



# 正六角形单胞周期性蜂窝板等效刚度研究

蔡园武, 徐亮, 程耿东\*

(大连理工大学 工程力学系, 辽宁 大连 116024)

**摘要:** 利用已提出的一种周期性板等效刚度求解新方法,研究了六角形蜂窝板在壁厚和单胞高度等在相当大的范围内变化时的等效刚度,给出了计算蜂窝板等效刚度的一系列解析近似公式,并对其进行了验证.这种新方法能够精确实现理论上严格的渐近均匀化方法,并具有代表体元法的直观简洁,可以根据单胞的不同尺寸采用不同的单元类型,大大提高了求解效率.最后讨论了文献中已有的近似解析解的精度、经典层合板理论成立的条件及泊松比的影响等.

**关键词:** 等效刚度;蜂窝板;渐近均匀化;有限元法;层合板理论

**中图分类号:** O341

**文献标识码:** A

**doi:** 10.7511/dllgxb201404001

## 0 引言

由六角形单胞构成的周期性蜂窝板经常被用作夹层板的芯层,比如在船舶、潜艇、飞机、汽车等结构中;或者作为一种独立的材料,用于如卫星天线和天线罩的部件、细胞培养装置等<sup>[1]</sup>.对蜂窝板结构进行详尽的有限元分析工作量非常大,通常将其等效为均质的薄板.为此,人们很早就开始研究蜂窝芯层的等效刚度.文献[2]综述了已有的15篇文献中对蜂窝芯层面内刚度及剪切刚度的研究结果.

不同的应用领域要求蜂窝具有不同的结构参数,例如壁厚、蜂窝高度、倾角等<sup>[3]</sup>.因此需要计算这些参数在相当大的范围内变化时蜂窝板的等效刚度.尤其是在结构优化领域,人们需要设计单胞的这些参数以达到最优目标,就更需要蜂窝板等效刚度的解析表达式<sup>[4]</sup>.

如果把蜂窝板看成是一个正交单层板,从经典层合板理论<sup>[5]</sup>出发,正交单层板的本构关系可写成

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix}$$

其中  $N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}$  是应力合力,  $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}, \kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$  是面内应变,  $A_{11}, A_{22}, A_{12}, A_{66}, D_{11}, D_{22}, D_{12}, D_{66}$  是板的等效刚度.对于经典层合薄板理论,

$$A_{11} = \frac{E_1 h}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, A_{22} = \frac{E_2 h}{1 - \nu_{12} \nu_{21}},$$
$$A_{12} = \frac{\nu_{21} E_2 h}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, A_{66} = G_{12} h,$$
$$D_{11} = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}, D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})},$$
$$D_{12} = \frac{\nu_{21} E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}, D_{66} = G_{12} h^3 / 12$$

其中  $E_1, E_2$  是等效面内弹性模量,  $G_{12}$  是等效面内剪切模量,  $\nu_{12}, \nu_{21}$  是泊松比,  $h$  是板的厚度.  $E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}, \nu_{21}$  通过对一个周期性单胞的力学分析得到.对于六角形蜂窝, Gibson 等<sup>[6]</sup>给出过这些等效系数.

上式给出的公式中,面内刚度  $A$  与板厚  $h$  成正比,弯曲刚度  $D$  与  $h^3$  成正比,弯曲刚度  $D$  与面内刚度  $A$  有以下关系:  $D = Ah^2/12$ , 然而, Chen<sup>[7]</sup>指出,这种关系对蜂窝板并不总是成立.本文研究这种关系对蜂窝板何时成立,并给出蜂窝板等效刚度的解析近似公式.

研究蜂窝板等效刚度的方法可以分成两类:

收稿日期: 2013-12-05; 修回日期: 2014-05-26.  
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(91216201, 11372062);“九七三”国家重点基础研究发展计划资助项目(2014CB049000).  
作者简介: 蔡园武(1985-),男,博士生, E-mail: yuanwucai@gmail.com;程耿东\*(1941-),男,教授,博士生导师,中国科学院院士, E-mail: chenggd@dlut.edu.cn.

一类是解析法,一类是数值法。

解析法因为公式清晰明了而深受工程师喜爱。蜂窝板的等效面内模量已有很多研究工作<sup>[2,6,8]</sup>。Chen等在蜂窝板方面做了大量研究,最近开展了一系列计算蜂窝板弯曲刚度和扭转刚度的工作,给出了一些近似解析公式<sup>[7-11]</sup>。但是,解析法在推导过程中往往需要引入一定假设,适用范围受到局限。

数值法包括代表体元(RVE)法和均匀化方法。代表体元法具有清晰的力学概念,操作简单,被广泛用来预测复合材料的等效性质,但是其没有严格的数学理论基础,只能提供等效性质的近似估计。文献中也没有对这种方法的误差的理论估计。均匀化方法基于数学中的渐近分析理论,有很严格的数学基础,对于具有无限周期微结构的材料,给出其等效性质的精确解。文献<sup>[12-13]</sup>给出板壳结构的渐近均匀化理论,并给出了一些板结构的等效刚度的近似解,例如加肋板、蜂窝夹层板等。

在渐近均匀化方法的传统有限元实现中<sup>[14]</sup>,需要在每个单元上积分以求得等效荷载和应变能,这就需要与单元相关矩阵的所有细节,例如本构矩阵、应变-位移矩阵。对于不同的单元类型,这些矩阵也是不同的,所以需要针对不同的单元写出相应的有限元列式和编写相应的代码,例如实体单元、杆单元、梁单元、壳单元等。这也是文献中对渐近均匀化方法的研究通常采用实体单元的原因。另一个问题是,如果模型中包含非常细小的结构,比如细小的杆件和薄板,而仍然采用实体单元离散,就会生成大量单元,造成计算量过大。这些问题限制了渐近均匀化方法的应用。

基于板壳结构的渐近均匀化方法<sup>[12-13]</sup>,作者提出了一种新求解方法<sup>[15-16]</sup>,可以利用商业软件例如 ANSYS,来完成所有工作,因此极大地降低了新求解方法的实现难度。研究人员所要做的仅仅是写一个脚本实现新求解方法的流程,其可以利用商业软件提供的所有单元,而不用考虑其具体实现过程。如果模型中含有细小的杆件或者薄板,可以用杆单元或壳单元来离散,从而使模型保持较小的规模。新求解方法仅仅是渐近均匀化方法的一种新的实现过程,因此它具有渐近均匀化方法的精度,而又像代表体元法那样操作简单。

本文用这一求解方法<sup>[16]</sup>来研究蜂窝的壁厚和高度在相当大的范围内变化时的六角形蜂窝板,计算大量不同尺寸下的蜂窝,以根据不同的尺寸特点

采用不同的单元类型,并基于大量计算和数值拟合,得到蜂窝板等效刚度的一系列解析近似公式。

## 1 六角形蜂窝不同尺寸单胞的有限元建模

六角形蜂窝单胞如图1所示。单胞由壁长 $l$ 、壁厚 $t$ 、单胞高度 $h$ 、倾角 $\alpha$ 四个参数完全定义。对于正六角形蜂窝,倾角为 $120^\circ$ 。根据蜂窝板的制造工艺,通常单胞的水平壁长为 $l$ ,壁厚为 $2t$ ;斜壁长为 $l$ ,壁厚为 $t$ 。为了更好地表示 $l$ 、 $t$ 、 $h$ 之间的关系,用 $l$ 对 $t$ 和 $h$ 进行归一化,记为 $t' = t/l, h' = h/l$ 。

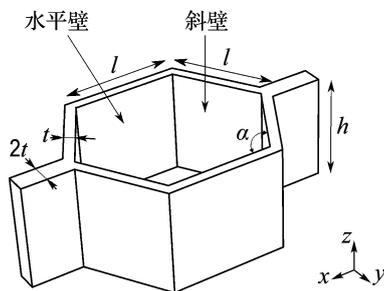


图1 六角形蜂窝单胞

Fig.1 Hexagonal honeycomb unit cell

在建立单胞有限元模型时,可以全部采用实体单元来离散,但当壁厚相对于壁长很小时会产生大量单元。例如,如果单胞壁长 $l = 1$ (量纲一),壁厚 $t = 0.02$ ,单胞高度 $h = 1$ ,沿壁厚方向划分5个实体单元,那么单胞模型中实体单元数量将超过150万。蜂窝单胞中,壁厚通常远小于壁长和单胞高度,所以可以采用壳单元来模拟蜂窝壁。而当单胞高度很小时,可以采用梁单元模拟蜂窝壁。对于其他情况,则应该用实体单元。

经典板壳理论中,当厚度小于长度的 $1/5$ 时,薄板理论成立。为了验证薄板理论何时对蜂窝单胞成立,取蜂窝单胞壁厚为壁长的 $1/5$ ,分别用实体单元和壳单元离散,发现两者的误差小于5%。所以在本文研究中,当蜂窝单胞壁厚小于壁长和单胞高度的 $1/5$ 时,采用壳单元离散。类似地,当蜂窝单胞壁厚和单胞高度均小于壁长的 $1/5$ 时,采用梁单元离散。对于其他情况,采用实体单元。该准则可以写成:

$$\begin{cases} \text{壳单元;} & 2t/l < 1/5 \text{ 且 } 2t/h < 1/5 \\ \text{梁单元;} & 2t/l < 1/5 \text{ 且 } h/l < 1/5 \\ \text{实体单元;} & \text{其他} \end{cases} \quad (1)$$

本文测试了壳单元、梁单元和实体单元的网格

收敛性,并确定合适的单元平均尺寸,结果如下。

(1)壳单元

考虑如图2所示的正六角形蜂窝单胞。壁厚  $l = 1$ , 壁厚  $t = 0.02$ , 单胞高度  $h = 1$ , 所以  $2t/l = 2t/h = 4\%$ , 适合用壳单元。记单元平均尺寸为  $l_e$ 。网格收敛性计算发现,随着单元尺寸减小,等效刚度趋于收敛。当沿壁厚方向分布超过7个单元时,误差小于1%。所以本文中采用的单元平均尺寸为  $l_e/\min(l, h) = 1/8$ 。

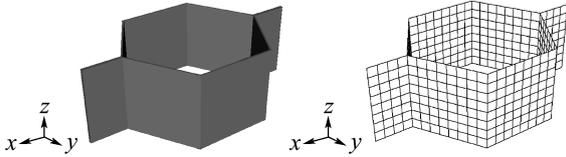


图2 采用壳单元离散的六角形蜂窝单胞

Fig.2 Hexagonal honeycomb unit cell discretized with shell elements

(2)梁单元

考虑如图3所示的正六角形蜂窝单胞。壁厚  $l = 1$ , 壁厚  $t = 0.05$ , 单胞高度  $h = 0.1$ , 所以  $2t/l = h/l = 10\%$ , 适合用梁单元。记单元平均尺寸为  $l_e$ , 结果发现沿壁厚方向仅仅采用两个单元即可满足精度要求。所以本文中采用的单元平均尺寸为  $l_e/l = 1/2$ 。



图3 采用梁单元离散的六角形蜂窝单胞

Fig.3 Hexagonal honeycomb unit cell discretized with beam elements

(3)实体单元

考虑如图4所示的单胞。壁厚  $l = 1$ , 壁厚  $t = 0.2$ , 单胞高度  $h = 1$ 。因为壁厚很大,所以采用实体单元离散单胞。网格收敛性计算发现,随着单元尺寸减小,等效刚度收敛。当沿壁厚方向的单元数

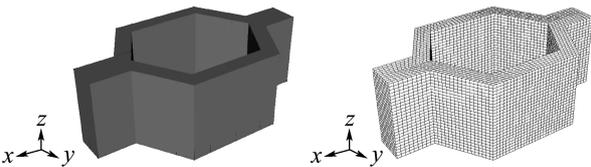


图4 采用实体单元离散的六角形蜂窝单胞

Fig.4 Hexagonal honeycomb unit cell discretized with solid elements

目超过5时,误差小于1%。所以本文中采用的单元平均尺寸为  $l_e/\min(t, h) = 1/5$ 。

2 数值结果及解析近似公式

本文中研究中,假设蜂窝壁长为  $l$ , 倾角  $\alpha = 120^\circ$ 。考察具有不同壁厚  $t$  和单胞高度  $h$  的蜂窝单胞,研究其等效刚度随两者的变化规律。壁厚  $t$  的取值范围在  $0.01l \sim 0.2l$ , 单胞高度  $h$  的取值范围在  $0.1l \sim 10l$ 。  $t$  和  $h$  取得足够大,以涵盖实际中绝大部分情况。为了给出一个直观的印象,图5给出了一些具有不同壁厚和高度的蜂窝单胞。这里实体材料是各向同性材料,弹性模量  $E_s = 2.1 \times 10^{11}$  Pa,泊松比  $\nu = 0.3$ 。

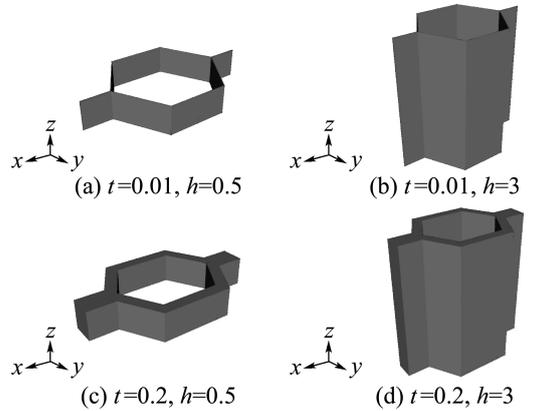


图5 具有不同壁厚  $t$  和单胞高度  $h$  的六角形蜂窝单胞 ( $l = 1$ )

Fig.5 Hexagonal honeycomb unit cell of  $l = 1$  with different wall thickness  $t$  and cell height  $h$

本文采用渐近均匀化方法的新求解方法<sup>[16]</sup>计算蜂窝的等效刚度。基于大量样本点,通过数值拟合建立蜂窝等效刚度的一系列解析公式。由于  $t$  和  $h$  的取值范围很大,需要把整个取值范围分成多个小块进行独立拟合,以更好地建立等效刚度与  $t, h, l$  之间的关系。经过试验,整个取值范围被分成以下3个区域:

区域1:  $0.01 \leq \frac{t}{l} \leq 0.1$  且  $\frac{t}{h} \leq 0.1$

区域2:  $0.1 < \frac{t}{l} \leq 0.2$  且  $\frac{t}{h} \leq 0.1$  (2)

区域3:  $0.01 \leq \frac{t}{l} \leq 0.2$  且  $\frac{t}{h} > 0.1$

本文采用多项式函数作为拟合公式类型,从低阶开始,逐渐提高多项式阶数,直到计算值和拟合

值的最大误差小于许可值. 拟合函数中的系数由最小二乘法确定. 同时, 为了简化拟合函数, 需要把那些对拟合函数值贡献很小的项去除. 等效刚度的拟合结果如表 1 所示. 考虑到等效刚度与弹性模量  $E_s$  成正比, 表 1 中把  $E_s$  作为拟合公式的系数.

从表 1 可以看出:

(1) 面内刚度  $A_{11}$ 、 $A_{22}$ 、 $A_{12}$ 、 $A_{66}$  始终与  $h$  成正

比, 主要由  $th$  和  $t^3h$  两项组成. 其中  $th$  项代表单胞壁的拉伸变形,  $t^3h$  项代表单胞壁的弯曲变形.

(2) 在区域 1 和 2 中, 当  $t/h \leq 0.1$  时, 弯曲刚度  $D_{11}$ 、 $D_{22}$ 、 $D_{12}$  与  $h^3$  成正比. 蜂窝芯层较扁的其他情况下, 弯曲刚度与  $h$  的关系更为复杂.

(3) 拟合值与计算值之间的所有误差均小于 5%.

表 1 周期性蜂窝板等效刚度的解析近似公式 ( $0.1 \leq h/l \leq 10$ )

Tab. 1 Explicit approximate formulas for effective stiffnesses of periodic honeycomb plate ( $0.1 \leq h/l \leq 10$ )

取值范围	等效刚度	最大误差/%
区域 1: $0.01 \leq \frac{t}{l} \leq 0.1$ 且 $\frac{t}{h} \leq 0.1$	$A_{11} = 0.349 \frac{t}{l} h E_s$	1.52
	$A_{22} = 0.343 \frac{t}{l} h E_s$	2.06
	$A_{12} = 0.342 \frac{t}{l} h E_s$	2.53
	$A_{66} = \left(1.58 \frac{t^3}{l^3} - 1.43 \frac{t^4}{l^4}\right) h E_s$	3.73
	$D_{11} = 0.029 0 \frac{t}{l} h^3 E_s$	2.77
	$D_{22} = 0.028 6 \frac{t}{l} h^3 E_s$	1.83
	$D_{12} = 0.028 4 \frac{t}{l} h^3 E_s$	4.35
	$D_{66} = \left(0.003 69 \frac{t}{l} \frac{t^2}{h^2} + 0.132 \frac{t^3}{l^3} - 0.128 \frac{t^4}{l^4}\right) h^3 E_s$	4.52
区域 2: $0.1 < \frac{t}{l} \leq 0.2$ 且 $\frac{t}{h} \leq 0.1$	$A_{11} = \left(0.356 \frac{t}{l} + 2.95 \frac{t^3}{l^3}\right) h E_s$	1.01
	$A_{22} = \left(0.361 \frac{t}{l} + 0.745 \frac{t^3}{l^3}\right) h E_s$	1.05
	$A_{12} = 0.362 \frac{t}{l} h E_s$	0.84
	$A_{66} = \left(-0.002 12 \frac{t}{l} + 2.04 \frac{t^3}{l^3}\right) h E_s$	4.11
	$D_{11} = \left(0.029 7 \frac{t}{l} + 0.243 \frac{t^3}{l^3}\right) h^3 E_s$	2.68
	$D_{22} = \left(0.03 \frac{t}{l} + 0.061 5 \frac{t^3}{l^3}\right) h^3 E_s$	0.77
	$D_{12} = 0.030 1 \frac{t}{l} h^3 E_s$	2.99
	$D_{66} = \left(-0.000 493 \frac{t}{l} + 0.004 67 \frac{t^2}{l^2} + 0.149 \frac{t^3}{l^3} + 0.007 48 \frac{t^2}{l^2} \frac{t}{h}\right) h^3 E_s$	4.24
区域 3: $0.01 \leq \frac{t}{l} \leq 0.2$ 且 $\frac{t}{h} > 0.1$	$A_{11} = \left(0.352 \frac{t}{l} + 2.95 \frac{t^3}{l^3}\right) h E_s$	1.84
	$A_{22} = \left(0.357 \frac{t}{l} + 0.754 \frac{t^3}{l^3}\right) h E_s$	2.52
	$A_{12} = 0.359 \frac{t}{l} h E_s$	3.17
	$A_{66} = \left(-0.002 37 \frac{t}{l} + 1.97 \frac{t^3}{l^3}\right) h E_s$	3.06
	$D_{11} = \left(0.000 662 \frac{t}{l} \frac{t^2}{h^2} + 0.031 1 \frac{t}{l} - 0.010 1 \frac{t^2}{l^2} \frac{h}{t} + 0.261 \frac{t^3}{l^3}\right) h^3 E_s$	3.80
	$D_{22} = \left(0.000 303 \frac{t}{l} \frac{t^2}{h^2} + 0.030 4 \frac{t}{l} - 0.003 53 \frac{t^2}{l^2} \frac{h}{t} + 0.065 4 \frac{t^3}{l^3}\right) h^3 E_s$	3.17
	$D_{12} = \left(-0.000 384 \frac{t}{l} \frac{t^2}{h^2} + 0.028 9 \frac{t}{l} + 0.008 21 \frac{t^2}{l^2} \frac{h}{t} - 0.019 4 \frac{t^3}{l^3}\right) h^3 E_s$	3.61
	$D_{66} = \left(0.000 654 \frac{t}{l} \frac{t^2}{h^2} + 0.006 86 \frac{t}{l} - 0.035 5 \frac{t^2}{l^2} \frac{h}{t} + 0.199 \frac{t^3}{l^3}\right) h^3 E_s$	4.35

### 3 结果与讨论

#### 3.1 与宏观板精细模型比较

为了验证表1给出的解析近似公式的正确性,本文分析了一个由 $9 \times 9$ 个单胞构成的蜂窝板.单胞尺寸为 $l=0.100$  m,  $t=0.005$  m,  $h=0.515$  m,材料的 $E_s=2.1 \times 10^{11}$  Pa,  $\nu=0.3$ .整个蜂窝板长 $a=2.700$  m,宽 $b=1.559$  m.对该蜂窝板进行有限元离散,共采用166 320个壳单元,并把它与尺寸为 $a \times b$ 的等效均匀板的结果进行比较.等效均匀板的等效刚度由表1求出.这里考虑了3个荷载工况:面内压缩、弯曲、屈曲.所有工况中,约束 $x=-a/2$ 处所有节点的自由度, $y=\pm b/2$ 处所有节点自由.

##### (1) 面内压缩

在 $x=a/2$ 处的所有节点上均匀分布合力 $F_x=-1$  N.比较 $x=a/2$ 处所有节点的X方向平均位移,解析近似公式解为 $-4.47 \times 10^{-8}$  m,详细的有限元模型解为 $-4.59 \times 10^{-8}$  m.

##### (2) 弯曲

在板的上表面均匀分布合力 $F_z=-1$  N.比较 $x=a/2$ 处所有节点的Z方向平均位移,解析近似公式解为 $-4.45 \times 10^{-7}$  m,详细的有限元模型解为 $-4.55 \times 10^{-7}$  m.

##### (3) 屈曲

在 $x=a/2$ 处的所有节点上均匀分布合力 $F_x=-1$  N.进行屈曲分析,并比较极限屈曲荷载因子,解析近似公式解为 $1.01 \times 10^6$ ,详细的有限元模型解为 $1.06 \times 10^6$ .

从这些结果可以看到,解析近似公式得到的结果与 $9 \times 9$ 个单胞构成的板的结果吻合良好.在这些例子中,没有考虑局部屈曲.屈曲工况中考虑的屈曲模式是全局屈曲模式.如果蜂窝壁厚很薄,可能会存在局部屈曲,此时由解析近似公式求出的等效刚度是不可用的.因此,在采用这些解析近似公式时,需要注意是否发生局部屈曲.

#### 3.2 与文献结果的比较

因为文献[12]给出了蜂窝板等效刚度的详细公式,这里把本文的结果和文献[12]的结果进行了比较,见图6.这里考虑了两种情况: $l=1, h=0.4$ 和 $l=1, h=1.0$ .结果包括均匀化方法求出的结果和解析近似公式求出的结果.解析近似公式求出的结果与均匀化方法求出的结果吻合很好.文献[12]给出的等效刚度 $A_{66}$ 、 $A_{22}$ 、 $A_{12}$ 、 $D_{11}$ 、

$D_{22}$ 、 $D_{12}$ 与均匀化结果吻合良好,但 $A_{66}$ 、 $D_{66}$ 差别较大.当 $t=0.2, h=1.0$ 时, $A_{66}$ 的误差为43%, $D_{66}$ 的误差为39%.这是因为文献[12]中的方法基于一定的假设,比如把单胞壁简化成薄板和梁,把边界处看成是固支或自由等.当壁厚较大时,这些假设不够准确.因此,当壁厚增加时,文献[12]给出的结果与均匀化结果差别较大.

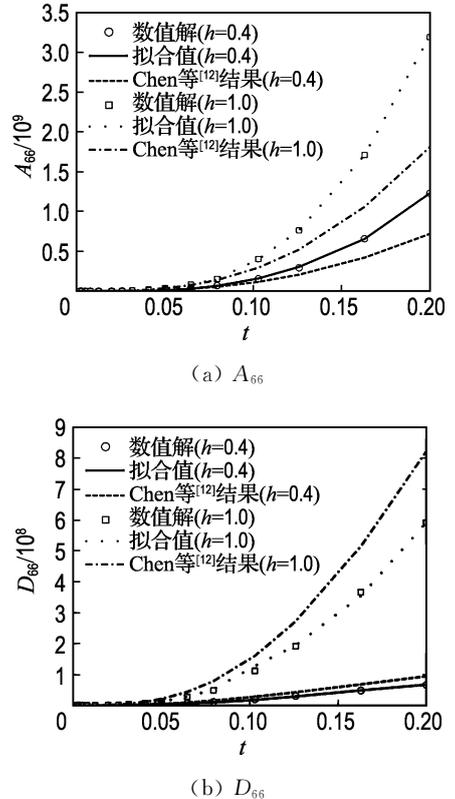


图6 均匀化结果与Chen等结果[12]的比较

Fig. 6 Comparison between results from homogenization method and Chen, et al. [12]

#### 3.3 泊松比的影响

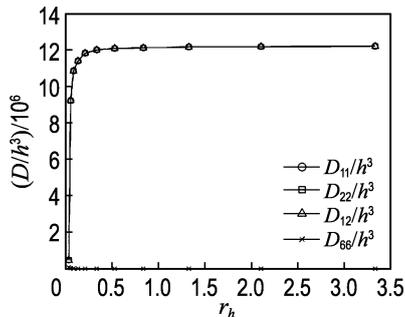
表1给出的结果适用于泊松比 $\nu=0.3$ .为了考察不同泊松比对结果的影响,选取了多个样本点,计算它们在不同泊松比时的等效刚度,并把它们和 $\nu=0.3$ 时的等效刚度比较.结果表明,等效刚度随泊松比变化不大.当 $\nu=0.2 \sim 0.4$ 时,样本点的等效刚度与 $\nu=0.3$ 时的等效刚度的最大差别不超过10%.在壁厚很薄时, $A_{66}$ 随泊松比增加而增大, $D_{66}$ 随泊松比增加而减小,其他等效刚度基本不随泊松比变化.当壁厚较厚时,所有等效刚度均随泊松比增加而增加,但 $A_{66}$ 变化更大.

#### 3.4 经典层合板理论适用于蜂窝板的条件

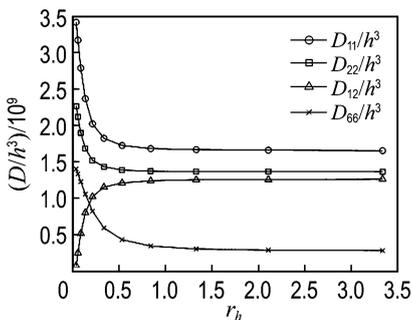
定义单胞高度与面内最大尺寸之比为高宽比:

$$r_h = h/2l(1 - \cos \alpha) \quad (3)$$

对于不同的壁厚,等效刚度随高宽比的变化如图 7 所示。可以看到,随着  $r_h$  增加, $D/h^3$  趋于常数。这说明当  $r_h$  足够大时,弯曲刚度  $D$  与  $h^3$  成正比,此时经典板理论成立。当  $r_h$  较小时, $D/h^3$  不是常数,经典板理论不成立。



(a)  $t=0.002$



(b)  $t=0.200$

图 7 弯曲刚度随高宽比的变化

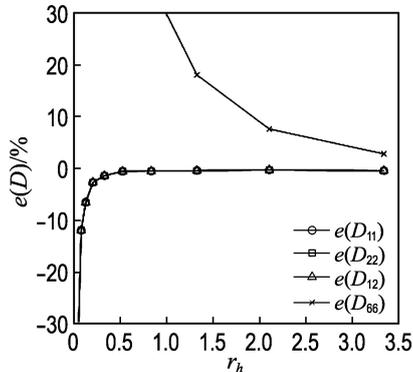
Fig. 7 Variance of flexural stiffnesses with respect to aspect ratio

用下式定义实际弯曲刚度与经典板理论之间的误差:

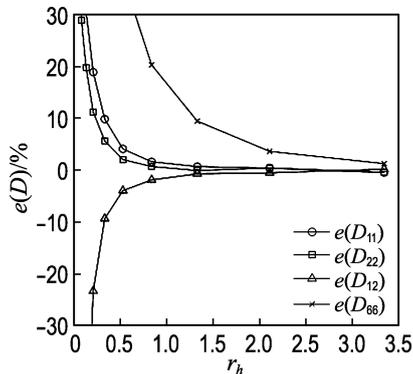
$$e(D) = \frac{D - Ah^2/12}{D} \times 100\% \quad (4)$$

如果经典板理论成立,  $e(D) = 0$ 。违反经典板理论越严重,  $e(D)$  就越大。

图 8 给出了  $e(D)$  的变化情况。可以看到,随着  $r_h$  增加,  $e(D)$  趋于 0, 此时经典板理论成立。当  $r_h > 1$  时,  $e(D_{11})$ 、 $e(D_{22})$ 、 $e(D_{12})$  已经足够小。  $e(D_{66})$  趋于 0 的速度较慢。当  $r_h > 3$  时,  $e(D_{66})$  才足够小。因此,可以把  $r_h > 3$  作为经典板理论适用于蜂窝板的有效条件。然而,大多数情况下,扭转不是主要变形模式,此时  $D_{11}$ 、 $D_{22}$ 、 $D_{12}$  对板的变形贡献更大,因此这个有效条件可以适当放松。



(a)  $t=0.002$



(b)  $t=0.200$

图 8 经典板理论的误差估计

Fig. 8 Error estimation of classical plate theory

另一方面,如果保持单胞高度不变,等比例减小面内尺寸,高宽比  $r_h$  是增大的。根据上面的讨论,当  $r_h > 3$  时,经典板理论成立。这意味着对于厚为  $h$  的板,如果单胞最大面内尺寸小于  $h/3$ ,那么等效刚度  $A$ 、 $D$  是常数,不再受单胞最大面内尺寸的影响。

### 4 结 语

本文研究了壁厚和单胞高度在相当大范围内变化时的六角形蜂窝板的等效刚度,并给出了一系列等效刚度的解析近似公式。研究发现,经典层合板理论对于薄板成立,但对于蜂窝板并不一定成立。当单胞高度与最大面内尺寸之比大于 3 时,经典板理论可以用于蜂窝板。尽管本文中只考虑了六角形蜂窝板,这一结论也可以扩展到其他类型的周期性板中,例如逆六角形蜂窝板、波纹板、格栅夹层板等。

### 参 考 文 献:

[1] Scheffler M, Colombo P. Cellular Ceramics: Structure, Manufacturing, Properties and

- Applications** [M]. Weinheim: WILEY-VCH, 2005.
- [2] Schwingshackl C, Aglietti G, Cunningham P. Determination of honeycomb material properties: existing theories and an alternative dynamic approach [J]. **Journal of Aerospace Engineering**, 2006, **19**(3):177-183.
- [3] Gibson L, Ashby M. **Cellular Solids: Structure and Properties** [M]. London: Cambridge University Press, 1999.
- [4] Qiao P, Fan W, Davalos J, *et al.* Optimization of transverse shear moduli for composite honeycomb cores [J]. **Composite Structures**, 2008, **85**(3):265-274.
- [5] Gibson R. **Principles of Composite Material Mechanics** [M]. Michigan: McGraw-Hill, 1994.
- [6] Gibson L, Ashby M, Schajer G, *et al.* The mechanics of two-dimensional cellular materials [J]. **Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, 1982, **382**(1782):25-42.
- [7] Chen D. Flexural rigidity of honeycomb consisting of hexagonal cells [J]. **Acta Mechanica Sinica**, 2011, **27**(5):840-844.
- [8] Chen D, Ozaki S. Analysis of in-plane elastic modulus for a hexagonal honeycomb core: Effect of core height and proposed analytical method [J]. **Composite Structures**, 2009, **88**(1):17-25.
- [9] Chen D. Bending deformation of honeycomb consisting of regular hexagonal cells [J]. **Composite Structures**, 2011, **93**(2):736-746.
- [10] Chen D, Yang L. Analysis of equivalent elastic modulus of asymmetrical honeycomb [J]. **Composite Structures**, 2011, **93**(2):767-773.
- [11] Chen D. Equivalent flexural and torsional rigidity of hexagonal honeycomb [J]. **Composite Structures**, 2011, **93**(7):1910-1917.
- [12] Kalamkarov A. **Composite and Reinforced Elements of Construction** [M]. New York: John Wiley & Sons, 1992.
- [13] Kalamkarov A, Kolpakov A. **Analysis, Design, and Optimization of Composite Structures** [M]. New York: John Wiley & Sons, 1997.
- [14] Hassani B, Hinton E. **Homogenization and Structural Topology Optimization: Theory, Practice, and Software** [M]. London: Springer, 1999.
- [15] CAI Yuan-wu, XU Liang, CHENG Geng-dong. Novel numerical implementation of asymptotic homogenization method for periodic plate structures [J]. **International Journal of Solids and Structures**, 2014, **51**(1):284-292.
- [16] CHENG Geng-dong, CAI Yuan-wu, XU Liang. Novel implementation of homogenization method to predict effective properties of periodic materials [J]. **Acta Mechanica Sinica**, 2013, **29**(4):550-556.

## Study of effective stiffnesses of periodic honeycomb plate with regular hexagonal unit cell

CAI Yuan-wu, XU Liang, CHENG Geng-dong\*

( Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China )

**Abstract:** Using a new method of calculating effective stiffnesses of periodic plate structures, the effective stiffnesses of hexagonal honeycomb plate are studied with various wall thicknesses and cell heights varying in large extent. A series of explicit approximate formulas are given to estimate the effective stiffnesses, and the results are verified. The new method can exactly realize asymptotic homogenization method which is strict in theory, and is easy to implement as the representative volume element (RVE) method. It is able to use different element types to model the honeycomb unit cell according to its specific sizes and improve efficiency. At last, the accuracy of the explicit approximate formulas, valid condition of the classical laminate theory and the influence of the Poisson's ratio are discussed.

**Key words:** effective stiffness; honeycomb plate; asymptotic homogenization; finite element method; laminate theory