应用数学

文章编号：1000-8608(2011)04-0616-05

q-对称熵损失函数下 Pareto 分布参数估计

宋立新*， 王明秋， 王晓光

（大连理工大学 数学科学学院，辽宁 大连 116024）

摘要： Pareto 分布作为一种收入分布有着很重要的现实意义，其形状参数的大小直接影响收入分布的均衡程度，因此在经济中有着广泛的应用价值. 主要研究了 q-对称熵损失函数下 Pareto 分布形状参数的最小风险同变估计和 Bayes 估计. 通过证明得到，在适当的 Γ-先验分布下，α 的 Bayes 估计都具有统一的形式 $[cT+d]^{-1}$. 并且，针对 c 和 d 的各种不同取值情况，讨论了 $[cT+d]^{-1}$ 的可容许性和不可容许性，给出了 q-对称熵损失函数下参数的最小最大估计.

关键词： 同变估计；Bayes 估计；最小最大估计；可容许性

中图分类号： O212.8 **文献标志码：** A

0 引 言

在参数估计问题上，常见的损失函数主要有绝对值损失、平方损失和 0-1 损失. 近年来随着研究的深入，熵损失函数引起了人们的注意，并在此基础上提出了对称熵损失函数及 q-对称熵损失函数. 有关各种总体分布下不同损失函数的参数估计问题的研究很多. 王德辉等[1]研究了熵损失函数下 Poisson 分布参数倒数的估计问题，得出了熵损失下，$[cT(X)+d]^{-1}$ 形式的一类估计的可容许性和不可容许性，并给出了可容许估计存在性的充要条件. 文献[2]研究了熵损失函数下参数估计的不变性和本质完全类，讨论了在熵损失函数下，刻度参数的可容许估计的不变性及 Bayes 估计的不变性. 文献[3]研究了在熵损失函数下，巴斯卡分布可靠度的 Bayes 估计及其可容许性，并且给出了 Bayes 置信下限以及多层 Bayes 估计的表达式. Ren 等[4]验证了指数分布下绝对值损失、平方损失、LINEX 损失和熵损失的 Bayes 估计，并证明了在 LINEX 损失下的 Bayes 估计更具有一般性，它包括了极大似然估计和其他特定情况下的 Bayes 估计. 但是对于 q-对称熵损失函数下 Pareto 分布参数的 Bayes 估计及其他的一些性质尚没有研究.

Pareto 分布是 Vilfredo Pareto 将其作为一种收入分布最先介绍的，在应用统计中有着广泛的应用，主要用来描述诸如个人收入、城市人口的容量. 此外，自然现象的发生、股票价格的波动、保险风险等也可以用 Pareto 分布来描述[5]. 两参数 Pareto 分布的密度函数是

$$f(x)=\frac{\alpha\theta^{\alpha}}{(x+\theta)^{\alpha+1}};\ \alpha>0,\theta>0,x>0$$

其中 α 为形状参数，θ 为尺度参数，假设 α 未知，θ 已知. 当损失函数为

$$L(\alpha,\delta)=\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{q}+\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{q}-2;\ q>0$$

时，称此函数为 q- 对称熵损失函数，其中 α 为待估的形状参数，δ 为其估计量.

本文在前面研究的基础上，重点研究 q-对称熵损失函数下 Pareto 分布的参数估计问题，给出在 q-对称熵损失函数下 Pareto 分布的形状参数的最小风险同变（minimum risk equivariant，MRE）估计、Bayes 估计、最小最大（minimax）估计等问题，并对这些估计量的可容许性进行讨论和证明.

1 α 的最小风险同变估计和 Bayes 估计

本章将给出 q- 对称熵损失函数下 α 的最小风

收稿日期： 2009-05-03； **修回日期：** 2011-04-11.
基金项目： 大连理工大学前沿交叉学科基金资助项目(DUT10JS06)；高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(20100041110036).
作者简介： 宋立新*(1966-)，男，教授，博士生导师，E-mail：lxsong@dlut.edu.cn.

险同变估计的具体形式，以及任一先验分布下 α 的 Bayes 估计，并证明它们的唯一性.

定理 1　设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自参数 θ 已知、α 未知的 Pareto 分布的一组样本，记 $\boldsymbol{X} = (X_1 \quad X_2 \quad \cdots \quad X_n)$，$\boldsymbol{Z} = (Z_1 \quad Z_2 \quad \cdots \quad Z_n)$，其中 $Z_i = X_i / X_n$，$i = 1, 2, \cdots, n$，$n \geqslant 2$，在 q-对称熵损失函数下，假设 $\delta_0(\boldsymbol{X})$ 是 α 的同变估计量，且其风险有限，那么 α 的 MRE 估计量为

$$\delta^*(\boldsymbol{X}) = \delta_0(\boldsymbol{X}) \left[E_1\left(\frac{1}{\delta_0^q} \middle| \boldsymbol{Z} \right) \middle/ E_1(\delta_0^q \mid \boldsymbol{Z}) \right]^{1/2q} \tag{1}$$

且在几乎处处相等的意义下是唯一的，其中 E_1 表示 $\alpha = 1$ 时的数学期望.

定理 2　记 $\boldsymbol{X} = (X_1 \quad X_2 \quad \cdots \quad X_n)$，损失函数为 $L(\alpha, \delta) = \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^q + \left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^q - 2 \ (q > 0)$，对任一先验分布，$\alpha$ 的 Bayes 估计为 $\delta_B(\boldsymbol{X}) = [E(\alpha^q \mid \boldsymbol{X}) / E(\frac{1}{\alpha^q} \mid \boldsymbol{X})]^{1/2q}$，并且若存在 δ'，其 Bayes 风险 $R(\delta') < +\infty$，则此 Bayes 估计是唯一的.

证明　在 q-对称熵损失函数 $L(\alpha, \delta) = \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^q + \left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^q - 2 \ (q > 0)$ 下，δ 对应的 Bayes 风险为

$$R(\delta) = E(L(\alpha, \delta)) = E(E(L(\alpha, \delta) \mid \boldsymbol{X})) \tag{2}$$

要使 $R(\delta)$ 取得最小值，只需 $E(L(\alpha, \delta) \mid \boldsymbol{X})$ 几乎处处达到最小. 由于

$$E(L(\alpha, \delta) \mid \boldsymbol{X}) = E\left[\left(\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^q + \left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^q - 2 \right) \middle| \boldsymbol{X} \right]$$

故只需 $E\left[\left(\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^q + \left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^q - 2 \right) \middle| \boldsymbol{X} \right]$ 取最小值即可，即 $\frac{1}{\delta^q} E(\alpha^q \mid \boldsymbol{X}) + \delta^q E\left(\frac{1}{\alpha^q} \middle| \boldsymbol{X} \right)$ 达到最小，因为 δ 非负，所以最小值不会是 0 或者无穷远点. 若 $\delta = 0$ 或 $\delta = \infty$，则 $\frac{1}{\delta^q} E(\alpha^q \mid \boldsymbol{X}) + \delta^q E\left(\frac{1}{\alpha^q} \middle| \boldsymbol{X} \right)$ 就是无穷大，不可能取得最小值，因此 δ 不是边界点. 对 $\frac{1}{\delta^q} E(\alpha^q \mid \boldsymbol{X}) + \delta^q E\left(\frac{1}{\alpha^q} \middle| \boldsymbol{X} \right)$ 微分，并令其为 0，有

$$q\delta^{q-1} E\left(\frac{1}{\alpha^q} \middle| \boldsymbol{Z} \right) - q \frac{1}{\delta^{q+1}} E(\alpha^q \mid \boldsymbol{Z}) = 0$$

于是

$$\delta_B(\boldsymbol{X}) = \left[E(\alpha^q \mid \boldsymbol{X}) \middle/ E\left(\frac{1}{\alpha^q} \middle| \boldsymbol{X} \right) \right]^{1/2q} \tag{3}$$

下面证明在此损失函数下 α 的 Bayes 估计是唯一的，只需证明 $\delta_B(\boldsymbol{X})$ 的 Bayes 风险有限即可. 即只需说明 $R(\delta_B(\boldsymbol{X})) < +\infty$. 由题设 $R(\delta'(\boldsymbol{X})) < +\infty$，又 $R(\delta_B(\boldsymbol{X})) < R(\delta'(\boldsymbol{X}))$，所以 $R(\delta_B(\boldsymbol{X})) < +\infty$. □

假设 α 的先验分布为参数 β、γ 均已知的 Γ-分布，则 α 的密度函数为

$$\pi(\alpha) = \frac{\gamma^\beta}{\Gamma(\beta)} \alpha^{\beta-1} \mathrm{e}^{-\gamma\alpha};\ \alpha,\ \beta, \gamma > 0 \tag{4}$$

下面求先验分布为 Γ-分布时 α 的 Bayes 估计. 因为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的联合密度函数为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n \mid \alpha) = \alpha^n \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{x_i}{\theta}\right)^{-(\alpha+1)} \tag{5}$$

所以 α 的后验分布密度为

$$\begin{aligned} \pi(\alpha \mid \boldsymbol{X}) = {} & \frac{f(x_1, x_2, \cdots, x_n \mid \alpha)\pi(\alpha)}{\int_0^{+\infty} f(x_1, x_2, \cdots, x_n \mid \alpha)\pi(\alpha) \mathrm{d}\alpha} = \\ & \left[\alpha^n \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{x_i}{\theta}\right)^{-(\alpha+1)} \frac{\gamma^\beta}{\Gamma(\beta)} \alpha^{\beta-1} \mathrm{e}^{-\gamma\alpha} \right] \Big/ \\ & \left[\int_0^{+\infty} \left(\alpha^n \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{x_i}{\theta}\right)^{-(\alpha+1)} \times \right.\right. \\ & \left.\left. \frac{\gamma^\beta}{\Gamma(\beta)} \alpha^{\beta-1} \mathrm{e}^{-\gamma\alpha} \right) \mathrm{d}\alpha \right] = \\ & \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{x_i}{\theta}\right) + \gamma \right)^{n+\beta}}{\Gamma(n+\beta)} \alpha^{n+\beta-1} \times \\ & \mathrm{e}^{-\alpha\left(\sum_{i=1}^{n} \ln(1 + x_i/\theta) + \gamma \right)} \end{aligned} \tag{6}$$

故 α 的后验分布也是 Γ-分布，参数为 $n + \beta$ 和 $\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{x_i}{\theta}\right) + \gamma$. 由定理 2 得

$$\begin{aligned} \delta_B(\boldsymbol{X}) = {} & \left[E(\alpha^q \mid \boldsymbol{X}) \middle/ E\left(\frac{1}{\alpha^q} \middle| \boldsymbol{X} \right) \right]^{1/2q} = \\ & \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{x_i}{\theta}\right) + \gamma}{\sqrt[2q]{(n+\beta+q-1)\cdots(n+\beta-q)}} \right]^{-1} \end{aligned} \tag{7}$$

取 $\delta'(\boldsymbol{X}) = \delta_B(\boldsymbol{X})$，令 $T = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{x_i}{\theta}\right)$，下面证明 $R(\delta_B(\boldsymbol{X})) < +\infty$.

$$\begin{aligned} R(\delta_B(\boldsymbol{X})) = {} & E[L(\alpha, \delta_B(\boldsymbol{X}))] = \\ & E\left[\left(\frac{\alpha}{\delta_B(\boldsymbol{X})} \right)^q + \left(\frac{\delta_B(\boldsymbol{X})}{\alpha} \right)^q - 2 \right] = \\ & \frac{1}{\sqrt{(n+\beta+q-1)\cdots(n+\beta-q)}} \times \\ & E[\alpha^q (T+\gamma)^q] + \\ & \sqrt{(n+\beta+q-1)\cdots(n+\beta-q)} \times \end{aligned}$$

$$E\left[\frac{1}{\alpha^q(T+\gamma)^q}\right]-2 \tag{8}$$

下面只需证明 $E[\alpha^q(T+\gamma)^q]<+\infty$，$E\left[\frac{1}{\alpha^q(T+\gamma)^q}\right]<+\infty$ 即可.

首先证明统计量 T 服从 Γ-分布. 因为 X 的密度函数为 $f(x)=\frac{\alpha}{\theta}\left(1+\frac{x}{\theta}\right)^{-(\alpha+1)}$，令 $Y=\ln\left(1+\frac{X}{\theta}\right)$，那么 Y 的分布密度函数为 $g(y)=\alpha e^{-\alpha y}$，$Y$ 服从参数为 α 的指数分布. 所以统计量 T 服从参数为 n、α 的 Γ-分布，(T,α) 的联合密度函数为 $f(T,\alpha)=\frac{\alpha^n}{\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-\alpha t}\ \frac{\gamma^\beta}{\Gamma(\beta)}\alpha^{\beta-1}e^{-\gamma\alpha}$，从而

$$E\left(\frac{1}{\alpha^q(T+\gamma)^q}\right)\leqslant E\left(\frac{1}{\alpha^qT^q}\right)=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\alpha^q}\ \frac{1}{t^q}\ \frac{\alpha^n}{\Gamma(n)}\times t^{n-1}e^{-\alpha t}\ \frac{\gamma^\beta}{\Gamma(\beta)}\alpha^{\beta-1}e^{-\gamma\alpha}\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}\alpha=\frac{\gamma^\beta\Gamma(n-q)}{\Gamma(n)\Gamma(\beta)}\ \frac{\Gamma(\beta)}{\gamma^\beta}=\frac{\Gamma(n-q)}{\Gamma(n)}<+\infty$$

根据 C_r 不等式有

$$E[\alpha^q(T+\gamma)^q]\leqslant C_r(E(\alpha T)^q+E(\alpha\gamma)^q)=C_r\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left(\alpha^qt^q\ \frac{\alpha^n}{\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-\alpha t}\times\frac{\gamma^\beta}{\Gamma(\beta)}\alpha^{\beta-1}e^{-\gamma\alpha}\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}\alpha+C_r\int_0^{+\infty}\alpha^q\gamma^q\ \frac{\gamma^\beta}{\Gamma(\beta)}\alpha^{\beta-1}e^{-\gamma\alpha}\mathrm{d}\alpha=C_r\frac{\Gamma(n+q)}{\Gamma(n)}+C_r\frac{\Gamma(q+\beta)}{\Gamma(\beta)}<+\infty$$

其中

$$C_r=\begin{cases}1; & 0\leqslant r\leqslant 1\\ 2^{r-1}; & r>1\end{cases}$$

因此 $R(\delta_B(\boldsymbol{X}))<+\infty$，所以这个 Bayes 解是唯一的.

2 α 的形如 $[cT+d]^{-1}$ 估计类的可容许性

由上章的结论可看出，在适当的 Γ-先验分布下，α 的 Bayes 估计具有统一的形式 $[cT+d]^{-1}$. 而 $[cT+d]^{-1}$ 的可容许性和不可容许性显然与 c 和 d 的取值有关. 下面分别就 c 和 d 的不同取值情况进行讨论. 以下记

$$T=\sum_{i=1}^n\ln\left(1+\frac{x_i}{\theta}\right)$$

$$c^*=1/\sqrt[2q]{(n+q-1)\cdots(n-q)}$$

其中 $n>q$.

定理 3 当 $0\leqslant c<c^*$，$d>0$ 时，估计量 $[cT+d]^{-1}$ 是可容许的.

证明 在损失函数 $L(\alpha,\delta)=\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^q+\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^q-2(q>0)$ 下，已经证明了 α 有唯一的 Bayes 解 $\delta_B(\boldsymbol{X})=\left[\frac{T+\gamma}{\sqrt[2q]{(n+\beta+q-1)\cdots(n+\beta-q)}}\right]^{-1}$，此时 α 的先验分布密度为

$$\pi(\alpha)=\frac{\gamma^\beta}{\Gamma(\beta)}\alpha^{\beta-1}e^{-\gamma\alpha};\ \beta>0,\gamma>0 \tag{9}$$

令

$$c=\frac{1}{\sqrt[2q]{(n+\beta+q-1)\cdots(n+\beta-q)}}$$

$$d=\frac{\gamma}{\sqrt[2q]{(n+\beta+q-1)\cdots(n+\beta-q)}}$$

则一定存在这样的 $\beta>0$，$\gamma>0$，满足 $0<c<c^*$，$d>0$.

此时估计量 $[cT+d]^{-1}$ 是可容许的. 如果存在另一个估计 $\delta(\boldsymbol{X})$ 好于 $\delta_B(\boldsymbol{X})$，则一定有 $\delta(\boldsymbol{X})$ 对应的风险小于等于 $\delta_B(\boldsymbol{X})$ 对应的风险，即风险 $R(\delta(\boldsymbol{X}))\leqslant R(\delta_B(\boldsymbol{X}))$，而 $\delta_B(\boldsymbol{X})$ 是风险最小且唯一的，所以如果 $R(\delta_B(\boldsymbol{X}))<+\infty$，则产生矛盾. 也就是说 $\delta_B(\boldsymbol{X})$ 是可容许的. 前面证明了 $R(\delta_B(\boldsymbol{X}))<+\infty$，从而 $\delta_B(\boldsymbol{X})$ 是可容许的. 故当 $0<c<c^*$，$d>0$ 时，估计量 $[cT+d]^{-1}$ 是可容许的.

当 $c=0$，$d>0$，估计量为常值 $1/d$. 如果此估计量是不可容许的，则必存在某一估计量 $\delta_1(\boldsymbol{X})$ 好于 $1/d$，即对所有的 α，都有 $0\leqslant R(\alpha,\delta_1(\boldsymbol{X}))\leqslant R(\alpha,1/d)$，存在某些 α 使得严格不等式成立. 所以当 $\alpha=1/d$ 时，有 $0\leqslant R(1/d,\delta_1(\boldsymbol{X}))\leqslant R(1/d,1/d)=0$，即 $R(1/d,\delta_1(\boldsymbol{X}))=0$，由损失函数为非负的函数可知，$L(1/d,\delta_1(\boldsymbol{X}))=0$ a.e.，即 $\delta_1(\boldsymbol{X})=1/d$ a.e.. 所以当 $c=0$，$d>0$ 时，估计量 $[cT+d]^{-1}$ 是可容许的. □

当 $c=c^*$，$d>0$ 时，利用 Blyth 引理[6] 来证明 $[cT+d]^{-1}$ 是可容许的. 在 Blyth 引理中，要求风险函数是连续的，下面的引理证明了风险函数的连续性.

引理 1 在 q-对称熵损失函数 $L(\alpha,\delta)=\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^q+\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^q-2(q>0)$ 下，假定 $E(|\delta|^q)<$

$+\infty, E\left(\frac{1}{|\delta|^q}\right)<+\infty$，则风险函数 $R(\alpha,\delta)$ 关于 α 是连续的.

定理 4　当 $c=c^*, d>0$ 时，估计量 $[cT+d]^{-1}$ 是可容许的.

证明　结合 Blyth 引理与引理 1 即可得证.

下面讨论 $d=0$ 时的情形.

定理 5　估计量 $(c^*T)^{-1}$ 是可容许的.

证明　令 $Z=\left(\frac{T}{\sqrt[2q]{(n+q-1)\cdots(n-q)}}\right)^{-1}$，$Y=\ln Z$. 因为 $T=\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{x_i}{\theta}\right)$ 的密度函数为 $\frac{\alpha^n}{\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-\alpha t}$，$Z=(c^*T)^{-1}$，所以 Z 的密度函数为

$$f(z)=\frac{\alpha^n}{\Gamma(n)(c^*)^n}z^{-n-1}e^{-\alpha/(c^*z)} \tag{10}$$

从而 Y 的密度函数

$$p(y)=\frac{\alpha^n}{\Gamma(n)(c^*)^n}e^{-ny}e^{-\alpha e^{-y}/c^*}=\frac{(\sqrt[2q]{(n+q-1)\cdots(n-q)})^n}{\Gamma(n)}\times e^{-n(y-\ln\alpha)-\sqrt[2q]{(n+q-1)\cdots(n-q)}\,e^{-(y-\ln\alpha)}} \tag{11}$$

那么，$\ln\alpha$ 是 $\ln Z$ 的位置参数，同时损失函数 $L(\alpha,\delta)$ 是 δ/α 的函数，这时在 Z 的基础上估计 α，与在 $Y=\ln Z$ 的基础上估计 $\eta=\ln\alpha$ 是等价的，损失函数为 $L^*(\eta,\delta^*)=W^*(\delta^*-\eta)$，这里 $W^*(x)=W(e^x)$. 事实上，$W(x)=x^q+\left(\frac{1}{x}\right)^q-2$，$W(e^x)=e^{qx}+e^{-qx}-2$，所以，$L^*(\eta,\delta^*)=W^*(\delta^*-\eta)=e^{q(\delta^*-\eta)}+e^{-q(\delta^*-\eta)}-2$.

对于 α 在损失函数 $L(\alpha,\delta)$ 下，估计量 Z 是可容许的，等价于对于 η 在损失函数 $L^*(\eta,\delta^*)$ 下，估计量 Y 是容许的. 对于定理的证明只需验证 Brown 引理[7] 中的 3 个条件. 这里只验证第 1 个条件.

$$R(\eta,Y+c_i)\to R(\eta,Y)\Leftrightarrow E_{\eta=0}[e^{qY}(e^{qc_i}-1)+e^{-qY}(e^{-qc_i}-1)]\to 0 \tag{12}$$

其中

$$E_{\eta=0}(e^{qY})=E_{\alpha=1}(e^{q\ln(\sqrt[2q]{(n+q-1)\cdots(n-q)}/T)})=E_{\alpha=1}(\sqrt[2q]{(n+q-1)\cdots(n-q)}/T)^q=\sqrt{(n+q-1)\cdots(n-q)}\;\frac{\Gamma(n-q)}{\Gamma(n)}=\sqrt{\frac{(n+q-1)\cdots n}{(n-1)\cdots(n-q)}}$$

同理可证

$$E_{\eta=0}(e^{-qY})=\sqrt{\frac{(n+q-1)\cdots n}{(n-1)\cdots(n-q)}}$$

所以有 $R(\eta,Y+c_i)\to R(\eta,Y)\Leftrightarrow e^{qc_i}+e^{-qc_i}-2=0$. 从而 $c_i\to 0(i\to+\infty)$. 若不然，易证此方程无解. □

定理 6　如果下面的条件之一成立，那么估计量 $[cT+d]^{-1}$ 就是不可容许的.

(1) $c<0$ 或者 $d<0$；

(2) $0<c\neq c^*$，且 $d=0$；

(3) $c>c^*$ 且 $d>0$，这里 $c^*=\frac{1}{\sqrt[2q]{(n+q-1)\cdots(n-q)}}$.

3　α 的最小最大估计

这一章将给出损失函数 $L(\alpha,\delta)=\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^q+\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^q-2(q>0)$ 下的一个最小最大估计，在给出定理之前首先引入一个引理[8].

引理 2　在给定的 Bayes 决策问题中，若 α 的一个估计量 δ^* 的风险函数 $R(\alpha,\delta^*)$ 在参数空间 Ω 上为常数 ρ^*，且存在一个先验分布列 H_k 使得相应的 Bayes 估计 δ_k 的 Bayes 风险满足

$$\lim_{k\to+\infty}R_{H_k}(\delta_k)=\rho^* \tag{13}$$

则 δ^* 是 α 的最小最大估计.

定理 7　在损失函数 $L(\alpha,\delta)=\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^q+\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^q-2(q>0)$ 下，估计量 $\delta^*(\boldsymbol{X})=\left[\frac{T(\boldsymbol{X})}{\sqrt[2q]{(n+q-1)\cdots(n-q)}}\right]^{-1}$ 是 α 的一个最小最大估计.

证明　首先证明 $R(\alpha,\delta^*)$ 在 Ω 上是常数.

$$R(\alpha,\delta^*)=E\left(\left(\frac{\alpha}{\delta^*}\right)^q+\left(\frac{\delta^*}{\alpha}\right)^q-2\right)=\frac{\Gamma(n+q)}{\Gamma(n)\sqrt{(n+q-1)\cdots(n-q)}}+\frac{\Gamma(n-q)\sqrt{(n+q-1)\cdots(n-q)}}{\Gamma(n)}-2 \tag{14}$$

因此 $R(\alpha,\delta^*)$ 在 Ω 上是常数，记为 ρ^*. 取 α 的先验分布为 Γ- 分布，即

$$\pi_k(\alpha)=\frac{\gamma^{1/k}}{\Gamma(1/k)}\alpha^{1/k-1}e^{-\gamma\alpha};\ k,\gamma>0,\alpha>0 \tag{15}$$

则由前面的证明可知

$$\delta_k(\boldsymbol{X})=\left[\frac{T+\gamma}{\sqrt[2q]{(n+1/k+q-1)\cdots(n+1/k-q)}}\right]^{-1} \tag{16}$$

这里 $T=\sum_{i=1}^{n}\ln(1+x_i/\theta)$. 现在计算估计 $\delta_k(\boldsymbol{X})$ 的 Bayes 风险.

$$\begin{aligned}R_{H_k}(\delta_k)=&E\left(\frac{\alpha}{\delta_k}\right)^q+E\left(\frac{\delta_k}{\alpha}\right)^q-2=\\&\Gamma(n+q+1/k)\Big/\Big[\Gamma(n+1/k)\times\\&\sqrt{(n+\frac{1}{k}+q-1)\cdots(n+\frac{1}{k}-q)}\Big]+\\&\Gamma(n-q+\frac{1}{k})\Big/\Gamma(n+\frac{1}{k})\times\\&\sqrt{(n+\frac{1}{k}+q-1)\cdots(n+\frac{1}{k}-q)}-2\end{aligned} \tag{17}$$

因此,当 $k\to+\infty$ 时,$R_{H_k}(\delta_k)\to\rho^*$,由引理 2 即完成定理的证明. □

4 结 语

鉴于 Pareto 分布在经济中的广泛应用,本文研究了 q-对称熵损失函数下 Pareto 分布的形状参数的最小风险同变估计和 Bayes 估计. 通过证明给出了在适当的 Γ-先验分布下,α 的 Bayes 估计都具有统一的形式 $[cT+d]^{-1}$. 针对 c 和 d 的各种不同取值情况,又进一步讨论了 $[cT+d]^{-1}$ 的容许性以及参数的最小最大估计问题.

参考文献:

[1] 王德辉,赖 民,宋立新. 熵损失下 Poisson 分布参数倒数的估计[J]. 吉林大学自然科学学报, 2000(4):17-22

[2] 宋立新,王德辉. 熵损失函数下参数估计的不变性和本质完全类[J]. 吉林大学自然科学学报, 1998(1):5-8

[3] 王德辉,牛晓宁. 熵损失函数下巴斯卡分布参数的 Bayes 估计[J]. 吉林大学自然科学学报, 2001(1):19-22

[4] REN C R, SUN D C, DEY D K. Bayesian and frequentist estimation and prediction for exponential distributions [J]. **Journal of Statistical Planning and Inference**, 2006, **136**(9):2873-2897

[5] QUANDT R E. Old and new methods of estimation and the Pareto distribution [J]. **Metrika**, 1966, **10**(1):55-82

[6] BLYTH C R. On minimax statistical decision procedures and their admissibility [J]. **Annals of Mathematical Statistics**, 1951, **22**(1):22-42

[7] BROWN L D. On the admissibility of invariant estimators of one or more location parameters [J]. **Annals of Mathematical Statistics**, 1966, **37**(5):1087-1136

[8] 茆诗松,王静龙,濮晓龙. 高等数理统计[M]. 北京:高等教育出版社, 2006

Estimation of Pareto distribution parameter under *q*-symmetric entropy loss function

SONG Li-xin*, WANG Ming-qiu, WANG Xiao-guang

(School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: As an income distribution, the Pareto distribution has a very important practical value. The shape parameter directly affects the balance of the income distribution, so it has extensive applications in economy. Based on the q-symmetric entropy loss function, the minimum risk equivariant (MRE) estimation and the Bayes estimation of the shape parameter of Pareto distribution are studied. The Bayes estimations of α have a unified form $[cT+d]^{-1}$ with a proper Γ-prior distribution. The admissibility and inadmissibility of these estimations with different values of c and d are discussed. Furthermore, based on the q-symmetric entroy loss function, the minimax estimation of the parameter is given.

Key words: equivalent estimation; Bayes estimation; minimax estimation; admissibility