

哈密顿路径的饱和数

丁天平, 晋亚磊*, 张 茜

(上海师范大学 数理学院, 上海 200234)

摘 要: 给定一个图 F , 如果图 G 中不包含 F , 且在 G 中添加图 G 的补图 $\overline{G}$ 的任意一条边 e 后得到的图 $G+e$ 中包含 F , 则称图 G 为 F -饱和图. 设 $\text{sat}(n, F) = \min\{|E(G)| : |V(G)| = n, G \text{ 是 } F\text{-饱和图}\}$. 证明了当 $n \in K = \{34, 35, 36, 37, 44, 45, 52, 53\}$ 时都有 $\text{sat}(n, P_n) = \left\lceil \frac{3n-2}{2} \right\rceil$, 并给出边数最少的哈密顿路径饱和图的一种构造方法.

关键词: 饱和图; 饱和数; 极值图; 哈密顿路径

中图分类号: O 241 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5137(2022)03-0306-06

On the saturation number of Hamiltonian path

DING Tianping, JIN Yalei*, ZHANG Qian

(Mathematics and Science College, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, China)

Abstract: Let F be a graph and graph G is said to be F -saturated if G is F -free. However, for any edge $e \in E(\overline{G})$, $G+e$ contains F . Let $\text{sat}(n, F) = \min\{|E(G)| : |V(G)| = n \text{ and } G \text{ is } F\text{-saturated}\}$. We will show that there exists $\text{sat}(n, P_n) = \left\lceil \frac{3n-2}{2} \right\rceil$, where $n \in K = \{34, 35, 36, 37, 44, 45, 52, 53\}$, and we will construct a group of hamiltonian path saturated graphs with the smallest size of order n , for $n \geq 22$.

Key words: saturated graph; saturation number; extremum graph; Hamiltonian path

0 引 言

极值图论是图论中一个重要的研究分支, 特别是对于饱和图的研究. 给定一个图 F , 如果图 G 中不包含 F , 且在 G 中添加图 G 的补图 $\overline{G}$ 的任意一条边 e 后得到的图 $G+e$ 中包含 F , 则称图 G 为 F -饱和

收稿日期: 2022-04-20

基金项目: 国家自然科学基金面上项目 (11971319)

作者简介: 丁天平 (1997—), 男, 硕士研究生, 主要从事图论方面的研究. E-mail: 1019526199@qq.com

* 通信作者: 晋亚磊 (1986—), 男, 副教授, 主要从事组合与图论方面的研究. E-mail: yaleijin@shnu.edu.cn

引用格式: 丁天平, 晋亚磊, 张茜. 哈密顿路径的饱和数 [J]. 上海师范大学学报 (自然科学版), 2022, 51(3): 306–311.

Citation format: DING T P, JIN Y L, ZHANG Q. On the saturation number of Hamiltonian path[J]. Journal of Shanghai Normal University(Natural Sciences), 2022, 51(3): 306–311.

图. 对于正整数 n 及给定的一个图 F , 定义:

$$\text{Ex}(n, F) = \{G : |V(G)| = n, |E(G)| = \text{ex}(n, F), G \text{ 是 } F\text{-饱和图}\},$$

$$\text{Sat}(n, F) = \{G : |V(G)| = n, |E(G)| = \text{sat}(n, F), G \text{ 是 } F\text{-饱和图}\},$$

其中, $\text{ex}(n, F) = \max\{|E(G)| : |V(G)| = n, G \text{ 是 } F\text{-饱和图}\}$, $\text{sat}(n, F) = \min\{|E(G)| : |V(G)| = n, G \text{ 是 } F\text{-饱和图}\}$. $\text{ex}(n, F)$, $\text{sat}(n, F)$ 分别称为图 F 的图兰数和饱和数, $\text{Ex}(n, F)$, $\text{Sat}(n, F)$ 分别是极值对应的极值图集.

1941 年, TURÁN^[1] 首先利用饱和图的思想研究了完全图 K_p 的图兰数是图 $T_{n,r}$ 的边数 $|E(T_{n,r})|$, 并刻画了极值图集 $\text{Ex}(n, K_p) = \{T_{n,r}\}$, 其中 $T_{n,r}$ 是完全 r 部图且任意两部大小之差的绝对值不大于 1. 1964 年, ERDŐS 等^[2] 引入了饱和数的概念, 并证明了: 当 $2 \leq p \leq n$ 时, K_p 的饱和数是 $\binom{n}{2} - \binom{n-p+2}{2}$, 对应的极值图集 $\text{Sat}(n, K_p)$ 中只包含一个图 $K_{p-2} + \overline{K}_{n-p+2}$.

此后, 图兰数问题受到国内外许多学者的关注, 并取得了十分丰富且内涵深刻的成果^[3]. 另一方面, 关于饱和数问题的研究却相对缓慢, 主要集中在 F 是简单图的情况. 2008 年, PIKHURKO 等^[4] 研究了完全二部图 $K_{2,3}$ 的饱和数及对应的极值图. 完全多部图的饱和数问题的最新成果是 2021 年 CHAKRABORTI 等^[5] 研究完全二部图 $K_{s,t}$ ($s < t$) 得出的两个结论. 对于 F 是圈 C_l 的情况, 如果 $l = 3$, 则 $C_3 \cong K_3$, ERDŐS 等^[2] 已经讨论了 K_3 饱和图的问题. 当 $l = 4$ 时, 1972 年, OLLMANN 在文^[6] 中证明了当 $n \geq 5$ 时, $\text{sat}(n, C_4) = \left\lfloor \frac{3n-5}{2} \right\rfloor$. 当 $l = 5$ 时, CHEN^[7-8] 证明了当 $n \geq 21$ 时, $\text{sat}(n, C_5) = \left\lfloor \frac{10n-1}{7} \right\rfloor$. 当 $l \geq 6$ 时, $\text{sat}(n, C_l)$ 的精确值尚不明确. 设 $C_{\geq r}$ 是一族长度大于等于 r 的圈, 2021 年, MA 等^[9] 给出了一些关于 $C_{\geq r}$ -饱和图的结果. 当 $l = n$ 时, 即研究 n 阶图的 C_n -饱和图 (也叫极大非哈密顿图) 所需的最少边数, CLARK 等^[10] 指出: 当 n 为大于等于 36 的偶数或大于等于 53 的奇数时, $\text{sat}(n, C_n) = \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor$. 他们通过推广 Isaacs 图^[11] 得到了这些极大非哈密顿图. LIN 等^[12] 用计算机分析剩下的 n 较小时的情况, 证明了:

定理 1^[12] 当 n 为大于等于 20 的偶数或大于等于 17 的奇数时, $\text{sat}(n, C_n) = \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor$.

树的饱和图也是研究的焦点之一, 因为有些树的结构相对简单, 有可能精确得出其饱和图边数的最小值. 1986 年, KÁSZONYI 等^[13] 中解决了星图 S_k 的饱和数问题, 并完全刻画了对应的极值图. 同时, 他们还确定了 $k \geq 2$ 且 n 充分大时 P_k 的饱和数问题. 当 $n \in \{22, 23, 30, 31, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 46, 47, 48, 49, 50, 51\}$ 和 $n \geq 54$ 时, DUDEK 等^[14] 给出了 $\text{sat}(n, P_n)$ 的具体值. FRICK 等^[15] 得到 $\text{sat}(n, P_n)$ 的下界及 $n \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13\}$ 时 $\text{sat}(n, P_n)$ 的值. BURGER 等^[16] 证明了 $\text{sat}(n, P_n)$ 的值, 并给出对应的极值图, 其中 $n \in \{10, 11, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 32, 33\}$. 当 $n \in K = \{34, 35, 36, 37, 44, 45, 52, 53\}$ 时, $\text{sat}(n, P_n)$ 的值仍然未知.

本文作者将给出一族阶数 $n \geq 22$ 的边数最少的哈密顿路径饱和图, 并由此证明 $n \in \{34, 35, 36, 37, 44, 45, 52, 53\}$ 时有 $\text{sat}(n, P_n) = \left\lfloor \frac{3n-2}{2} \right\rfloor$.

1 阶数 $n \geq 22$ 时的 P_n 饱和数

主要证明当 $n \in K = \{34, 35, 36, 37, 44, 45, 52, 53\}$ 时都有 $\text{sat}(n, P_n) = \left\lfloor \frac{3n-2}{2} \right\rfloor$, 并给出边数最少的哈密顿路径饱和图的一种构造方法. 该方法可以推广到 $n \geq 22$ 时的情形, 本节将按 $n \geq 22$ 的情况进行讨论.

1.1 Isaacs 图及其扩展

ISAACS^[11] 首先构造出了阶为 $4k$ ($k \geq 5, k$ 为奇数) 的立方哈密顿圈饱和图, 称这一类图为 Isaacs 图, 记作 J_k . Isaacs 图的具体构造为: $V(J_k) = \{v_i : 0 \leq i \leq 4k-1\}$, $E(J_k) = E_0 \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3$. 其中,

$$E_0 = \bigcup_{j=0}^{k-1} \{v_{4j}v_{4j+1}, v_{4j}v_{4j+2}, v_{4j}v_{4j+3}\}, E_1 = \{v_{4j+1}v_{4j+7}, 0 \leq j \leq k-1\},$$

$$E_2 = \{v_{4j+2}v_{4j+6}, 0 \leq j \leq k-1\}, E_3 = \{v_{4j+3}v_{4j+5}, 0 \leq j \leq k-1\}.$$

例如, J_5 如图 1 所示:

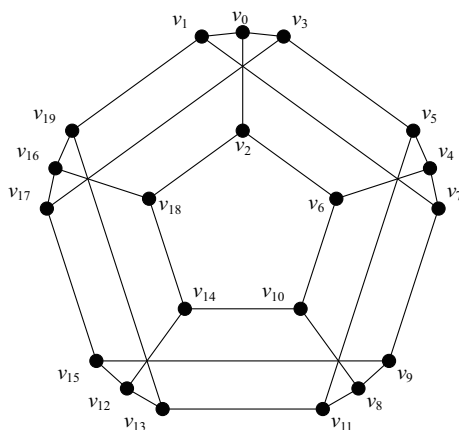


图 1 Isaacs 图 J_5

CLARK 等为了得到阶数 $n \geq 20$ 的哈密顿圈饱和图进行了如下的构造 ([12] 中也有类似的构造): 向 Isaacs 图中添加 1 个点, 将 Isaacs 图的一条边扩展为一个三角形. 如图 2 所示, 设 $xy \in E(G)$ 且 $z \notin V(G)$. 令 $G(e) = (V(G(e)); E(G(e)))$, 其中 $V(G(e)) = V(G) \cup \{z\}$, $E(G(e)) = E(G) \cup \{xz, yz\}$.

向 Isaacs 图中添加 2 个点, 将 Isaacs 图的一个点扩展为一个三角形. 如图 3 所示, 设 $v \in V(G)$, v 的相邻顶点为 v_1, v_2, v_3 且 $w_1, w_2, w_3 \notin V(G)$. 令 $G(v) = (V(G(v)); E(G(v)))$, 其中 $V(G(v)) = V(G - v) \cup \{w_1, w_2, w_3\}$, $E(G(v)) = E(G - v) \cup \{v_1w_1, v_2w_2, v_3w_3, w_1w_2, w_1w_3, w_2w_3\}$.

引理 2^[10] 设 $e = v_0v_2$, 若 $G \in \{J_{k_1}, J_{k_2}(v_{14}), J_{k_2}(v_{14}, v_{26}), J_{k_3}(v_{14}, v_{26}, v_{38})\}$, 其中 $k_1 \geq 5, k_2 \geq 9, k_3 \geq 13$, 且 k_1, k_2, k_3 均为奇数. 于是对 G 中任意两个不相邻的点 u 和 v , G 中存在以 u 和 v 为端点的经过边 e 的哈密顿路径.

由引理 2 可得:

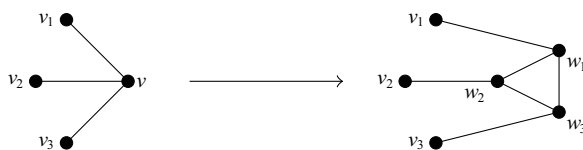


图2 向 Isaacs 图中添加 1 个点



图3 向 Isaacs 图中添加 2 个点

引理 3^[14] 当阶数 $n \in \{20, 28, 36, 38, 40, 44, 46, 48\}$ 或 n 为大于等于 52 的偶数时, 存在一个 n 阶非哈密顿图 G_n 满足:

- (1) G_n 是一个立方图;
- (2) G_n 中存在一条边 $e = xy$ 满足 $N(x) \cap N(y) = \emptyset$ 且对任意不相邻的点 u 和 v , 图 $G_n \cup \{uv\}$ 都有一个过边 e 的哈密顿圈.

引理 4^[14] 设 G 为满足引理 3 条件的图, 则 $G' = (V'; E')$ 是一个哈密顿路径饱和图, 其中 $V' = V(G) \cup \{z_1, z_2\}$, $E' = E(G) \cup \{xz_1, yz_2\}$.

引理 5^[14] 设 G 为满足引理 3 条件的图, 则 $G' = (V'; E')$ 是一个哈密顿路径饱和图, 其中 $V' = V(G) \cup \{z_1, z_2, z_3\}$, $E' = E(G) \cup \{xz_1, yz_2, yz_3, z_2z_3\}$.

引理 6^[12] $n \geq 20$ 时, 表 1 中的 G_n 都是哈密顿圈饱和图.

表 1 阶数 $n \geq 20$ 的 G_n

m	$G_{4k+m}(k=5)$	$G_{4k+m}(k \geq 7)$
0	J_5	J_k
1	$J_5(v_{11}v_{13})$	$J_k(v_{16}v_{18})$
2	$J_5(v_2)$	$J_k(v_0)$
3	$J_5(v_2, v_{11}v_{13})$	$J_k(v_0, v_{16}v_{18})$
4	$J_5(v_2, v_7)$	$J_k(v_0, v_4)$
5	$J_5(v_2, v_7, v_{11}v_{13})$	$J_k(v_0, v_4, v_{16}v_{18})$
6	$J_5(v_2, v_7, v_{17})$	$J_k(v_0, v_4, v_8)$
7	$J_5(v_2, v_7, v_{17}, v_{11}v_{13})$	$J_k(v_0, v_4, v_8, v_{16}v_{18})$

注意到当 k 为奇数且 $m \in \{0, 2, 4, 6\}$ 时, G_{4k+m+1} 是将 G_{4k+m} 中的一条边 xy 扩展为一个三角形后所得的图. 为了得到 $\text{sat}(n, P_n)$ 的值, 先给出其下界:

引理 7^[15] 当 $n \geq 10$ 时, $\text{sat}(n, P_n) \geq \left\lceil \frac{3n-2}{2} \right\rceil$.

1.2 边数最少的哈密顿路径饱和图的构造

为了说明 $n \geq 22$ 时都有 $\text{sat}(n, P_n) = \left\lceil \frac{3n-2}{2} \right\rceil$, 先给出几个引理.

引理 8 设 G_{4k+m} 是表 1 中的图, 其中 $k \geq 5$ 且 k 为奇数, $m \in \{0, 2, 4, 6\}$. 于是 G_{4k+m} 是一个立方图, 且 G_{4k+m} 中存在一条边 $e = xy$ 满足 $N(x) \cap N(y) = \emptyset$, 且对任意不相邻的点 u, v , 图 $G_{4k+m} \cup \{uv\}$ 都有一个过边 e 的哈密顿圈.

证明 由表 1 中 G_{4k+m} 的构造知 G_{4k+m} 为立方图. $k = 5$ 时, 设 $xy = v_{11}v_{13}$; $k \geq 7$ 时, 设 $xy = v_{16}v_{18}$, 于是有 $N(x) \cap N(y) = \emptyset$. 由于 G_{4k+m+1} 是将 G_{4k+m} 中的一条边 xy 扩展为一个三角形后所得的图, 设 z 为将边 xy 扩展为三角形时新增的点. 由引理 6 可知, 表 1 中的 G_{4k+m+1} 是哈密顿圈饱和图, 并且对 G_{4k+m+1} 中任意不相邻的点 v_i 和 $v_j (v_i, v_j \neq z)$, 图 $G_{4k+m+1} \cup \{v_i v_j\}$ 中都有哈密顿圈 $C_{4k+m+1} = (\cdots, x, z, y, \cdots)$. 在 G_{4k+m} 中添加相同的边 $v_i v_j$ 后, 在 $G_{4k+m} \cup \{v_i v_j\}$ 中必然会有哈密顿圈 $C_{4k+m} = (\cdots, x, y, \cdots)$. 因此对于表 1 中 $k \geq 5$ 且为奇数, $m \in \{0, 2, 4, 6\}$ 的图 G_{4k+m} 都满足: 存在边 e 使得对任意不相邻的点 v_i 和 v_j , $G_{4k+m} \cup \{v_i v_j\}$ 都有一个过边 e 的哈密顿圈.

由引理 4 和引理 5, 用表 1 中的 G_{4k+m} 构造阶数大于等于 22 的哈密顿圈饱和图, 即给出 $\text{sat}(n, P_n)$ 的一个上界.

引理 9 $n \geq 22$ 时, $\text{sat}(n, P_n) \leq \left\lceil \frac{3n-2}{2} \right\rceil$.

证明 只需构造出阶数 $n \geq 22$ 并且边数为 $\left\lceil \frac{3n-2}{2} \right\rceil$ 的哈密顿路径饱和图即可. 证明将分两种情况讨论:

情况 1 n 为偶数.

由 n 为偶数知 $n-2 \geq 20$ 也是偶数. 由于每个偶数都可以写成 $4k+m$ 的形式, 其中 k 为奇数且 $m \in \{0, 2, 4, 6\}$, 因此存在奇数 k_1 和 $m_1 \in \{0, 2, 4, 6\}$ 满足 $n-2 = 4k_1 + m_1$. 设 H 是表 1 中阶数为 $4k_1 + m_1$ 的图, 由引理 6 和引理 8, H 和 $e = xy$ 满足引理 3 的条件. 设 $G = (V(G); E(G))$, 其中 $V(G) = V(H) \cup \{z_1, z_2\}$, $E(G) = E(H) \cup \{xz_1, yz_2\}$. 则由引理 4, G 是哈密顿路径饱和图. 因此,

$$\text{sat}(n, P_n) \leq |E(G)| = \frac{3(n-2)}{2} + 2 = \left\lceil \frac{3n-2}{2} \right\rceil.$$

情况 2 n 为奇数.

由 n 为奇数知 $n-3 \geq 20$ 为偶数. 于是存在奇数 k_2 和 $m_2 \in \{0, 2, 4, 6\}$ 满足 $n-3 = 4k_2 + m_2$. 设 H' 是表 1 中阶数为 $4k_2 + m_2$ 的图, 由引理 6 和引理 8, H' 和 $e = xy$ 满足引理 3 的条件. 设 $G' = (V(G'); E(G'))$, 其中 $V(G') = V(H') \cup \{z_1, z_2, z_3\}$, $E(G') = E(H') \cup \{xz_1, yz_2, yz_3, z_2 z_3\}$. 则由引理 5, G' 是哈密顿路径饱和图. 因此,

$$\text{sat}(n, P_n) \leq |E(G')| = \frac{3(n-3)}{2} + 4 = \left\lceil \frac{3n-2}{2} \right\rceil.$$

由以上两种情况引理得证.

定理 10 $n \geq 22$ 时, $\text{sat}(n, P_n) = \left\lceil \frac{3n-2}{2} \right\rceil$.

证明 由定理 7 和引理 9 可得: $n \geq 22$ 时, $\text{sat}(n, P_n) = \left\lceil \frac{3n-2}{2} \right\rceil$.

参考文献:

- [1] TURÁN P. Eine extremalaufgabe aus der graphentheorie [J]. Teoreticheskaya I Matematicheskaya Fizika, 1941, 48: 436–452.
- [2] ERDŐS P, HAJNAL A, MOON J W. A problem in graph theory [J]. American Mathematical Monthly, 1964, 71: 1107–1110.
- [3] FÜREDI Z, SIMONOVITS M. The history of degenerate (bipartite) extremal graph problems [J]. Erdős Centennial, 2013, 25: 169–264.
- [4] PIKHURKO O, SCHMITT J R. A note on minimum $K_{2,3}$ -saturated graphs [J]. The Australasian Journal of Combinatorics, 2008, 40: 211–215.
- [5] CHAKRABORTI D, CHEN D, HASABNIS M. Minimizing the number of edges in $K_{s,t}$ -saturated bipartite graphs [J]. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 2021, 35: 1165–1181.
- [6] OLLMANN L T. $K_{2,2}$ saturated graphs with a minimal number of edges [C]. In Proceedings of the Third Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing. Boca Raton: Florida Atlantic University, 1972, 367–392.
- [7] CHEN Y. Minimum C_5 -saturated graphs [J]. Journal of Graph Theory, 2009, 61(2): 111–126.
- [8] CHEN Y. All minimum C_5 -saturated graphs [J]. Journal of Graph Theory, 2011, 67(1): 9–26.
- [9] MA Y, HOU X, HEI D, et al. Minimizing the number of edges in $C_{\geq r}$ -saturated graphs [J]. Discrete Mathematics, 2021, 344(11): 112565.
- [10] CLARK L H, ENTRINGER R C, SHAPIRO H D. Smallest maximally nonhamiltonian graphs II [J]. Graphs Combin, 1992, 8(3): 225–231.
- [11] ISAACS R. Infinite families of nontrivial trivalent graphs which are not Tait colorable [J]. American Mathematical Monthly, 1975, 82: 221–239.
- [12] LIN X, JIANG W, ZHANG C, et al. On smallest maximally nonhamiltonian graphs [J]. Ars Combinatoria, 1997, 45: 263–270.
- [13] KÁSZONYI L, TUZA Z. Saturated graphs with minimal number of edges [J]. Journal of Graph Theory, 1986, 10(2): 203–210.
- [14] DUDEK A, KATONA G, WOJDA A. Hamiltonian path saturated graphs with small size [J]. Discrete Applied Mathematics, 2006, 154(9): 1372–1379.
- [15] FRICK M, SINGLETON J. Lower bound for the size of maximal nontraceable graphs [J]. Electronic Journal of Combinatorics, 2005, 12(1): R32.
- [16] BURGER A P, SINGLETON J E. Further results on Maximal Nontraceable graphs of smallest size [J]. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 2013, 15(1): 75–92.

(责任编辑: 冯珍珍, 包震宇)