

有关应力- 应变及其不变量若干问题的合理表述

戴自航^{1, 2}, 沈蒲生²

(1. 福州大学环境与资源学院, 福建 福州 350002; 2. 湖南大学土木工程学院, 湖南 长沙 410082)

摘要: 提出在岩土工程应力- 应变分析中建立统一坐标系的建议. 在此基础上, 系统地介绍了平面问题和空间问题中过某点的倾斜面上的应力确定方法并由此应用于八面体应力的确定; 对八面体应力和 π 平面上的应力的几何和物理力学意义进行了比较说明; 介绍了一种推导应力或应变洛德角表达式的简明方法; 对各种剪应力的相对大小进行了合理的比较与说明.

关键词: 应力- 应变; 八面体; π 平面; 洛德角; 剪应力

中图分类号: TB125

文献标识码: A

Reasonable descriptions on some problems of stress- strain and their invariables

DAI Zi- hang^{1, 2}, SHEN Pu- sheng²

(1. College of Environment and Resources, Fuzhou University, Fuzhou, Fujian 350002, China; 2. College of Civil Engineering, Hunan University, Changsha, Hunan 410082, China)

Abstract: A suggestion that the coordinate system of stress and strain analysis in geotechnical engineering should be unified is made. Based on this, the methods to ascertain the stresses acting on the inclined planes in plane and spatial problems are introduced systematically. The analysis methods are applied in ascertaining the stresses acting on the octahedron. The geometric and physical mechanics meaning between stresses acting on octahedron and Pi plane is compared and explained. A concise method to deduce the Lode's angle is presented. The magnitude of different shear stresses is compared and expounded reasonably.

Keywords: stress- strain; octahedron; π plane; Lode's angle; shear stress

应力- 应变及其不变量是弹性力学^[1]、一般塑性力学^[2]和岩土弹塑性力学教程^[3- 6]中的基本问题, 现有岩土弹塑性力学教程^[3- 6]或相关文献^[7, 8]在阐述这部分内容时, 许多方面是值得完善或改进的, 诸如: 应力- 应变分析坐标系统表达杂乱; 应力分析理论不够系统和连贯; 对某些应力不变量或应力分量的图形表达、理论推导和几何解释不够明了; 甚至在对各剪应力大小比较时出现概念上的失误^[3, 4]. 为此, 本文就上述问题进行分析与探讨.

1 应力- 应变分析坐标系的统一

目前, 现有文献^[1- 8]在绘制应力应变分析坐标系时, 各坐标轴的布置和取向有些杂乱, 即使是同一文献在论述不同问题时, 坐标系的选取也往往不一致, 给读者和初学者在观察和分析图形时带来一定难度和不便. 对此, 笔者认为有必要对坐标系统进行统一. 分析平面问题时, 可统一采用数学上常用的 $x - y$ 坐标系: 即水平轴为 x 轴, 向东为正; 竖轴为 y 轴, 向北为正. 分析空间问题时, 在一般应力空间或应变空间, 可统一采用符合右手螺旋法则的 $x - y - z$ 坐标系: 垂直纸面的坐标轴为 x 轴, 且由内向

收稿日期: 2004- 11- 01

作者简介: 戴自航(1966-), 男, 博士, 副教授.

基金项目: 福建省自然科学基金计划资助项目(项目编号: D0410012); 福建省教育厅科技基金资助项目(项目编号: JB03016)

外为正; 水平轴为 y 轴, 向东为正, 竖轴为 z 轴, 向北为正. 在主应力或主应变空间, 一般可采用符合右手螺旋法则的 $\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3$ (或 $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3$) 坐标系: 竖轴为 σ_1 (或 ε_1) 轴, 向北为正; 垂直纸面的坐标轴为 σ_2 (或 ε_2) 轴, 且由内向外为正; 水平轴为 σ_3 (或 ε_3) 轴, 向东为正. 若如某些试验^[8]和工程岩土体中大主应力作用方向为水平方向, 可取垂直纸面的坐标轴为 σ_1 (或 ε_1) 轴, 由内向外为正; 水平轴为 σ_2 (或 ε_2) 轴, 向东为正, 竖轴为 σ_3 (或 ε_3) 轴, 向北为正. 本文讨论的各图坐标系的建立均遵循上述原则.

2 倾斜面上的应力

2.1 平面问题中过某点倾斜面的应力^[1]

平面问题中, 如果已知任一点 P 处的应力分量 σ_x 、 σ_y 、 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, 见图1, 就可以求得经过该点、平行于 z 轴而倾斜于 x 轴和 y 轴的任一斜面 AB 上的应力.

如图1, 常用 N 代表该斜面的外法线, 用 l 和 m 表示其与 x 轴和 y 轴的方向余弦, 用 x_N 和 y_N 代表该斜面上的合应力 s (或称全应力) 在 x 轴和 y 轴上的投影. 由平衡条件不难得到:

$$\begin{cases} x_N = l\sigma_x + m\tau_{xy} \\ y_N = m\sigma_y + l\tau_{yx} \end{cases} \quad (1)$$

按投影原理可得作用在斜面 AB 上的正应力和剪应力分别为:

$$\begin{cases} \sigma_N = lx_N + my_N \\ \tau_N = ly_N - mx_N \end{cases} \quad (2)$$

将式(1)代入上式, 可将式(2)进一步表达为:

$$\begin{cases} \sigma_N = l^2\sigma_x + m^2\sigma_y + 2lm\tau_{xy} \\ \tau_N = lm(\sigma_y - \sigma_x) + (l^2 - m^2)\tau_{xy} \end{cases} \quad (3)$$

剪应力也可按力的合并和分解法则求得:

$$\tau_N = \sqrt{s^2 - \sigma_N^2} = \sqrt{(x_N^2 + y_N^2) - (lx_N + my_N)^2} \quad (4)$$

注意到 $l^2 + m^2 = 1$, 对上式重组, 同样可得到:

$$\tau_N = ly_N - mx_N$$

2.2 空间问题中过某点倾斜面的应力^[1, 2, 4]

如果已知空间任一点 P 的6个独立的应力分量 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 、 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ 、 $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ 、 $\tau_{zx} = \tau_{xz}$, 见图2, 可以求得经过该点的任一斜面的应力. 为此, 在 P 点附近取1个平面 ABC , 平行于该斜面, 并与经过 P 点而平行于坐标轴的3个平面形成一个微小的四面体 $PABC$, 当平面 ABC 趋近于 P 点时, 平面 ABC 上的应力就成为过 P 点倾斜面上的应力.

设 l 、 m 和 n 分别为斜面外法线 N 与 x 轴、 y 轴和 z 轴的方向余弦. 根据四面体 $PABC$ 的平衡条件不难得到:

$$\begin{cases} x_N = l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{xz} \\ y_N = m\sigma_y + n\tau_{yz} + l\tau_{xy} \\ z_N = n\sigma_z + l\tau_{xz} + m\tau_{yz} \end{cases} \quad (5)$$

由投影原理可得作用在斜面 ABC 上的正应力为:

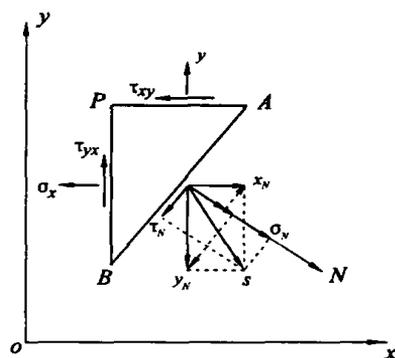


图1 平面问题中倾斜面上的应力

Fig. 1 Stresses acting on an inclined plane in plane problem

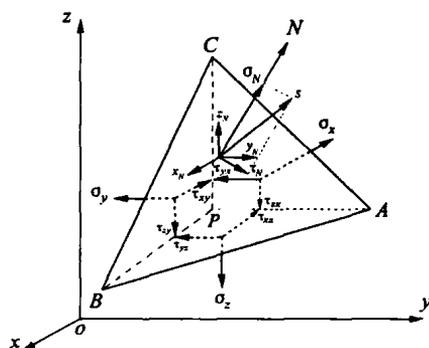


图2 空间问题中倾斜面上的应力

Fig. 2 Stresses acting on an inclined plane in spatial problem

$$Q_N = lx_N + my_N + nz_N$$

或

$$\sigma_N = l^2\sigma_x + m^2\sigma_y + n^2\sigma_z + 2mn\tau_{yz} + 2nl\tau_{zx} + 2lm\tau_{xy} \quad (6)$$

作用在三维空间斜面上的剪应力不易如平面问题那样按投影原理得到, 但力的合并和分解法则仍然适用, 即有:

$$\tau_N = \sqrt{s^2 - \sigma_N^2} = \sqrt{x_N^2 + y_N^2 + z_N^2 - \sigma_N^2} \quad (7)$$

3 八面体应力^[2, 4]

八面体是由三向主应力空间中 8 个象限的等斜面(外法线与 3 个主应力轴夹角均为 $54^\circ 44'$ 的平面)构成. 图 3 所示为过物体内某点 P 附近所作的 1 个八面体, 可将其视为由图 4 和图 5 所示的正、倒 2 个棱边和底边相等的“金字塔”叠合而成. 作用在其任一面上的正应力和剪应力称为八面体应力. 今取主应力空间第一象限的平面 ABC (图 4 阴影所示) 分析, 详见图 6.

由于 ABC 是一等斜面, 则其法线的方向余弦 $l = m = n = 1/\sqrt{3}$, 由式(5) 可得该面上合应力 s 的分量分别为: $x_N = \sigma_1/\sqrt{3}$; $y_N = \sigma_2/\sqrt{3}$; $z_N = \sigma_3/\sqrt{3}$. 故合应力为:

$$s = \sqrt{x_N^2 + y_N^2 + z_N^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} \quad (8)$$

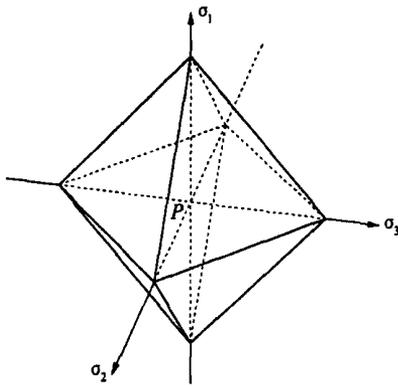


图 3 空间正八面体

Fig.3 Standard octahedron in space

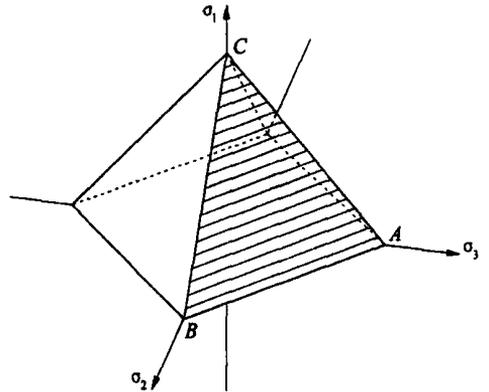


图 4 正八面体上半部分

Fig.4 The upper part of the standard octahedron

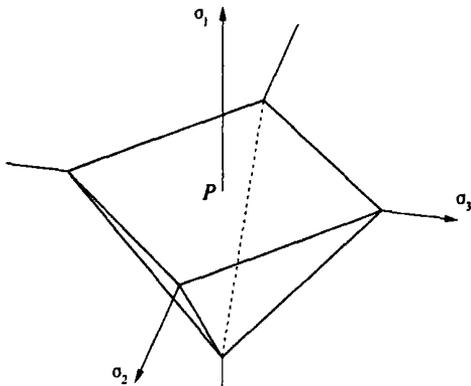


图 5 正八面体的下半部分

Fig.5 The lower part of the standard octahedron

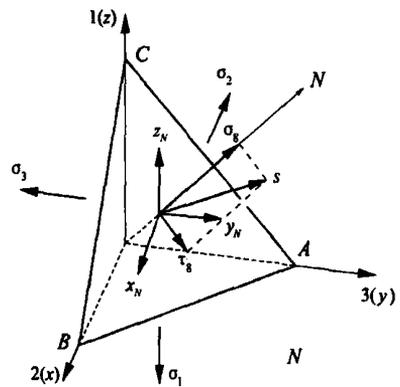


图 6 八面体上的应力

Fig.6 Stresses acting on the octahedron

由式(6)可得等斜面上的正应力或称八面体正应力为:

$$\sigma_8 = \sigma_N = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_m \quad (9)$$

由式(8)和式(9), 可得等斜面上的剪应力或称八面体剪应力为:

$$\tau_8 = \tau_N = \sqrt{s^2 - \sigma_N^2} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (10)$$

4 π 平面上的应力^[4, 5]

传统塑性力学^[2, 3, 5, 6]把主应力空间中过原点与空间对角线(等压线, 其与3个主应力轴的夹角均为 $54^\circ 44'$)相垂直的平面称为 π 平面, 而在广义塑性力学^[4]中, 把任何与空间对角线相垂直的平面(偏平面)均称为 π 平面. 如图7, 设已知主应力空间某点 P 的坐标为 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, 显然与 P 点的应力状态相对应, 矢量 OP 在空间对角线和 π 平面上的投影长度 OO' 和 $O'P$ 分别为作用在 π 平面上的正应力 σ_π 和 τ_π .

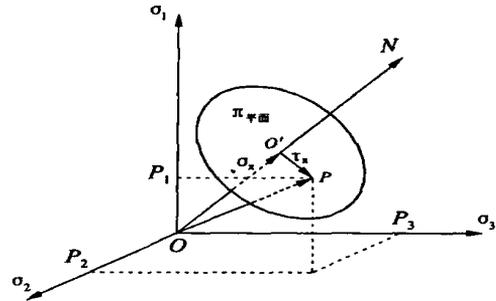


图7 平面上的应力

Fig. 7 Stresses acting on a plane

由投影原理和力的分解法则不难得到:

$$\sigma_\pi = OO' = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sqrt{3} \sigma_8 \quad (11)$$

$$\tau_\pi = O'P = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sqrt{3} \tau_8 \quad (12)$$

以上可见, 尽管八面体平面和 π 平面同为等斜面, 但八面体应力和 π 平面上的应力不相同. σ_8 代表主应力空间作用在 P 点的合应力矢量 s 在空间对角线上的投影, 而 σ_π 代表 P 点的应力状态矢量 OP 在空间对角线上的投影; τ_8 代表合应力矢量 s 在八面体平面(π 平面)上的分量, τ_π 代表应力状态矢量 OP 在 π 平面上的投影.

5 洛德角的意义^[2, 4, 5]

为完整地用 π 平面上的应力参量来表示一点的应力状态, 除用 σ_π 和 τ_π 分别表示主应力空间 π 平面上的正应力和剪应力外, 还需引入表示应力方向的洛德角 θ_σ . 为便于理解和观测, 应力洛德角 θ_σ 的定义及其几何意义可按下述方法加以说明, 图8所示, 设想将图7所示坐标系翻转过来, 使空间对角线 ON 铅直向下, 则过主应力空间 P 点的 π 平面与3个主平面相交构成一平面三角形, 且设3个主应力轴在 π 平面上的铅直投影分别为 σ'_1 、 σ'_2 和 σ'_3 . 由图8所示阴影三角形中的几何关系可见, 主应力空间中一点与 π 平面上的点存在如下对应关系: $\sigma'_1 = \sigma_1 \cos \beta = \sqrt{2/3} \sigma_1$; $\sigma'_2 = \sigma_2 \cos \beta = \sqrt{2/3} \sigma_2$; $\sigma'_3 = \sigma_3 \cos \beta = \sqrt{2/3} \sigma_3$.

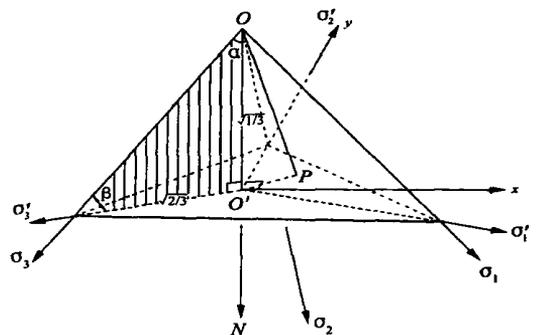


图8 应力洛德角的定义

Fig. 8 Definition on Lode's angle

在此 π 平面上以中主应力轴的投影为 y 轴, 取 x 轴过 O' 点且垂直于 y 轴. 则 $O'P$ 与 x 轴的夹角被

定义为应力洛德角, 以 θ_0 来表示, 且规定自 x 轴逆时针转为正, 顺时针转为负, 详见图 9.

目前, 关于 θ_0 表达式各文献^[2, 4, 5, 6] 均一致地给出了较为抽象的图解说明和推导. 笔者认为, 按照下述图解分析推导更为直观和明了.

设与图 7 中 P 点在 3 个主应力轴上投影点 P_1 、 P_2 、 P_3 相对应的平面上的投影点为 P'_1 、 P'_2 、 P'_3 , 将它们投影至 x 、 y 轴上, 则在 x 平面上 $x-y$ 坐标系中 P (或 P') 点的坐标为:

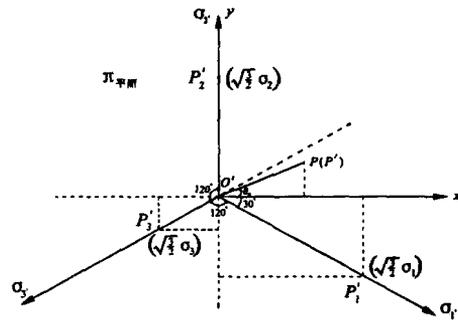


图 9 应力洛德角的表示

Fig.9 Denotation of Lode's angle

$$\begin{aligned}
 x &= O'P'_1 \cos 30^\circ - O'P'_3 \cos 30^\circ \\
 &= (\sigma_1 - \sigma_3) \sqrt{\frac{2}{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_1 - \sigma_3) \\
 y &= O'P'_2 - O'P'_1 \sin 30^\circ - O'P'_3 \sin 30^\circ \\
 &= \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_2 - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_1 \times \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_3 \times \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{6}} (2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3)
 \end{aligned}$$

故
$$\tan \theta_0 = \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \mu_0 \tag{13}$$

式中: μ_0 为应力洛德参数.

当然, 在 $x-y$ 坐标系中也不难由 P 点的坐标推导出 π 平面上的剪应力, 即:

$$\tau_\pi = O'P = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

类似地, 在主应变空间与应变 π 平面上可导出与应力洛德角形式完全相同的应变洛德角的表达式, 即:

$$\tan \theta_\epsilon = \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2\epsilon_2 - \epsilon_1 - \epsilon_3}{\epsilon_1 - \epsilon_3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \mu_\epsilon \tag{14}$$

式中: μ_ϵ 为应变洛德参数.

6 各剪应力和剪应变大小的比较

众所周知, 剪应力是决定岩土材料产生剪切屈服与破坏的主要因素. 在岩土塑性力学中表示一点的剪应力参量有八面体剪应力 τ_8 、广义剪应力 q 、纯剪应力 τ_s 、 π 平面上剪应力 τ_π 、统计平均剪应力 τ_m 等, 其大小均可用偏应力的第二不变量 J_2 来表示. 因此只要已知某点的应力状态, 则各剪应力也都是应力不变量, 其大小关系可直接通过比较它们与 J_2 的关系得到. 当然, 也可如众多文献所述通过比较各剪应力与最大主剪应力 τ_{\max} 的关系而得到.

一般在规定各主应力大小顺序 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ 的条件下, 最大主剪应力为:

$$\tau_{\max} = -\tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \tag{15}$$

当主应力用不变量和洛德角来表示时, 不难得到最大主剪应力与上述各剪应力的关系, 例如:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{\sqrt{3}} q \cos \theta_0 \text{ 或 } q = \frac{\sqrt{3}}{\cos \theta_0} \tau_{\max} \tag{16}$$

近来, 某些文献^[3, 4] 根据式 (16), 给出了各剪应力与最大主剪应力的如下关系: $q = 1.85 \tau_{\max}$; $\tau_\pi = 1.524 \tau_{\max}$; $\tau_s = 1.08 \tau_{\max}$; $\tau_8 = 0.87 \tau_{\max}$. 并由此得出各剪应力相对大小关系, 虽然以此比较不会影响

到各剪应力的大小排序. 但笔者认为, 上述表达式是不成立的, 因为如果这些表达式成立, 则会使人误解为主剪应力也可由偏应力的第二不变量 J_2 来表示, 但众所周知:

$$J_2 = \frac{1}{6} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (17)$$

可见, 最大主剪应力仅是构成 J_2 的一部分, 一般情况下是不能由 J_2 来表达的. 除非中、小主应力相等时, 另当别论.

由于材料屈服轨迹的对称性, 当 θ_0 于 $0^\circ \sim \pm 30^\circ$ 变化(或 μ_0 于 $0 \sim \pm 1$ 变化) 时, 由式(16)可知:

1. $732\tau_{\max} \leq q \leq 2\tau_{\max}$. 又因 $q = \sqrt{\frac{3}{2}}\tau_\pi$ 或 $\sqrt{3}\tau_s$ 或 $\frac{3}{\sqrt{2}}\tau_8$ 或 $\sqrt{\frac{15}{2}}\tau_m$ 代入上面的不等式, 可得:

$$1.414\tau_{\max} \leq \tau_\pi \leq 1.633\tau_{\max}$$

$$\tau_{\max} \leq \tau_s \leq 1.155\tau_{\max}$$

$$0.816\tau_{\max} \leq \tau_8 \leq 0.943\tau_{\max}$$

$$0.632\tau_{\max} \leq \tau_m \leq 0.730\tau_{\max}$$

由此可见, 各种剪应力的关系为:

$$q > \tau_\pi > \tau_s > \tau_{\max} > \tau_8 > \tau_m \quad (18)$$

类似地, 可得到八面体剪应变 γ_8 、广义剪应变 $\bar{\gamma}$ 、纯剪应变 γ_s 、 π 平面上剪应变 γ_π 及最大主剪应变 γ_{\max} 间的大小关系为:

$$\gamma_\pi > \gamma_s > \gamma_{\max} > \gamma_8 > \bar{\gamma} \quad (19)$$

7 结语

1) 采用文中建议的坐标系统, 既符合数学分析习惯, 又与一般岩土工程试样的加载及实际工程情况一致或近似, 且可使应力-应变分析坐标系统的布置和取向规范化.

2) 尽管八面体平面和 π 平面同为等斜面, 但八面体应力是基于对作用在过主应力空间某点的特殊倾斜面(等斜面)上的真实应力矢量的投影和分解得到的, 而 π 平面上的应力是对表示该点的主应力状态矢量在空间对角线和 π 平面上进行投影而得到, 二者具有不同的物理力学含义.

3) 采用文中图解说明和推导给出弹塑性力学中洛德角这一重要的力学参量的几何意义, 较传统方法更为简单明了.

4) 最大主剪应力也是一应力不变量, 但它不能用偏应力的第二不变量 J_2 来表示, 因而其与弹塑性力学中常用的八面体剪应力、广义剪应力、纯剪应力、 π 平面上剪应力、统计平均剪应力等不存在某些文献中给出的倍数关系, 且这些剪应力的相对大小可直接通过比较它们与 J_2 的关系而得到.

参考文献:

- [1] 徐芝纶. 弹性力学[M]. 第三版. 北京: 高等教育出版社, 1990.
- [2] 蒋永秋, 穆霞英. 塑性力学基础[M]. 北京: 机械工业出版社, 1981.
- [3] 刘祖典, 党发宁. 土的弹塑性理论基础[M]. 西安: 世界图书出版公司, 2002.
- [4] 郑颖人, 沈珠江, 龚晓南. 岩土塑性力学原理[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2002.
- [5] 张学言. 岩土塑性力学[M]. 北京: 人民交通出版社, 1993.
- [6] 龚晓南. 土塑性力学[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 1990.
- [7] Terzaghi K. Theoretical soil mechanics[M]. New York: J Wiley, 1943.
- [8] 黄文熙. 土的工程性质[M]. 北京: 水利出版社, 1983.