

异结构超混沌系统的完全同步与反相同步控制

董俊¹, 张广军^{1,2}, 姚宏¹, 王珏², 李明阳¹, 赵静波¹

(1. 空军工程大学理学院, 陕西西安, 710051; 2. 西安交通大学生命科学与技术学院, 陕西西安, 710049)

摘要 基于 Lyapunov 稳定性理论和非线性动力学理论, 构造出相应的非线性控制器, 实现了三维混沌系统与四维超混沌系统之间异结构完全同步与反相同步控制, 并对上述 2 类同步给出了严格的数学证明。以一个新型三维自治系统为例, 引入状态反馈变量, 构造了一个新的超混沌系统, 研究了不同维数混沌系统之间的异结构完全同步与反相同步问题。最后, 借助于 Runge-Kutta 算法进行数值仿真, 通过对误差系统的误差进行分析, 得到驱动系统和响应系统状态变量误差能在短时间内快速趋于零, 表明理论推导的正确性和所提出方案的有效性。

关键词 超混沌系统; 完全同步; 反相同步; 非线性控制器

DOI 10.3969/j.issn.1009-3516.2012.05.019

中图分类号 TN911.7 **文献标识码** A **文章编号** 1009-3516(2012)05-0090-05

混沌的研究是非线性动力学领域中的重点问题之一, 由于混沌同步在保密通信、信号处理和生命科学等方面有着十分广泛的应用前景和巨大的市场潜在价值, 学者对此进行了广泛而深入地研究^[1-2]。

自 1990 年, Pecora 和 Corroll 首次提出了“混沌同步”的概念, 并在电路实验中实现了 2 个耦合混沌系统的同步^[3-4]。随后人们从不同的角度实现了不同类型的混沌同步, 如完全同步、广义同步、相同步、投影同步^[5-7]。混沌系统反相同步理论“从对立的角度拓展了传统意义上的混沌系统同步理论, 其应用比混沌系统同步理论的应用更具抗破译能力”。文献[8]对一个不确定混沌系统的反相同步进行了研究, 设计了一种自适应控制方法, 实现了参数不确定系统的混沌反相同步和未知参数的辨识; 文献[9]利用自适应控制方法对具有相同结构的超混沌系统, 进行了反相同步研究。综上所述, 相同结构低维混沌系统的同步与反相同步问题的研究已经比较成熟, 相同维数异结构超混沌系统的同步与反相同步问题在近年来也有了一定的研究。然而, 关于不同维数异结构超混沌系统之间的同步与反相同步问题的研究还鲜有报道。在实际应用中特别是混沌系统的同步与反相同步用于安全通信中, 驱动系统和响应系统的结构经常是不同的, 因此考虑不同维数异结构超混沌系统的同步与反相同步具有重要的实际意义。

为此, 本文提出了一种新的完全同步与反相同步方法, 扩展了同步与反相同步的应用范围, 并在理论分析的基础上, 通过数值仿真验证了所提出方案的有效性。该方法不仅可以实现相同维数异结构混沌系统之间的同步与反相同步, 也可以实现更高不同维数的异结构超混沌系统之间的同步与反相同步。

1 系统分析、完全同步及反相同步描述

1.1 混沌系统分析

文献[10]中提出了一个新型三维自治系统的状态方程表示为:

收稿日期: 2012-03-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10872156; 51175510); 航空科学基金资助项目(20111396011); 陕西省自然科学基金基础研究计划资助项目(2012JM8035)

作者简介: 董俊(1983-), 男, 江苏盐城人, 硕士生, 主要从事非线性动力学研究. E-mail: zhanggj3@126.com

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a(x_2 - x_1) \\ \frac{dx_2}{dt} = cx_1 - x_1x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = -bx_3 + x_1x_2 \end{cases} \quad (1)$$

当 $a=35, b=3, c=35$ 时,系统(1)的 3 个 Lyapunov 指数为: $\lambda_{L_1} = 1.074 2, \lambda_{L_2} = 0, \lambda_{L_3} = -39.074$, 此时系统(1)处于混沌状态,其系统(1)的混沌吸引子见图 1。

通过引入非线性控制器,将非线性控制器的输出,反馈到系统(1)的其他方程中实现超混沌。这个新的四维自治系统的状态方程表示为:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = a(y_2 - y_1) \\ \frac{dy_2}{dt} = cy_1 - y_1y_3 + y_4 \\ \frac{dy_3}{dt} = -by_3 + y_1y_2 \\ \frac{dy_4}{dt} = -dy_1 \end{cases} \quad (2)$$

当 $a=35, b=3, c=35, d=8$ 时,系统(2)的 4 个 Lyapunov 指数为: $\lambda_{L_1} = 0.278 8, \lambda_{L_2} = 0.147 0, \lambda_{L_3} = 0, \lambda_{L_4} = -38.429$, 其中有 2 个指数为正,此时系统(2)处于超混沌状态,其系统(2)的超混沌吸引子见图 2。

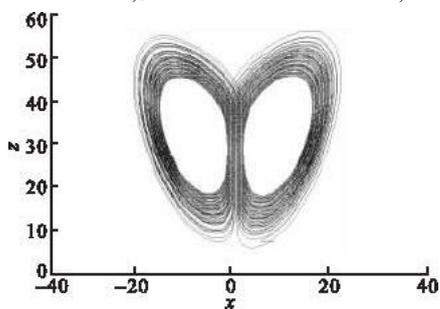


图 1 系统(1)在 $x-z$ 平面的相图

Fig. 1 The phase diagram of system (1) in coordinate $x-z$

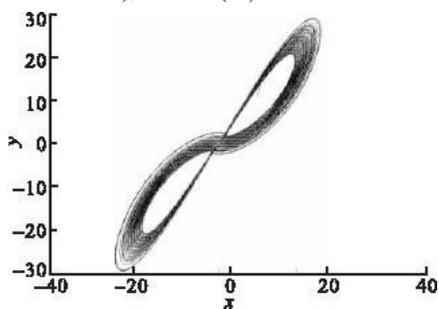


图 2 系统(2)在 $x-y$ 平面的相图

Fig. 2 The phase diagram of system (2) in coordinate $x-y$

1.2 完全同步与反相同步描述

假设存在如下的驱动系统和响应系统:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (3)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(t, y) + u(t, x, y) \quad (4)$$

式中 $u(t, x, y)$ 是非线性控制器。定义 2 个系统的同步误差为: $e(t) = y - x$, 如果 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$, 则系统(3)和系统(4)被称为完全状态同步。定义 2 个系统的反相同步误差为: $e(t) = y + x$, 如果 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$, 则系统(3)和系统(4)被称为完全状态反相同步。

2 新的三维混沌系统与四维超混沌系统完全同步控制

本文以混沌系统(1)为驱动系统,相应的超混沌系统(2)为受控的响应系统,有:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = a(y_2 - y_1) + u_1 \\ \frac{dy_2}{dt} = cy_1 - y_1y_3 + y_4 + u_2 \\ \frac{dy_3}{dt} = -by_3 + y_1y_2 + u_3 \\ \frac{dy_4}{dt} = -dy_1 + u_4 \end{cases} \quad (5)$$

系统(5)中 $u_i (i=1,2,3,4)$ 为非线性控制器。令系统(5)与系统(1)的同步误差为 $e_i = y_i - x_i (i=1,2,3,4)$, 其中 $x_4 = 0$ 。可得到如下的误差系统:

$$\begin{cases} \frac{de_1}{dt} = a(e_2 - e_1) + u_1 \\ \frac{de_2}{dt} = ce_1 - y_1y_3 + x_1x_3 + y_4 + u_2 \\ \frac{de_3}{dt} = -be_3 + y_1y_2 - x_1x_2 + u_3 \\ \frac{de_4}{dt} = -dy_1 + u_4 \end{cases} \quad (6)$$

定理 1 对于由驱动系统(1)和响应系统(5)构成的混沌同步系统,若选取非线性控制器式(8),则系统(1)和系统(5)可实现异结构完全同步控制,即对于任意初始值,误差系统(6)都有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e\| = 0$ 。

证明 构建 Lyapunov 函数为:

$$V = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2) \quad (7)$$

则 Lyapunov 函数沿着误差轨道对时间的导数为:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e_1\dot{e}_1 + e_2\dot{e}_2 + e_3\dot{e}_3 + e_4\dot{e}_4 = \\ &= e_1(a(e_2 - e_1) + u_1) + e_2(ce_1 - y_1y_3 + x_1x_3 + y_4 + u_2) + e_3(-be_3 + y_1y_2 - x_1x_2 + u_3) + e_4(-dy_1 + u_4) = \\ &= -ae_1^2 - be_3^2 + (a+c)e_1e_2 + u_1e_1 + (-y_1y_3 + x_1x_3 + y_4)e_2 + (y_1y_2 - x_1x_2)e_3 + u_3e_3 + u_4e_4 \end{aligned}$$

此时若取:

$$u_1 = -(a+c)e_2, \quad u_2 = y_1y_3 - x_1x_3 - y_4, \quad u_3 = -y_1y_2 + x_1x_2, \quad u_4 = dy_1 \quad (8)$$

那么, $\dot{V} = -ae_1^2 - be_3^2 \leq 0$ 。由 Lyapunov 稳定性理论可得,误差系统(6)在原点渐近稳定。即非线性控制器式(8)作用下,系统(1)与系统(5)在对应的时间序列可以达到完全同步。(证毕)

3 新的三维混沌系统与四维超混沌系统反相同步控制

仍然以混沌系统(1)为驱动系统,相应的超混沌系统(5)为受控的响应系统,令系统(1)与系统(5)的反相同步误差为 $e_i = y_i + x_i (i=1,2,3,4)$, 其中 $x_4 = 0$ 。可得到如下的误差系统:

$$\begin{cases} \frac{de_1}{dt} = a(e_2 - e_1) + u_1 \\ \frac{de_2}{dt} = ce_1 - y_1y_3 - x_1x_3 + y_4 + u_2 \\ \frac{de_3}{dt} = -be_3 + y_1y_2 + x_1x_2 + u_3 \\ \frac{de_4}{dt} = -dy_1 + u_4 \end{cases} \quad (9)$$

定理 2 对于由驱动系统(1)和响应系统(5)构成的混沌反相同步系统,若选取非线性控制器式(10),则系统(1)和系统(5)可实现反相同步控制。即对于任意初始值,误差系统(9)都有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e\| = 0$ 。

证明 选取 Lyapunov 函数式(7),则:

$$V = e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 + e_3 \dot{e}_3 + e_4 \dot{e}_4 = -ae_1^2 - be_3^2 + (a+c)e_1e_2 + u_1e_1 + (-y_1y_3 - x_1x_3 + y_4)e_2 + u_2 + (y_1y_2 + x_1x_2)e_3 + u_3e_3 - dy_1e_4 + u_4e_4$$

若取:

$$u_1 = -(a+c)e_2, \quad u_2 = y_1y_3 + x_1x_3 - y_4, \quad u_3 = -y_1y_2 - x_1x_2, \quad u_4 = dy_1 \tag{10}$$

那么, $V = -ae_1^2 - be_3^2 \leq 0$, 由 Lyapunov 稳定性理论可得, 误差系统(9)在原点渐近稳定。即非线性控制器式(10)作用下, 系统(1)与系统(5)在对应的时间序列可以达到反相同步。(证毕)

4 数值仿真分析

采用 4 阶 Runge - Kutta 方法对驱动系统(1)和响应系统(5)的异结构完全同步与反相同步控制进行了数值仿真。选取参数 $a = 35, b = 3, c = 35, d = 8$ 时, 步长为 0.005, 随机选取驱动系统、响应系统的状态初始值为: $x_1(0) = 1, x_2(0) = 2, x_3(0) = 3, y_1(0) = 4, y_2(0) = 5, y_3(0) = 6, y_4(0) = 7$, 计算 2 个系统的同步误差, 其完全同步误差仿真结果见图 3 - 5。由图可见, 系统状态误差曲线 $e_1(t), e_2(t), e_3(t)$ 随时间变化很快都趋于零, 即两系统达到了完全同步。

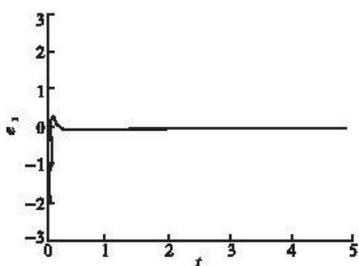


图 3 $e_1(t) - t$
Fig. 3 $e_1(t) - t$

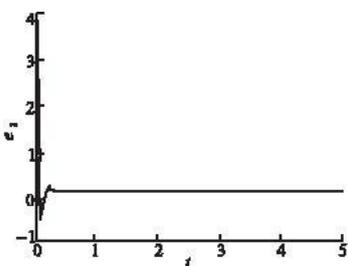


图 4 $e_2(t) - t$
Fig. 4 $e_2(t) - t$

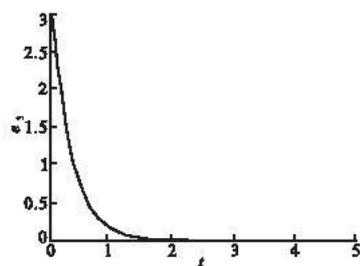


图 5 $e_3(t) - t$
Fig. 5 $e_3(t) - t$

对于系统反相同步数值仿真, 选取相同的参数、计算步长和状态初始值, 得到了 2 个系统的反相同步误差, 其反相同步误差仿真结果如图 6 - 8。由图可见, $e_1(t), e_2(t), e_3(t)$ 随时间变化很快都趋于零, 即两系统达到了反相同步。

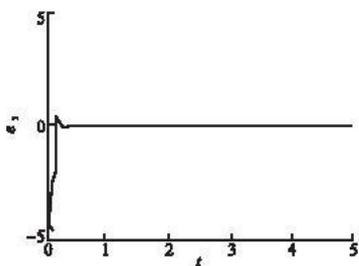


图 6 $e_1(t) - t$
Fig. 6 $e_1(t) - t$

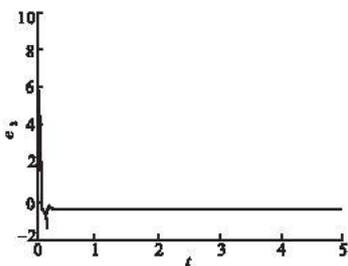


图 7 $e_2(t) - t$
Fig. 7 $e_2(t) - t$

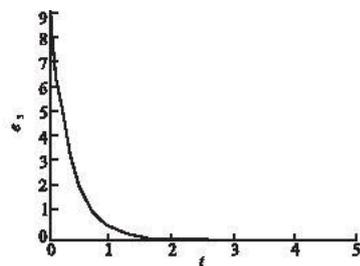


图 8 $e_3(t) - t$
Fig. 8 $e_3(t) - t$

5 结束语

本文基于 Lyapunov 稳定性理论, 构造出相应的非线性控制器, 研究了三维混沌系统与四维超混沌系统之间对应时间序列的完全同步与反相同步。该方案不仅可以实现相同维数异结构混沌系统之间的同步与反相同步, 也可以实现更高不同维数的异结构超混沌系统之间的同步与反相同步; 该方法具有收敛速度快, 范围广, 易于实现等优点, 对工程领域的研究者具有一定的理论意义和较广的应用价值。

参考文献 (References):

[1] 王光瑞, 于熙龄, 陈式刚. 混沌的控制、同步与利用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2001.
WANG Guangrui, YU Xiling, CHEN Shigang. Chaotic control, synchronization and utilizing[M]. Beijing: National defence

- industry press, 2001. (in Chinese)
- [2] 冯朝文, 蔡理, 康强, 等. 一种新的三维自治混沌系统[J]. 物理学报, 2011, 60(3): 030503-7.
FENG Chaowen, CAI Li, KANG Qiang, et al. A novel three - dimensional autonomous chaotic system[J]. Acta phy sin. 2011, 60(3): 030503-7. (in Chinese)
- [3] Pecora L M, Carroll T L. Synchronization of chaotic systems[J]. Physical review letters, 1990, 64(8): 821-830.
- [4] Carroll T L, Pecora L M. Synchronizing chaotic circuits[J]. IEEE transactions on circuits and systems, 1991, 38(4): 453-456.
- [5] Kolarlarevl, Parlitzu. General approach for chaotic synchronization with application to communication[J]. Physical review letters, 1995, 74 (25): 5028-5031.
- [6] Xu Daolin. Control of projective synchronization in chaotic systems[J]. Physical review E, 2001, 64: 027201-4.
- [7] 郑皓洲, 胡进峰, 徐威, 等. 一类新型超混沌系统的非线性反馈同步研究[J]. 电子与信息学报, 2011, 33(4): 844-848.
ZHENG Haozhou, HU Jinfeng, XU Wei, et al. Study on synchronization of a new class of hyperchaotic systems using nonlinear feedback control[J]. Journal of electronics & information technology, 2011, 33(4): 844-848. (in Chinese)
- [8] 李农, 李建芬, 刘宇平. 不确定混沌系统的反同步与参数辨识[J]. 物理学报, 2010, 59(9): 5954-5958.
LI Nong, LI Jianfen, LIU Yuping. Anti - synchronization of uncertain chaotic system and parameters identification[J]. Acta phys sin. 2010, 59(9): 5954-5958. (in Chinese)
- [9] 朱少平. 不确定超混沌系统的反同步研究[J]. 计算机工程与应用, 2011, 47(10): 145-146.
ZHU Shaoping. Anti - synchronization of hyperchaotic systems with uncertain parameters[J]. Computer engineering and applications, 2011, 47(10): 145-146. (in Chinese)
- [10] 王杰智, 陈增强, 袁著祉. 一个新的混沌系统及其性质研究[J]. 物理学报, 2006, 55(8): 3956-3963.
WANG Jiezhi, CHEN Zengqiang, YUAN Zhuzhi. A new chaotic system and analysis of its properties[J]. Acta phys sin, 2006, 55(8): 3956-3963. (in Chinese)

(编辑:徐敏)

The Control of Complete Synchronization and Anti - phase Synchronization for Hyper - chaotic Systems of Different Structures

DONG Jun¹, ZHANG Guang - jun^{1,2}, YAO Hong¹, WANG Jue², LI Ming - yang¹, ZHAO Jing - bo¹

(1. School of Science, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China; 2. School of Life Science and technology, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: Based on the Lyapunov stability theory and nonlinear dynamic theory, a controller is designed, the control of complete synchronization and anti - phase synchronization between 3 - dimensional and 4 - dimensional chaotic systems with different structures is implemented, and the two kind of synchronization are respectively proved strictly in mathematics. In this paper, taking a new 3D autonomous system for example, hyper - chaotic system is achieved by introducing an additional state variable to the new 3D chaotic system, thus a complete synchronization and anti - phase synchronization between chaotic systems with different structures and dimensions are investigated. Finally, by the Runge - Kutta scheme numerical simulation and from the simulation analysis of the error system between driving and coupled system, the graph of the errors can show that errors will become zero in short time, the numerical simulation shows the validity of the theoretical analysis and the effectiveness of the proposed method.

Key words: hyper - chaotic system; complete synchronization; anti - phase synchronization; nonlinear controller

本刊相关链接文献:

- [1] 王国红. 参数失配度对混沌同步的影响[J]. 空军工程大学学报:自然科学版, 2006, 7(3): 55-57.
- [2] 王森, 蔡理, 刘河潮. 量子细胞神经网络中的分岔与混沌[J]. 空军工程大学学报:自然科学版, 2005, 6(3): 85-87.
- [3] 李建芬, 李农. 时变信道通信中的多级蔡氏混沌同步[J]. 空军工程大学学报:自然科学版, 2001, 2(3): 73-76.