L\sum_{i=1}^{n}A_i=V;\\&\qquad A_{\min}\leqslant A_i\leqslant A_{\max}\end{aligned}\tag{11}$$

这一优化问题的可行域是一个由线性约束围成的凸多面体. 目标函数为可分离函数，其二阶导数矩阵为对角阵：

$$H(A_1,A_2,\cdots,A_n)=-\Delta L\times \mathbf{diag}\left\{\frac{2}{A_1^3},\frac{2}{A_2^3},\cdots,\frac{2}{A_n^3}\right\} \tag{12}$$

因此目标函数是凹函数，其最小值在可行凸多面体的角点上取得. 根据这一结论，使轴向力最小的最优设计的截面积分布为开关型（Bang-Bang 型），即最多除了一个单元外，所有单元的截面积或取最大值或取最小值，取最大值和最小值的单元数分别为 m 和 p 个：

$$m=\mathrm{int}\left(\frac{V-A_{\min}L}{\Delta L(A_{\max}-A_{\min})}\right) \tag{13}$$

$$p=\mathrm{int}\left(\frac{A_{\max}L-V}{\Delta L(A_{\max}-A_{\min})}\right) \tag{14}$$

其中 int(•) 表示下取整函数，式(13)、(14) 给出的 m 与 p 的和等于 n 或 $n-1$，如果 $m+p=n-1$，则梁中一个单元的厚度为 $(V-mA_{\max}-pA_{\min})/\Delta L$. 值得指出的是，这些取最小最大值的截面在结构内的位置对轴向力没有影响. 因此，满足这样条件的最优解很多，它们的截面积分布可以很不相同，但在给定的热荷载下都给出相同的轴向力.

对于表 1 条件的梁，为了使变温产生的轴向力最小，根据式(13)、(14)，选取 50 个截面积为 0.15 m^2、50 个截面积为 0.35 m^2 的 100 个单元，计算不同截面积分布下变温产生的轴向力、使得结构失稳的临界轴向力以及临界变温，结果如表 3 所示. 这些不同的设计虽然热荷载产生的轴向力相同，但是不同的分布形式对应不同的临界轴向力以及临界变温.

表 3　$\Delta t=1$ ℃时，最小轴向力梁的轴向力、临界轴向力和屈曲临界变温

Tab. 3　Axial pressure, critical load and critical thermal buckling temperature of the minimum axial pressure beam ($\Delta t=1$ ℃)

截面积分布	$P_{\Delta t}/10^5$ N	$P_{cr}/10^8$ N	t_{cr}/℃
0.15 m^2(前 50 个)；0.35 m^2(后 50 个)	3.53	0.89	254.80
0.15 m^2(25 个)；0.35 m^2(50 个)；0.15 m^2(25 个)	3.53	1.30	367.18
0.15 m^2(25 个)；0.35 m^2(25 个)；0.15 m^2(25 个)；0.35 m^2(25 个)	3.53	1.22	346.44
0.35 m^2(17 个)；0.15 m^2(25 个)；0.35 m^2(16 个)；0.15 m^2(25 个)；0.35 m^2(17 个)	3.53	1.42	401.91
0.15 m^2；0.35 m^2(交替分布)	3.53	0.88	248.12

通过优化梁的截面积分布来最大化梁的临界变温时，截面积的调整产生两个效果：一是调整轴向刚度从而降低轴向力，二是调整弯曲刚度从而提高失稳临界力. 由于具有相同轴向力的截面积分布可以有很多不同的设计，梁最大化临界变温时，优化结构就必然更多地根据调整弯曲刚度从而提高失稳临界力的要求决定截面积的分布. 因此，最大化临界轴向力和最大化临界变温的最优截面积分布相似.

5　结　论

本文在给定梁材料体积条件下对热荷载作用下梁振动及屈曲特性进行优化设计. 文中分别以梁基频最大化和热屈曲临界变温最大化为目标，研究了梁结构截面尺寸优化设计问题. 在基频最大化设计中，热荷载的存在对优化结果影响很大，考虑热荷载时得到的优化结果与无热荷载时的结果差异很大，从目标函数值的对比上可以看出，考虑热荷载的情况下优化的效果更明显. 在热屈曲临界变温最大化的优化时，截面积分布形式与文献[22]中使轴向力最大的最优截面积分布形式相似. 本文结果表明，当结构中存在热荷载时，采用优化的方法能够有效地提高结构的基频和热屈曲临界温度，而且如果实际工程中的结构处于热的工作环境中，对其进行优化设计时必须要考虑热荷载的影响.

研究中发现，当给定梁截面尺寸下限小于某一值时，优化过程中将出现重特征值问题，在这种情况下应当采用重特征值问题的优化方法进行优化求解，这将在后续的工作中进行研究.

参考文献：

[1] Boley B A, Weiner J H. **Theory of Thermal Stresses** [M]. New York: Wiley, 1960.

[2] Nowinski J L. **Theory of Thermoelasticity with Applications** [M]. Alphen aan den Rijn, The Netherlands: Sijthoff & Noordhoff International Publishers, 1978.

[3] 王洪纲. 热弹性力学概论[M]. 北京：清华大学出版社，1989.
WANG Hong-gang. **Thermal Elastic Mechanics Introduction** [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1989. (in Chinese)

[4] 严宗达，王洪礼. 热应力[M]. 北京：高等教育出版社，1993.

YAN Zong-da, WANG Hong-li. **Thermal Stress** [M]. Beijing: Higher Education Press, 1993. (in Chinese)

[5] Tauchert T R. Thermally induced flexure, buckling and vibration of plates [J]. **Applied Mechanics Review**, 1991, **44**(8): 347-360.

[6] Thornton E A. Thermal buckling of plates and shells [J]. **Applied Mechanics Review**, 1993, **46**(10): 485-505.

[7] 邓可顺. 复杂结构热屈曲有限元分析[J]. 计算结构力学及其应用, 1994, **11**(2): 130-139.
DENG Ke-shun. Finite element analysis of thermal buckling for complex structure [J]. **Computational Structural Mechanics and Application**, 1994, **11**(2): 130-139. (in Chinese)

[8] Thornton E A. Thermal-structural analysis of large space structures: an assessment of recent advances [J]. **Journal of Spacecraft**, 1985, **22**(4): 385-393.

[9] Thornton E A. Thermal structures: four decades of progress [J]. **Journal of Aircraft**, 1992, **29**(3): 485-497.

[10] 李松年. 航天结构热力力学的任务和应用[J]. 力学进展, 1994, **24**(1): 1-23.
LI Song-nian. Thermomechanics of aerospace structures — Tasks and applications [J]. **Advances in Mechanics**, 1994, **24**(1): 1-23. (in Chinese)

[11] Krysko V A, Bochkarev V V. Design of plates and shells near optimal on weight with allowance for the temperature effect [J]. **Soviet Applied Mechanics**, 1982, **17**(11): 990-993.

[12] Tauchert T R, Adibbatla S. Optimum thermoelastic design of laminated plates [J]. **Journal of Thermal Stresses**, 1985, **8**(1): 11-24.

[13] Cheu T C. Procedures for shape optimization of gas turbine disks [J]. **Computers and Structures**, 1990, **34**(1): 1-4.

[14] Jansson S, Leckie F A. Reduction of thermal stresses in continuous fiber reinforced metal matrix composites with interface layers [J]. **Journal of Composite Materials**, 1992, **26**(10): 1474-1486.

[15] Doghri I, Jansson S, Leckie F A, *et al*. Optimization of coating layers in the design of ceramic fiber reinforced metal matrix composites [J]. **Journal of Composite Materials**, 1994, **28**(2): 167-187.

[16] GU Yuan-xian, CHENG Geng-dong. Structural modeling and sensitivity analysis of shape optimization [J]. **Structural Optimization**, 1993, **6**(1): 29-37.

[17] Rodrigues H, Pernandes P A. A material based model for topology optimization of thermoelastic structures [J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1995, **38**(12): 1951-1965.

[18] Noor A K, Peters J M. Thermomechanical buckling of multilayered composite plates [J]. **Journal of Engineering Mechanics**, 1992, **118**(2): 351-366.

[19] Faria A R, Hansen J S. Optimal buckling loads of nonuniform composite plates with thermal residual stresses [J]. **Journal of Applied Mechanics**, 1999, **66**(2): 388-395.

[20] Foldager J P, Hansen J S, Olhoff N. Optimization of the buckling load for composite structures taking thermal effects into account [J]. **Structural Optimization**, 2001, **21**(1): 14-31.

[21] Spallino R, Thierauf G. Thermal buckling optimization of composite laminates by evolution strategies [J]. **Computers and Structures**, 2000, **78**(5): 691-697.

[22] Seyranian A P, Lund E, Olhoff N. Multiple eigenvalues in structural optimization problems [J]. **Structural Optimization**, 1994, **8**(4): 207-227.

Optimum design of beam under thermal loading for fundamental frequency and critical thermal buckling temperature

CHENG Geng-dong*, YU Na, WANG Bin

(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: Changing the distribution of the beam cross-sections can change the axial pressure, thus improve fundamental frequency and critical thermal buckling temperature. Beam under thermal load for maximum fundamental frequency and critical thermal buckling temperature is optimized with given volume constraint. Size optimization of the clamped-clamped beam cross-sections shows that optimum frequency increases more significantly under thermal load. With increasing thermal load, the optimum solution of maximum frequency design is similar to the solution of maximum critical thermal buckling temperature design; the optimum solution of maximum critical thermal buckling temperature design is similar to the solution of maximum critical force design. The beam cross-sections distribution of minimum axial pressure is analyzed and the above phenomena are explained.

Key words: thermal buckling; thermal vibration; fundamental frequency; critical thermal buckling temperature