

关于局部扭立方体的反馈数

张思佳¹, 徐喜荣^{*1}, 刘 聪¹, 曹 楠², 杨元生¹

(1. 大连理工大学 电子信息与电气工程学部, 辽宁 大连 116024;

2. 中国科学技术大学 数学系, 安徽 合肥 230026)

摘要: 确定一般网络(或图)的最小反馈点集问题属 NP 难问题. n 维局部扭立方体网络 Q_{lin} 是 n 维超立方体网络 Q_n 的变形且是一类重要的互连网络拓扑结构, 其拥有的某些性质优于 Q_n . 根据 Q_{lin} 顶点集合中最后一位字节不同的特点, 将其顶点集合划分为两个不相交的子集, 通过构造极大无圈子图得到反馈数的上界, 并证明了对任意正整数 $n \geq 2$, 存在常数 $c \in (0, 1)$ 使得反馈数为 $f(n) = 2^{n-1} \left(1 - \frac{c}{n-1}\right)$.

关键词: 局部扭立方体; 独立集; 无圈子图; 反馈数

中图分类号: O157.9; TP302 **文献标识码:** A **doi:** 10.7511/dllgxb201402018

0 引言

在组合网络理论中, 若一个简单图删除某些节点后构成的导出子图不存在回路, 则称被删去的节点集合为该简单图的反馈点集. 阶数最小的反馈点集称为最小反馈点集, 最小反馈点集的阶数叫做反馈数.

确定图的最小反馈点集问题, 因其在诸多领域内的广泛应用而受到重视. 例如在互联网中, 如果网络有回路, 广播消息会一直在网桥环网中传递, 形成“广播风暴”, 阻塞网络. 解决这个问题的做法就是想办法尽可能少地关闭一些网桥, 使剩下的网络不再有回路^[1]. 再如: 任何一个具有自动化功能的工作单位, 都需要不断地发出指令, 再分析指令执行的结果, 然后发出新的指令, 用以调整或改变工作状态. 持续不断的反馈是自动化得以实现的关键. 另外, 在操作系统和超级计算机的分布式计算中避免死锁产生的问题, 同样也是确定网络反馈点集的问题^[2].

因为确定一般网络(或图)的最小反馈点集问题属 NP 难问题^[3], 所以现阶段还不能对这一问题给出令人满意的结论. 尽管在一些文献中, 对某些特殊拓扑结构图(如 mesh 网络、toroids 网络、

butterflies 网络、立方连通网络、超立方体网络和星图等)的反馈数的上界和下界都已经陆续得到^[4-19], 但即使是得到了具体的图, 要确定其最小反馈集仍不是容易的事.

本文根据局部扭立方体顶点集合中最后一位字节不同的特点, 将其顶点集合划分为两个不相交的子集, 并构造极大无圈子图得到反馈数的上界, 从而研究局部扭立方体的反馈数问题.

1 定义和引理

n 维局部扭立方体(locally twisted cube) 简称为 Q_{lin} ($n \geq 2$), 由 Yang 等^[14] 于 2005 年提出. Q_{lin} 网络是超立方体网络 Q_n 的变形. 与 n 维超立方体 Q_n 类似, Q_{lin} 是一个具有 2^n 个顶点的 n -正则图, 顶点集由 n 维的 $\{0, 1\}$ 字符串组成. 但 Q_{lin} 相比 Q_n 有许多好的性质, 例如在维数相同的情况下, Q_{lin} 具有比 Q_n 更小的半径; Q_{lin} 能嵌入所有长度为 l ($4 \leq l \leq 2^n$) 的圈, 圈嵌入能力优于 Q_n . 有关局部扭立方体的其他性质, 可参阅文献[3, 4, 10-13, 15-19].

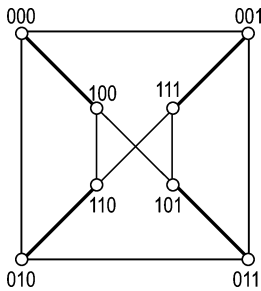
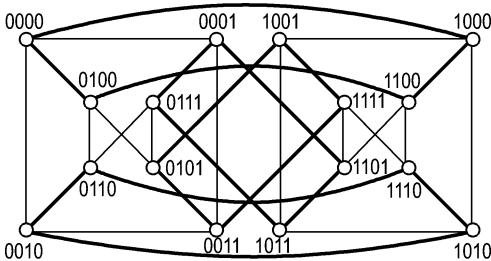
定义 1 Q_{lin} 的边集由这样的边组成: 对任意两个顶点 $x = x_1 x_2 \cdots x_n$ 和 $y = y_1 y_2 \cdots y_n$, 它们之间进行连边, 当且仅当它们满足如下要求之一:

(1) 存在一个整数 $k(1 \leq k \leq n-2)$ 满足 $y_k = \bar{x}_k$ ($\bar{x}_k$ 是 x_k 的补点, $x_k \in \{0, 1\}$), $y_{k+1} = (x_{k+1} + x_n) \bmod 2$, x 和 y 的其余字节均相同(x 和 y 仅有连续两位字节不同), 此时 (x, y) 称为非匹配边;

(2) 存在一个整数 $k \in \{n-1, n\}$, x 和 y 仅在第 k 位不同, 其余字节全相同, 则 x 和 y 存在连边, 并称 (x, y) 为匹配边.

由上述定义不难发现, Q_{lt2} 由标记为 00、01、10 和 11 的 4 个顶点以及 4 条边(00, 01)、(00, 10)、(01, 11)、(10, 11) 组成.

当 $n \geq 3$, Q_{ltn} 由两个不相交的 $Q_{lt(n-1)}$ 图添加 2^{n-1} 条边组成, 其按照如下步骤构建: 在其中一个 $Q_{lt(n-1)}$ 的所有顶点的二进制串前面加上一个前缀 0, 用 $0Q_{lt(n-1)}$ 表示; 其中的另外一个 $Q_{lt(n-1)}$ 的所有顶点的二进制串前面加上一个前缀 1, 用 $1Q_{lt(n-1)}$ 表示; 用一条边连接图形 $0Q_{lt(n-1)}$ 中的顶点 $x = 0x_2x_3 \cdots x_n$ 和图形 $1Q_{lt(n-1)}$ 中的顶点 $x = 1(x_2 + x_n)x_3 \cdots x_n$, 这里“+”表示模 2 加法. 通常, 记为 $Q_{ltn} = L \oplus R$, 其中 $L \cong 0Q_{lt(n-1)}$, $R \cong 1Q_{lt(n-1)}$. 如图 1 所示.

(a) Q_{lt3} (b) Q_{lt4} 图 1 局部扭立方体 Q_{lt3} 和 Q_{lt4} Fig. 1 Locally twisted cube Q_{lt3} and Q_{lt4}

定义 2 图 G 中两两互不相邻的顶点构成的集合 S 称为图 G 的独立集.

Beineke 等^[15] 证明了一般图 $G = (V, E)$ 的反馈数的下界为

$$f(G) \geq \left\lceil \frac{|E| - |V| + 1}{\Delta - 1} \right\rceil$$

其中 $\Delta = \Delta(G)$, 为图 G 的最大度. 由于 Q_{ltn} 是 n -正则图, Q_{ltn} 的最小度 $\Delta = n$ 且 $|V(Q_{ltn})| = 2^n$, $|E(Q_{ltn})| = n2^{n-1}$. 所以得到如下 Q_{ltn} 的反馈数的下界.

引理 1 令 $f(n)$ 表示 Q_{ltn} 的反馈数, 则有 $f(n) > 2^{n-1} \left(1 - \frac{1}{n-1}\right)$.

2 局部扭立方体的反馈数的上界

定义 3 对于局部扭立方体 Q_{ltn} , 顶点 $x = x_1x_2 \cdots x_n \in V(Q_{ltn})$. 定义:

$$AQ_n = \left\{ x \in V(Q_{ltn}) \mid \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \bmod 2 = 1 \right\}$$

$$BQ_n = \left\{ x \in V(Q_{ltn}) \mid \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \bmod 2 = 0 \right\}$$

显然, AQ_n 是 Q_{ltn} 的所有奇顶点构成的集合, BQ_n 是 Q_{ltn} 的所有偶顶点构成的集合, 且 $V(Q_{ltn}) = AQ_n \cup BQ_n$, $AQ_n \cap BQ_n = \emptyset$.

定义 4 把顶点集合 $V(Q_{ltn})$ 与字符串 $b = y_1y_2 \cdots y_j$ ($y_i \in \{0, 1\}$, $1 \leq i \leq j$) 连接, 定义为 $Q_{ltn}^b = \{xb \mid x \in V(Q_{ltn})\}$, ${}^bQ_{ltn} = \{bx \mid x \in V(Q_{ltn})\}$. 把二进制字符串 b 和含有二进制字符串元素的集合 Q 连接, 定义为 $Q^b = \{xb \mid x \in Q\}$, ${}^bQ = \{bx \mid x \in Q\}$, 其中 xb 代表字符串 x 与字符串 b 连接组成的一个新字符串, bx 代表字符串 b 与字符串 x 连接组成的一个新字符串.

通常, 由 $Q_{ltn} = 0Q_{lt(n-1)} \oplus 1Q_{lt(n-1)}$ 知, 可根据第一位字节的不同将 Q_{ltn} 的顶点划分为两个不相交的子集.

本文给出一种新的划分方法: 根据最后一位字节的不同将 Q_{ltn} 的顶点划分为两个不相交的子集.

取 $T_{n-1}^0 = \{x = x_{n-1}x_{n-2} \cdots x_1 0 \mid x \in V(Q_{ltn})\}$, $M_{n-1}^1 = \{x = x_{n-1}x_{n-2} \cdots x_1 1 \mid x \in V(Q_{ltn})\}$, 则有 $V(Q_{ltn}) = T_{n-1}^0 \cup M_{n-1}^1$, $T_{n-1}^0 \cap M_{n-1}^1 = \emptyset$

即 T_{n-1}^0 与 M_{n-1}^1 为 Q_{ltn} 的顶点划分的两个不相交的子集.

由 Q_{ltn} 的定义, 任意选取 $x = x_{n-1}x_{n-2} \cdots x_1 0 \in T_{n-1}^0$, 存在唯一一个点 $y = x_{n-1}x_{n-2} \cdots x_1 1 \in M_{n-1}^1$, 使得 x 与 y 之间有边相连.

首先给出新划分的两个不相交的子集 T_{n-1}^0 与 M_{n-1}^1 的性质.

引理 2 令 $G_0 = G(T_{n-1}^0), G_1 = G(M_{n-1}^1)$, 那么 $G_0 = G(Q_{n-1}^0)$ 且 $G_1 = G(Q_{n-1}^1)$.

证明 显然, $V(G_0) = Q_{n-1}^0 = \{x0 \mid x \in V(Q_{n-1}^0)\}$, 只需证明 $E(G_0) = E(G(Q_{n-1}^0))$.

因为 G_0 是 Q_{ln} 中 T_{n-1}^0 的导出子图, $\forall x, y \in T_{n-1}^0, x = x_{n-1}x_{n-2} \cdots x_1 0, y = y_{n-1}y_{n-2} \cdots y_1 0$ 且 x 和 y 的最后一位字节都为 0. 由 Q_{ln} 定义知, 当且仅当 x 和 y 只有一位字节不同时存在连边, 这与 Q_{n-1}^0 的定义等同, 因此 $E(G_0) = E(G(Q_{n-1}^0))$.

同理, 可证 $G_1 = G(Q_{n-1}^1)$. 证毕.

由 $M_{n-1}^1 = \{x = x_{n-1}x_{n-2} \cdots x_1 1 \mid x \in V(Q_{ln})\}$, 可以得到:

$$M_{n-1}^1 = \{x = x_{n-1}x_{n-2} \cdots x_1 \mid x = x_{n-1}x_{n-2}x_{n-3} \cdots x_1 1 \in M_{n-1}^1\}$$

例如: $M_2^1 = \{001, 011, 101, 111\}$, 则有 $M_2 = \{00, 01, 10, 11\}$;

$M_3^1 = \{0001, 0011, 0101, 0111, 1001, 1011, 1101, 1111\}$, 则有 $M_3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$.

定义 5 令 $R_2 = \{00, 01\}, S_2 = \{10, 11\}$, 定义集合 R_n 和 S_n 如下:

$$\begin{cases} R_{2k+1} = {}^0R_{2k} \cup {}^1R_{2k} \\ S_{2k+1} = {}^0S_{2k} \cup {}^1S_{2k} \end{cases}, \begin{cases} R_{2k} = {}^0R_{2k-1} \cup {}^1S_{2k-1} \\ S_{2k} = {}^0S_{2k-1} \cup {}^1R_{2k-1} \end{cases}$$

按定义 5 的规则易得到集合 R_n 和 S_n 与 M_n 之间有如下结果:

$$\begin{cases} R_3 = {}^0R_2 \cup {}^1R_2 = \{000, 001\} \cup \{100, 101\} \\ S_3 = {}^0S_2 \cup {}^1S_2 = \{010, 011\} \cup \{110, 111\} \\ R_3 \cup S_3 = {}^0R_2 \cup {}^1R_2 \cup {}^0S_2 \cup {}^1S_2 = {}^0M_2 \cup {}^1M_2 = M_3 \\ R_4 = {}^0R_3 \cup {}^1S_3 = \{0000, 0001, 0100, 0101\} \cup \{1010, 1011, 1110, 1111\} \\ S_4 = {}^0S_3 \cup {}^1R_3 = \{0010, 0011, 0110, 0111\} \cup \{1000, 1001, 1100, 1101\} \\ R_4 \cup S_4 = {}^0R_3 \cup {}^1S_3 \cup {}^0S_3 \cup {}^1R_3 = {}^0M_3 \cup {}^1M_3 = M_4 \end{cases}$$

根据归纳可得 $R_n \cup S_n = {}^0R_{n-1} \cup {}^1R_{n-1} \cup {}^0S_{n-1} \cup {}^1S_{n-1} = {}^0M_{n-1} \cup {}^1M_{n-1} = M_n$.

因为 $M_n = R_n \cup S_n$, 则 $M_n^1 = R_n^1 \cup S_n^1$.

现在讨论 R_n^1 与 S_n^1 所诱导的子图之间的关系.

引理 3 令 $G_2 = G(R_n^1), G_3 = G(S_n^1)$, 则 G_2 和 G_3 分别只含有匹配边.

证明 采用归纳法证明. 由 $R_2 = \{00, 01\}, S_2$

$= \{10, 11\}$, 可得

$$\begin{cases} R_3 = {}^0R_2 \cup {}^1R_2 = \{000, 001, 100, 101\} \\ S_3 = {}^0S_2 \cup {}^1S_2 = \{010, 011, 110, 111\} \\ R_3^1 = {}^0R_2^1 \cup {}^1R_2^1 = \{0001, 0011, 1001, 1011\} \\ S_3^1 = {}^0S_2^1 \cup {}^1S_2^1 = \{0101, 0111, 1101, 1111\} \end{cases}$$

如图 2 所示, 当 $n = 3$ 时, $G(R_3^1)$ 和 $G(S_3^1)$ 只含有匹配边. 同理, 当 $n = 4$ 时, $G(R_4^1)$ 和 $G(S_4^1)$ 也只含有匹配边.

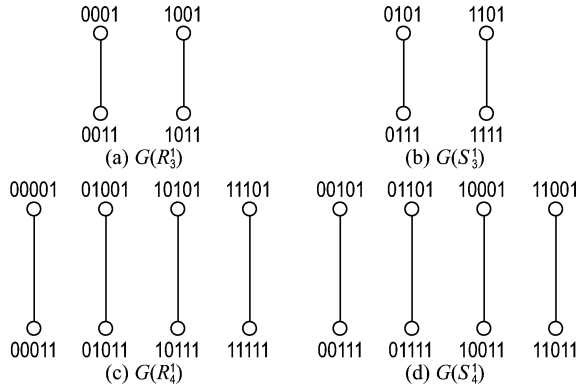


图 2 无圈子图 $G(R_3^1), G(S_3^1), G(R_4^1)$ 和 $G(S_4^1)$
Fig. 2 The acyclic subgraphs $G(R_3^1), G(S_3^1), G(R_4^1)$ and $G(S_4^1)$

对 n 分为奇数和偶数两种情形来归纳证明.

第 1 种情形: 假设当 n 为偶数时, 即当 $n = 2k$ 时, $G(R_{2k}^1)$ 和 $G(S_{2k}^1)$ 含有匹配边, 则证明当 $n = 2k + 1$ 时, $G(R_{2k+1}^1)$ 和 $G(S_{2k+1}^1)$ 只含有匹配边.

因为 $R_{2k+1} = {}^0R_{2k} \cup {}^1R_{2k}$, 则 $R_{2k+1}^1 = {}^0R_{2k}^1 \cup {}^1R_{2k}^1$. 由假设 $G(R_{2k}^1)$ 含匹配边, 则 $G({}^0R_{2k}^1)$ 和 $G({}^1R_{2k}^1)$ 含匹配边.

为证明 $G(R_{2k+1}^1)$ 含有匹配边, 只需证明 ${}^0R_{2k}^1$ 与 ${}^1R_{2k}^1$ 之间各点无连边. 用反证法证明, 假设 ${}^0R_{2k}^1$ 与 ${}^1R_{2k}^1$ 之间有点相连接, 即 $a \in {}^0R_{2k}^1, b \in {}^1R_{2k}^1, a$ 与 b 有连边, $(a, b) \in E(G(R_{2k+1}^1))$. 因为 $R_{2k} = {}^0R_{2k-1} \cup {}^1S_{2k-1}$, 则 ${}^0R_{2k} = {}^{00}R_{2k-1} \cup {}^{01}S_{2k-1}, {}^1R_{2k} = {}^{10}R_{2k-1} \cup {}^{11}S_{2k-1}; R_{2k}^1 = {}^0R_{2k-1}^1 \cup {}^1S_{2k-1}^1$, 则 ${}^0R_{2k}^1 = {}^{00}R_{2k-1}^1 \cup {}^{01}S_{2k-1}^1, {}^1R_{2k}^1 = {}^{10}R_{2k-1}^1 \cup {}^{11}S_{2k-1}^1$. 因此 $a \in {}^{00}R_{2k-1}^1$ 或 ${}^{01}S_{2k-1}^1, b \in {}^{10}R_{2k-1}^1$ 或 ${}^{11}S_{2k-1}^1$.

由 Q_{ln} 定义, 若 (a, b) 为非匹配边, 则 a 和 b 仅有连续两位字节不同, 其余全相同. 显然, a 和 b 的第一位字节不同, 若 (a, b) 为非匹配边, 则第二位字节必不相同. 那么, 分两种情况考虑:

情况 1 如果 $a \in {}^{00}R_{2k-1}^1$, 则 $b \in {}^{11}R_{2k-1}^1$. 显然, $R_{2k-1}^1 \neq S_{2k-1}^1$, 则 $b \notin {}^{11}S_{2k-1}^1$ 和 $b \notin {}^{10}R_{2k-1}^1$, 与假设矛盾;

情况 2 如果 $a \in {}^0S_{2k-1}^1$, 则 $b \in {}^{10}S_{2k-1}^1$. 显然, $S_{2k-1}^1 \neq R_{2k-1}^1$, 则 $b \notin {}^{10}R_{2k-1}^1$ 和 $b \notin {}^{11}S_{2k-1}^1$, 与假设矛盾.

因此, ${}^0R_{2k}^1$ 与 ${}^1R_{2k}^1$ 之间各点无连边, 即 $G(R_{2k+1}^1)$ 只含有匹配边. 同理, 可证 $G(S_{2k+1}^1)$ 只含有匹配边.

第2种情形: 假设当 n 为奇数时, 即 $n = 2k + 1$ 时, $G(R_{2k+1}^1)$ 和 $G(S_{2k+1}^1)$ 含有匹配边, 则证明当 $n = 2k + 2$ 时, $G(R_{2k+2}^1)$ 和 $G(S_{2k+2}^1)$ 只含有匹配边.

因为 $R_{2k+2} = {}^0R_{2k+1} \cup {}^1S_{2k+1}$, 则 $R_{2k+2}^1 = {}^0R_{2k+1}^1 \cup {}^1S_{2k+1}^1$. 由假设 $G(R_{2k+1}^1)$ 含匹配边, 则 $G({}^0R_{2k+1}^1)$ 和 $G({}^1S_{2k+1}^1)$ 含匹配边.

为证明 $G(R_{2k+2}^1)$ 含有匹配边, 只需证明 ${}^0R_{2k+1}^1$ 与 ${}^1S_{2k+1}^1$ 之间各点无连边. 用反证法证明, 假设 ${}^0R_{2k+1}^1$ 与 ${}^1S_{2k+1}^1$ 之间有点相连接, 即 $a \in {}^0R_{2k+1}^1$, $b \in {}^1S_{2k+1}^1$, a 与 b 有连边, $(a, b) \in E(G(R_{2k+2}^1))$.

因为 $R_{2k+1} = {}^0R_{2k} \cup {}^1R_{2k}$, 则 ${}^0R_{2k+1}^1 = {}^{00}R_{2k}^1 \cup {}^{01}R_{2k}^1$; $S_{2k+1} = {}^0S_{2k} \cup {}^1S_{2k}$, 则 ${}^1S_{2k+1}^1 = {}^{10}S_{2k}^1 \cup {}^{11}S_{2k}^1$. 因此 $a \in {}^{00}R_{2k}^1$ 或 ${}^{01}R_{2k}^1$, $b \in {}^{10}S_{2k}^1$ 或 ${}^{11}S_{2k}^1$.

由 Q_{ltn} 定义, 若 (a, b) 为非匹配边, 则 a 和 b 仅有连续两位字节不同, 其余全相同. 显然, a 和 b 的第一位字节不同, 若 (a, b) 为非匹配边, 则第二位字节必不相同. 那么, 分两种情况考虑:

情况 1 如果 $a \in {}^{00}R_{2k}^1$, 则 $b \in {}^{11}R_{2k}^1$. 显然, $R_{2k}^1 \neq S_{2k}^1$, 则 $b \notin {}^{11}S_{2k}^1$ 和 $b \notin {}^{10}S_{2k}^1$, 与假设矛盾;

情况 2 如果 $a \in {}^{01}R_{2k}^1$, 则 $b \in {}^{10}R_{2k}^1$. 显然, $S_{2k}^1 \neq R_{2k}^1$, 则 $b \notin {}^{10}S_{2k}^1$ 和 $b \notin {}^{11}S_{2k}^1$, 与假设矛盾.

因此, ${}^0R_{2k+1}^1$ 与 ${}^1S_{2k+1}^1$ 之间各点无连边, 即 $G(R_{2k+2}^1)$ 只含有匹配边. 同理, 可证 $G(S_{2k+2}^1)$ 只含有匹配边. 证毕.

由引理 2 知, $T_{n-1}^0 = Q_{n-1}^0 = AT_{n-1}^0 \cup BT_{n-1}^0$, 其中 AT_{n-1}^0 为 Q_{n-1}^0 的奇数点集合, BT_{n-1}^0 为 Q_{n-1}^0 的偶数点集合. AT_{n-1}^0 和 BT_{n-1}^0 分别是 Q_{n-1}^0 的独立集.

引理 4 $G(AT_{n-1}^0 \cup R_{n-1}^1)$ 是 Q_{ltn} 的无圈子图.

证明 AT_{n-1}^0 是 Q_{n-1}^0 的独立集, 也是 Q_{ltn} 的独立集, 则 $G(AT_{n-1}^0)$ 是不含圈的. 由引理 3 得, $G(R_{n-1}^1)$ 只含有匹配边, 则 $G(R_{n-1}^1)$ 是不含圈的.

因为 $AT_{n-1}^0 \subset T_{n-1}^0$, $R_{n-1}^1 \subset M_{n-1}^1$, 由 Q_{ltn} 定义知, 顶点 $x \in AT_{n-1}^0$ 与顶点 $y \in R_{n-1}^1$ 当且仅当最后一位字节不同, 其余字节相同时两点之间有连

边. 即若 x 与 y 相连, 则 $\forall x = x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_10 \in AT_{n-1}^0$, 至多存在一个 $y = y_{n-1}y_{n-2}\cdots y_11 \in R_{n-1}^1$. 因此, $G(AT_{n-1}^0 \cup R_{n-1}^1)$ 的导出子图是不含圈的.

证毕.

由引理 4 和反馈点集的定义, 得下面引理.

引理 5 $V(Q_{ltn}) \setminus (AT_{n-1}^0 \cup R_{n-1}^1)$ 是 Q_{ltn} 的反馈点集.

定理 1 令 $f(n)$ 为 Q_{ltn} 的反馈数, 则 $f(n) \leq 2^{n-1}$.

证明 因为 $|AT_{n-1}^0| = \frac{1}{2}|T_{n-1}^0| = \frac{1}{4}|V(Q_{ltn})| = \frac{1}{4} \times 2^n$, 则有 $|R_{n-1}^1| = \frac{1}{2}|M_{n-1}^1| = \frac{1}{4}|V(Q_{ltn})| = \frac{1}{4} \times 2^n$, 即 $|AT_{n-1}^0 \cup R_{n-1}^1| = 2^{n-1}$, 所以 $f(n) \leq V(Q_{ltn}) \setminus (AT_{n-1}^0 \cup R_{n-1}^1) = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$. 证毕.

由定理 1 和引理 1, 得下面定理.

定理 2 任意正整数 $n \geq 2$ 且 $c \in (0, 1)$ 时, Q_{ltn} 的反馈数为

$$f(n) = 2^{n-1} \left(1 - \frac{c}{n-1} \right)$$

注: 事实上, 可证 $G(BT_{n-1}^0 \cup S_{n-1}^1)$ 是不含圈的, $V(Q_{ltn}) \setminus (BT_{n-1}^0 \cup S_{n-1}^1)$ 也是 Q_{ltn} 的反馈点集. 因为 $|BT_{n-1}^0 \cup S_{n-1}^1| = 2^{n-1}$, 可得 $f(n) \leq V(Q_{ltn}) \setminus (BT_{n-1}^0 \cup S_{n-1}^1) = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$, 即结合引理 1 也可得到定理 2.

3 结 语

对一般图确定最小反馈点集是一个 NP 难问题, 准确计算出图的最小反馈点集是很困难的. 至今, 人们只对一些特殊的图给出了求最小反馈点集的多项式时间的算法. 本文根据 n 维局部扭立方体顶点集合中最后一位字节不同的特点, 将其顶点集合划分为两个不相交的子集, 构造极大无圈子图并得到了局部扭立方体网络的反馈数的上界.

参考文献:

- [1] 周书明. 六角形蜂窝网络的反馈数[J]. 工程数学学报, 2011, 28(2): 260-264.
ZHOU Shu-ming. Feedback number of honeycomb networks [J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2011, 28(2): 260-264. (in Chinese)
- [2] 吴叶舟. 线图的反饋数[D]. 合肥: 中国科学技术大

- 学, 2006.
- WU Ye-zhou. Feedback numbers of line graphs [D]. Hefei: University of Science and Technology of China, 2006. (in Chinese)
- [3] Garey M R, Johnson D S. **Computers and Intractability** [M]. San Francisco: Freeman, 1979.
- [4] Erdős P, Saks M, Sos V T. Maximum induced trees in graphs [J]. **Journal of Combinatorial Theory Series B**, 1986, **41**(1): 61-79.
- [5] Bafna V, Berman P, Fujito T. A 2-approximation algorithm for the undirected feedback vertex set problem [J]. **Discrete Mathematics**, 1999, **12**(3): 289-297.
- [6] Bau S, Beineke L W, Liu Z, *et al.* Decycling cubes and grids [J]. **Utilitas Mathematica**, 2001, **59**: 129-137.
- [7] Bar-Yehuda R, Geiger D, Naor J S, *et al.* Approximation algorithms for the feedback vertex set problem with applications to constraint satisfaction and Bayesian inference [J]. **SIAM Journal on Computing**, 1998, **27**(4): 942-959.
- [8] Focardi R, Luccio F L, Peleg D. Feedback vertex set in hypercubes [J]. **Information Process Letters**, 2000, **76**(1-2): 1-5.
- [9] Liang Y D. On the feedback vertex set problem in permutation graphs [J]. **Information Processing Letters**, 1994, **52**(3): 123-129.
- [10] Luccio F L. Almost exact minimum feedback vertex set in meshes and butterflies [J]. **Information Processing Letters**, 1998, **66**(2): 59-64.
- [11] Smith G W, Walford R B Jr. The identification of a minimal feedback vertex set of a directed graph [J]. **IEEE Transaction on Circuits and Systems**, 1975, **22**(1): 9-15.
- [12] Wang C C, Lloyd E L, Soffa M L. Feedback vertex sets and cyclically reducible graphs [J]. **Journal of the ACM**, 1985, **32**(2): 296-313.
- [13] Wang F H, Hsu C J, Tsai J C. Minimal feedback vertex sets in directed split-stars [J]. **Networks**, 2005, **45**(4): 218-223.
- [14] YANG Xiao-fan, Evans D J, Megson G. The locally twisted cubes [J]. **International Journal of Computer Mathematics**, 2005, **82**(4): 401-413.
- [15] Beineke L W, Vandell R C. Decycling graphs [J]. **Graph Theory**, 1997, **25**(1): 59-77.
- [16] Kralovic R, Ruzicka P. Minimum feedback vertex sets in shuffle-based interconnection networks [J]. **Information Processing Letters**, 2003, **86**(4): 191-196.
- [17] XU Jun-ming, WU Ye-zhou, HUANG Jia, *et al.* Feedback numbers of Kautz digraphs [J]. **Discrete Mathematics**, 2007, **307**(13): 1589-1599.
- [18] XU Jun-ming. **Topological Structure and Analysis of Interconnection Networks** [M]. London: Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [19] Riordan J. **Introduction to Combinatorial Analysis** [M]. Princeton: Princeton University Press, 1978.

On feedback number of locally twisted cube

ZHANG Si-jia¹, XU Xi-rong^{*1}, LIU Cong¹, CAO Nan², YANG Yuan-sheng¹

(1. Faculty of Electronic Information and Electrical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;

2. Department of Mathematics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

Abstract: The minimum feedback point set problem is known to be NP-hard for general network (graphs). As an important interconnection network topological structure, the n -dimensional locally twisted cube network Q_{lt_n} is a new variant of n -dimensional hypercube network Q_n , which possesses some properties superior to those of Q_n . Since the last bytes in vertex set of Q_{lt_n} are different, vertex set of Q_{lt_n} is divided into two disjoint subsets. By constructing a maximal acyclic subgraph of Q_{lt_n} , the upper limit of feedback number is attained. It is proved that for any positive integer $n \geq 2$, there is a constant $c \in (0, 1)$, which makes the feedback number of Q_{lt_n} as follows: $f(n) = 2^{n-1} \left(1 - \frac{c}{n-1} \right)$.

Key words: locally twisted cube; independent set; acyclic subgraph; feedback number