文章编号：1000-8608(2011)05-0766-05

双指数效用函数组合投资决策

周庆健*[1,2]，吕思瑶[2]，焦 佳[2]，赵 建[3]，魏连鑫[4]，闫 博[5]

（1.大连理工大学 系统工程研究所，辽宁 大连 116024；
2.大连民族学院 理学院，辽宁 大连 116600；
3.同济大学 经济与管理学院，上海 200092；
4.上海理工大学 理学院，上海 200093；
5.大连海事大学 交通运输管理学院，辽宁 大连 116026）

摘要：双指数效用函数是一类典型且被投资者广泛应用的风险厌恶型效用函数.首先应用投资学中的无差异曲线法理论求出具有该类型效用函数的投资者的最大期望收益，然后根据Markowitz的均值-方差模型理论推导出投资者的最优组合投资决策方案，给出了相应的组合投资比例，较好地解决了具有该类型效用函数的投资者的最优投资组合决策问题，最后给出实例对所得结果予以验证.

关键词：双指数效用函数；投资决策；最优组合；无差异曲线法

中图分类号：N945 **文献标志码：**A

0 引言

在证券组合投资中，每位投资者都有自己对所获投资收益满足程度的效用函数，并利用期望效用最大化原则来选择最优组合，且大部分投资者是理性的风险厌恶型，他们在追求收益最大化的同时还希望降低风险. 双指数效用函数 $U = c_1 + a_1[2 - \exp(-a_2(R - c_2)) - \exp(-a_3(R - c_2))]$（$R$ 表示投资收益，其中 $a_i > 0, i = 1,2,3$）是一类典型且被投资者广泛应用的风险厌恶型效用函数，它在组合投资中具有非常重要的地位.

20世纪50年代初，美国金融学家Markowitz提出的投资组合理论可看成是这类问题的奠基石.该理论指出：投资者以提高投资收益同时减少投资风险为目标来确定最优组合. 以此他建立了著名的均值-方差模型[1].

设有 n 种证券，当前（$t = 0$）价格分别是 S_{10}，S_{20}，…，S_{n0}，将来某任意时刻（$t = T$）的价格分别是 $S_1, S_2, \cdots, S_n$.记 $x_i = \ln(S_i/S_{i0})$，$i = 1,2,\cdots,n$，$\boldsymbol{X}_{n\times 1} = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)^{\mathrm{T}}$，其中 x_i 是第 i 种证券从时间 $t = 0$ 到 $t = T$ 这段时间的对数收益率，$\boldsymbol{X}$ 是 n 种证券的对数收益率向量. 这里 S_{10}，S_{20}，…，S_{n0} 是已知常数，而 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 都是随机变量，所以 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是随机变量，而 $\boldsymbol{X}$ 是一个随机向量，则它的期望和协方差矩阵用符号表示为

$$E\boldsymbol{X} = (Ex_1 \quad Ex_2 \quad \cdots \quad Ex_n)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\mu}$$

$$\mathrm{var}(\boldsymbol{X}) = E[(\boldsymbol{X} - E\boldsymbol{X})(\boldsymbol{X} - E\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}] = \boldsymbol{\Sigma}$$

设第 i 种证券的投资比例为 ω_i，$i = 1,2,\cdots,n$. 记 $\boldsymbol{\omega}_{n\times 1} = (\omega_1 \quad \omega_2 \quad \cdots \quad \omega_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{e}_{n\times 1} = (1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1)^{\mathrm{T}}$，要求投资比例满足条件 $\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e} = 1$. 投资者对应于投资比例 $\boldsymbol{\omega}$ 的投资收益为 $R = \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$，$R$ 是一个随机变量，其期望收益和方差分别为

$$r = ER = \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}, \quad \sigma^2 = \mathrm{var}(R) = \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega}$$

Markowitz的均值-方差模型就是考虑下面的条件极值问题[2]：

(1) 指定收益 $\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu} = r_0$ 下，求 $\boldsymbol{\omega}$ 使风险最小，即 $\mathrm{var}(\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega}$ 最小；

收稿日期：2009-10-20； **修回日期：**2011-08-06.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(10872045；11001038)；大连民族学院青年基金资助项目(2009A207).
作者简介：周庆健*(1978-)，男，博士生，E-mail：zhouqingjian68@163.com.

(2) 指定风险 $\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma\omega}=\sigma_0^2$ 下，求 $\boldsymbol{\omega}$ 使收益最大，即 $\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}$ 最大.

显然两者等价，这里用问题(1) 进行研究，归结为如下规划问题：在 $\boldsymbol{\omega}$ 满足 $\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}=1$ 和 $\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}=r_0$ 的条件下，求 $\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma\omega}$ 达到最小值的解. 求得其解为 $\boldsymbol{\omega}_*=\dfrac{C-r_0B}{\Delta}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{e}+\dfrac{r_0A-B}{\Delta}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}$，则 $\boldsymbol{\omega}_*^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$ 对应的方差 $\sigma_*^2=\boldsymbol{\omega}_*^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma\omega}_*=\dfrac{1}{\Delta}(Ar_0^2-2Br_0+C)$，投资学中称上式为投资组合的有效前沿. 其中 $A=\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{e}$，$B=\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{e}$，$C=\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}$，$\Delta=AC-B^2$.

本文应用无差异曲线法先求出具有该类型效用函数的投资者的最大期望收益，然后根据均值-方差模型推导投资者的最优组合投资决策方案，并求相应的组合投资比例.

1　模型建立

由 $a_i>0$，$i=1,2,3$，则双指数效用函数的一阶导数 $U'=a_1(a_2\exp(-a_2(R-c_2))+a_3\exp(-a_3(R-c_2)))>0$，效用递增，且 $U''=a_1(-a_2^2\exp(-a_2(R-c_2))-a_3^2\exp(-a_3(R-c_2)))<0$，则 U 为凸函数，即它是风险厌恶型的. 在通常情况下，若采用双指数效用函数，当投资者面临一个无穷投资序列时，投资者通过最大化期望效用来使其回报率最大化.

金融数学理论中已证明并约定投资收益 R 服从正态分布 $N(r,\sigma^2)$，且 r、σ^2 如前，则双指数效用函数的数学期望为

$$EU=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big\{\big[c_1+a_1(2-\exp(-a_2(x-c_2))-\exp(-a_3(x-c_2)))\big]\times\exp\Big(-\frac{(x-r)^2}{2\sigma^2}\Big)\Big\}\mathrm{d}x\xlongequal{\frac{x-r}{\sigma}=y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(c_1\exp\Big(-\frac{y^2}{2}\Big)+2a_1\times\exp\Big(-\frac{y^2}{2}\Big)-a_1\exp\Big(-a_2(\sigma y+r-c_2)-\frac{y^2}{2}\Big)-a_1\exp\Big(-a_3(\sigma y+r-c_2)-\frac{y^2}{2}\Big)\Big)\mathrm{d}y$$

可求得

$$EU=(2a_1+c_1)-a_1\Big[\exp\Big(-a_2r+a_2c_2+\frac{a_2\sigma^2}{2}\Big)+\exp\Big(-a_3r+a_3c_2+\frac{a_3\sigma^2}{2}\Big)\Big]\quad(1)$$

因该效用函数为风险厌恶型，则应用投资学中的无差异曲线法进行求解. 按照无差异曲线的理论[3~8]，双指数效用函数的期望效用 EU 是一无差异曲线族，应用均值 - 方差模型原理，建立如下模型：

$$\begin{cases}EU=(2a_1+c_1)-a_1\Big[\exp\Big(-a_2r+a_2c_2+\dfrac{a_2\sigma^2}{2}\Big)+\exp\Big(-a_3r+a_3c_2+\dfrac{a_3\sigma^2}{2}\Big)\Big]\\ \sigma^2=\dfrac{1}{\Delta}(Ar^2-2Br+C)\end{cases}$$

此模型意义为投资者会在组合投资可供选择的有效前沿里尽量选择使期望效用最大的投资收益，即最优组合为有效前沿与效用尽可能最大的无差异曲线的切点. 原理如图 1 所示.

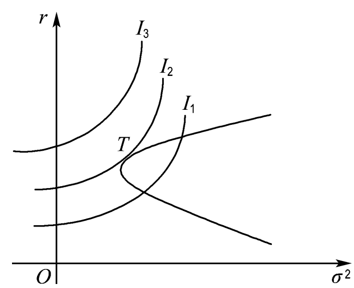

图 1　最优组合的选择

Fig. 1　Optimal portfolio selection

图 1 中 I_1、I_2、I_3 分别表示效用不同的无差异曲线(即等效用曲线)，向右开口的抛物线表示有效前沿，即投资者组合投资的有效组合构成的集合，所以投资者的最优组合即是有效前沿与效用尽可能最大的无差异曲线的切点.

2　最优决策求解

对上述模型进行分析，将有效前沿 σ^2 代入期望效用 EU 中，可得

$$EU=(2a_1+c_1)-a_1\Big[\exp\Big(-a_2r+a_2c_2+$$

$$\frac{a_2(Ar^2-2Br+C)}{2\Delta}\Big)+\exp\Big(-a_3r+a_3c_2+\frac{a_3(Ar^2-2Br+C)}{2\Delta}\Big)\Big]\qquad(2)$$

首先求得该期望效用函数的最大值点,进而求得最优投资组合比例.

由于 $a_i>0$, $i=1,2,3$, 在区间 $\frac{B}{A}+\frac{\Delta}{A\max\{a_2,a_3\}}<r<\frac{B}{A}+\frac{\Delta}{A\min\{a_2,a_3\}}$ 内

$$\frac{\mathrm{d}EU}{\mathrm{d}r}=-a_1\Big[\exp\Big(-a_2r+a_2c_2+\frac{a_2^2(Ar^2-2Br+C)}{2\Delta}\Big)\Big(-a_2+\frac{a_2^2(Ar-B)}{\Delta}\Big)\Big]-a_1\Big[\exp\Big(-a_3r+a_3c_2+\frac{a_3^2(Ar^2-2Br+C)}{2\Delta}\Big)\Big(-a_3+\frac{a_3^2(Ar-B)}{\Delta}\Big)\Big]>0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2EU}{\mathrm{d}r^2}=-a_1\Big[\exp\Big(-a_2r+a_2c_2+\frac{a_2^2(Ar^2-2Br+c)}{2\Delta}\Big)\Big]\Big(\Big(-a_2+\frac{a_2^2(Ar-B)}{\Delta}\Big)^2+\frac{a_2^2A}{\Delta}\Big)-a_1\Big[\exp\Big(-a_3r+a_3c_2+\frac{a_3^2(Ar^2-2Br+c)}{2\Delta}\Big)\Big]\Big(\Big(-a_3+\frac{a_3^2(Ar-B)}{\Delta}\Big)^2+\frac{a_3^2A}{\Delta}\Big)<0$$

则期望效用 EU 必有最大值.

令 $\frac{\mathrm{d}EU}{\mathrm{d}r}=0$,并且整理可得

$$\exp\Big[-(a_2-a_3)r+(a_2-a_3)c_2+\frac{(a_2^2-a_3^2)(Ar^2-2Br+C)}{2\Delta}\Big]=-\frac{a_3\Delta-a_3^2(Ar-B)}{a_2\Delta-a_2^2(Ar-B)}\qquad(3)$$

等式左边须 >0,则 $\frac{a_3\Delta-a_3^2(Ar-B)}{a_2\Delta-a_2^2(Ar-B)}<0$,即

$$[a_3\Delta-a_3^2(Ar-B)][a_2\Delta-a_2^2(Ar-B)]<0$$

整理得

$$A^2r^2-\Big(2AB+\frac{(a_2+a_3)\Delta A}{a_2a_3}\Big)r+\frac{(a_2+a_3)\Delta B+\Delta^2}{a_2a_3}+B^2<0\qquad(4)$$

对二次不等式(4)的解推导可作如下讨论:

(1)当 $a_2>a_3$ 时,解位于 $\frac{B}{A}+\frac{\Delta}{Aa_2}<r<\frac{B}{A}+\frac{\Delta}{Aa_3}$;

(2)当 $a_2<a_3$ 时,解位于 $\frac{B}{A}+\frac{\Delta}{Aa_3}<r<\frac{B}{A}+\frac{\Delta}{Aa_2}$.

综上可得解位于

$$\frac{B}{A}+\frac{\Delta}{A\max\{a_2,a_3\}}<r<\frac{B}{A}+\frac{\Delta}{A\min\{a_2,a_3\}}$$

此区间可称为收益的有效区间,这与判定 $\frac{\mathrm{d}EU}{\mathrm{d}r}>0$ 时要求的区间相同.

下面对方程(3)的解作如下讨论:

(a)当 $a_2>a_3$ 时,式(3)为

$$\exp\Big[-(a_2-a_3)r+(a_2-a_3)c_2+\frac{(a_2^2-a_3^2)(Ar^2-2Br+C)}{2\Delta}\Big]=\frac{a_3\Delta-a_3^2(Ar-B)}{-a_2\Delta+a_2^2(Ar-B)}$$

两边取对数整理得

$$\frac{a_2^2-a_3^2}{2\Delta}Ar^2-\Big(a_2-a_3+\frac{a_2^2-a_3^2}{\Delta}B\Big)r+(a_2-a_3)c_2+\frac{a_2^2-a_3^2}{2\Delta}C=\ln(a_3\Delta-a_3^2(Ar-B))-\ln(a_2^2(Ar-B)-a_2\Delta)\qquad(5)$$

先判断方程(5)解的情况,令方程左侧为 y_1,右侧为 y_2,则 y_1 为开口向上的抛物线,其对称轴为 $r=\frac{B}{A}+\frac{\Delta}{A(a_2+a_3)}$.

因 $r=\frac{B}{A}+\frac{\Delta}{A(a_2+a_3)}<\frac{B}{A}+\frac{\Delta}{Aa_2}$,则 y_1 在 $\frac{B}{A}+\frac{\Delta}{Aa_2}<r<\frac{B}{A}+\frac{\Delta}{Aa_3}$ 内单调递增.

因 $y_2'=-\frac{a_3^2A}{a_3\Delta-a_3^2(Ar-B)}-\frac{a_2^2A}{a_2^2(Ar-B)-a_2\Delta}<0$,则 y_2 在 $\frac{B}{A}+\frac{\Delta}{Aa_2}<r<\frac{B}{A}+\frac{\Delta}{Aa_3}$ 内单调递减,从而 y_1 与 y_2 在区间 $\frac{B}{A}+$

$\frac{\Delta}{Aa_2} < r < \frac{B}{A} + \frac{\Delta}{Aa_3}$ 内必有一个交点. 如图 2 所示.

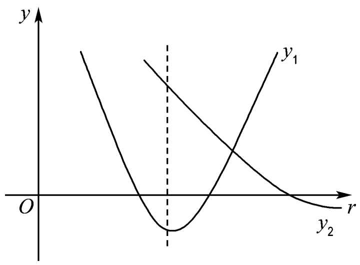

图 2　$a_2 > a_3$ 时根的判定

Fig. 2　Determination of the root when $a_2 > a_3$

(b) 当 $a_2 < a_3$ 时，式(3) 为

$$\exp\left[-(a_2 - a_3)r + (a_2 - a_3)c_2 + \frac{(a_2^2 - a_3^2)(Ar^2 - 2Br + C)}{2\Delta}\right] = \frac{a_3^2(Ar - B) - a_3\Delta}{a_2\Delta - a_2^2(Ar - B)}$$

两边取对数整理得

$$\frac{a_2^2 - a_3^2}{2\Delta}Ar^2 - \left(a_2 - a_3 + \frac{a_2^2 - a_3^2}{\Delta}B\right)r + (a_2 - a_3)c_2 + \frac{a_2^2 - a_3^2}{2\Delta}C = \ln(a_3^2(Ar - B) - a_3\Delta) - \ln(a_2\Delta - a_2^2(Ar - B)) \qquad (6)$$

先判断方程(6) 解的情况，令方程左侧为 y_1，右侧为 y_2，则 y_1 为开口向下的抛物线，其对称轴为 $r = \frac{B}{A} + \frac{\Delta}{A(a_2 + a_3)}$.

由 $r = \frac{B}{A} + \frac{\Delta}{A(a_2 + a_3)} < \frac{B}{A} + \frac{\Delta}{Aa_2}$ 得，y_1 在 $\frac{B}{A} + \frac{\Delta}{Aa_3} < r < \frac{B}{A} + \frac{\Delta}{Aa_2}$ 内单调递减.

因 $y_2' = \frac{a_3^2 A}{a_3^2(Ar - B) - a_3\Delta} + \frac{a_2^2 A}{a_2\Delta - a_2^2(Ar - B)} > 0$，则 y_2 在 $\frac{B}{A} + \frac{\Delta}{Aa_3} < r < \frac{B}{A} + \frac{\Delta}{Aa_2}$ 内单调递增，从而，y_1 与 y_2 在区间 $\frac{B}{A} + \frac{\Delta}{Aa_3} < r < \frac{B}{A} + \frac{\Delta}{Aa_2}$ 内必有一个交点. 如图 3 所示.

综合以上两种情况可知方程(3)在有效区间 $\frac{B}{A} + \frac{\Delta}{A\max\{a_2, a_3\}} < r < \frac{B}{A} + \frac{\Delta}{A\min\{a_2, a_3\}}$ 内一定有解，但该方程不是常规方程，无法求得其解析解，因此可应用数值方法进行求解.

(c) 当 $a_2 = a_3$ 时，此时效用函数为单指数函数 $U = c_1 + 2a_1(1 - \exp(-a_2(x - c_2)))$，

$$EU = (2a_1 + c_1) - 2a_1\exp\left(-a_2 r - a_2 c_2 + \frac{a_2^2(Ar^2 - 2Br + C)}{2\Delta}\right)$$

则当 $r = -\frac{-\left(-\frac{a_2^2 B}{\Delta} - a_2\right)}{\frac{Aa_2^2}{\Delta}} = \frac{a_2 B + \Delta}{a_2 A}$ 时，指数部分最小，进而期望效用 EU 最大.

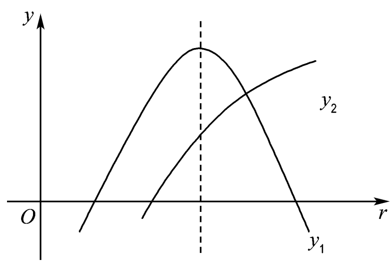

图 3　$a_2 < a_3$ 时根的判定

Fig. 3　Determination of the root when $a_2 < a_3$

此类效用函数在其他文献中有过介绍，所以本文可看作此类问题的一种推广模型.

综合以上 3 种情况可知，在确定了期望收益 r 后，根据均值-方差模型中推出的公式就可求出最优组合的投资比例.

3　实际应用举例

设有 5 种证券，收益的期望值为 $\boldsymbol{\mu} = (0.208\quad 0.353\quad 0.262\quad 0.167\quad 0.318)^{\mathrm{T}}$.

收益率的协方差矩阵

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 2.10 & 2.21 & -2.16 & 1.62 & -2.15 \\ 2.21 & 2.75 & -2.46 & 1.89 & -2.47 \\ -2.16 & -2.46 & 2.56 & -1.85 & 2.54 \\ 1.62 & 1.89 & -1.85 & 1.42 & -1.88 \\ -2.15 & -2.47 & 2.54 & -1.88 & 2.66 \end{pmatrix}$$

其中根据数据可求得 $A = 46.597\,9$，$B = 9.604\,2$，$C = 2.158\,0$，$\Delta = 8.320\,4$.

以下根据两种情况展开应用：

（a）当 $a_2 \neq a_3$ 时，不失一般性，取 $a_1 = a_2 = c_1 = c_2 = 1, a_3 = 2$.

此时效用函数为 $U = 1 + [2 - \exp(-(x-1)) - \exp(-2(x-1))]$，$EU = 3 - \left[\exp\left(-r + 1 + \frac{46.597\,9r^2 - 19.208\,4r + 2.158\,0}{16.640\,8}\right) + \exp\left(-2r + 2 + \frac{46.597\,9r^2 - 19.208\,4r + 2.158\,0}{8.320\,4}\right)\right]$，对此应用无约束非线性规划模型求得最大值点 $r = 0.304\,3$，则求得

$$\boldsymbol{\omega} = (0.046\,2 \quad 0.378\,5 \quad 0.156\,3 \quad 0.086\,6 \quad 0.332\,0)^{\mathrm{T}}$$

（b）当 $a_2 = a_3$ 时，不失一般性，取 $a_1 = a_2 = a_3 = c_1 = c_2 = 1$，此时效用函数为单指数函数 $U = 1 + 2(1 - \exp(-(x-1)))$. 因此可求得 $r = 0.384\,7$，进而求得最优组合的投资比例 $\boldsymbol{\omega} = (0.040\,1 \quad 0.745\,3 \quad 0.087\,5 \quad -0.330\,7 \quad 0.457\,4)^{\mathrm{T}}$.

4 结　论

本文应用无差异曲线法，较好地解决了具有双指数效用函数的最优组合决策问题，给出了其组合投资的最优决策，这对组合投资理论研究和投资者实践操作具有一定的指导意义.

参考文献：

[1] MARKOWITZ H. Portfolio selection [J]. **Journal of Finance**, 1952(7):77-91

[2] 张尧庭. 金融市场的统计分析[M]. 桂林：广西师范大学出版社，1998:36-44

[3] 叶中行，林建忠. 数理金融——资产定价与金融决策理论[M]. 北京：科学出版社，1998:21-23

[4]《运筹学》教材编写组. 运筹学[M]. 3版. 北京：清华大学出版社，2005:417-430

[5] 威廉·F·夏普，戈登·J·亚历山大，杰弗里·V·贝利. 投资学[M]. 5版 上. 北京：中国人民大学出版社，1998:102-105

[6] 周庆健，吴建民. 负指数效用函数最优组合的两种解法及其一致性[J]. 大连民族学院学报，2004，**6**(1):7-10

[7] 张鸿雁，岳　妍. 典型效用函数下最优投资消费问题[J]. 统计与决策，2007(20):18-20

[8] 贺学会，陈　洋. 效用函数与行为人：一个金融经济学视角的诠释[J]. 财经理论与实践，2008，**29**(5):2-7

Decision-making of portfolio investment with double exponential utility function

ZHOU Qing-jian*[1,2], LÜ Si-yao[2], JIAO Jia[2], ZHAO Jian[3], WEI Lian-xin[4], YAN Bo[5]

(1. Institute of Systems Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;
2. Department of Science, Dalian Nationalities University, Dalian 116600, China;
3. School of Economics and Management, Tongji University, Shanghai 200092, China;
4. Department of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China;
5. Institute of Transport Management, Dalian Maritime University, Dalian 116026, China)

Abstract: Double exponential utility function is one kind of risk-averse utility function, being classic and comprehensively used by investors. Firstly, non-difference curve method in investment theory was used to calculate the maximum expected return for investors. Then, the optimal portfolio investment decision-making was derivated according to Markowitz's mean-variance model, and the corresponding investment proportion was given. The optimal portfolio investment decision-making problem with double exponential utility function was solved very well. At last, a numerical example was provided to illustrate the proposed method.

Key words: double exponential utility function; investment decision-making; optimal portfolio; non-difference curve method