DOI:10.3969/J.ISSN.1000-5137.2022.03.001

一类耗散动力系统的有限维约化

崔振琼，杨成明，王荣年 *

(上海师范大学 数理学院，上海 200234)

摘　要：考虑一类定义在无限维 Banach 空间上的半线性耦合发展方程组．利用方程组生成无限维动力系统的一个有限维不变流形，研究有限维约化问题．更详细地，利用有限维不变流形得到一个有限维系统 (称之为约化系统), 并澄清了原系统和约化系统之间吸引子和平衡解的关系．

关键词：半线性耦合发展方程组；无限维动力系统；有限维不变流形；约化

中图分类号：O 192　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000-5137(2022)03-0257-06

Finite-dimensional reduction of a class of dissipative dynamical systems

CUI Zhenqiong, YANG Chengming, WANG Rongnian*

(Mathematics and Science College, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, China)

Abstract: The paper considers a class of coupled system of semilinear evolution equations defined on infinite-dimensional Banach spaces. A finite-dimensional invariant manifold of infinite-dimensional dynamical system generated by the coupled system can be used to derive a reduction principle. More precisely, making use of the invariant manifold, we can obtain a finite-dimensional system (also called a reduced system), and clarify the connection of attractor and equilibrium between the original system and the reduced system.

Key words: coupled system of semilinear evolution equations; infinite-dimensional dynamical system; finite-dimensional invariant manifold; reduction

收稿日期: 2022-04-20

基金项目：国家自然科学基金 (11971317, 11471083)

作者简介：崔振琼 (1997—), 女, 硕士研究生, 主要从事动力系统和微分方程方面的研究．E-mail: zqcuimath@126.com

* **通信作者**：王荣年 (1976—), 男，教授，主要从事非线性发展方程适定性、多值扰动及解集的拓扑正则性、不变流形理论等方面的研究． E-mail: rnwang@126.com

引用格式：崔振琼，杨成明，王荣年．一类耗散动力系统的有限维约化 [J]. 上海师范大学学报 (自然科学版), 2022, 51(3): 257–262.

Citation format: CUI Z Q, YANG C M, WANG R N. Finite-dimensional reduction of a class of dissipative dynamical systems[J]. Journal of Shanghai Normal University(Natural Sciences), 2022, 51(3): 257–262.

0 引 言

关于抽象发展方程 (或系统) 的适定性理论已经得到了很好的发展，其研究成果参见文献 [1–4]. 设 H 和 X 是无限维的实 Hilbert 空间. 考虑一个半线性耦合发展方程组

$$\begin{cases} u' = -Au + F(u,\theta) & \text{在}H\text{中}, \\ \theta' = -\nu B\theta + G(u,\theta) & \text{在}X\text{中}, \end{cases} \tag{1}$$

其中， $\nu > 0$ 是一个常数， $(A, \mathcal{D}(A))$ 和 $(B, \mathcal{D}(B))$ 分别是 H 和 X 上可能无界的线性算子， F 和 G 通常是非线性的. 算子 A 和 B 具有本质的区别，不仅体现在其谱上，而且体现在与之相关半群的正则性上. 关于上述符号的一些额外条件将在后面章节中详细描述. 系统 (1) 在实际应用中涵盖了很多重要的模型，如 Caginalp 型相场系统 [5−6] 、热弹性系统 [7] 、 Boissonade 系统 [8].

在文献 [6] 中， WANG 和 ZHAO 对系统 (1) 既在强挤压性质情形也在谱间隙条件的情形下证明了有限维流形的存在性定理，并且研究了流形的渐进稳定性. 本文作者利用这些结果研究系统 (1) 的有限维约化问题. 研究无限维动力系统的长时间动力学行为的现代方法之一是基于不变流形的概念. 证明了许多重要偏微分方程的解以指数形式逼近一个光滑不变流形上的流；更多细节请参见 CHUESHOV, CONSTANTIN, FOIAS, HALE, HENRY, TEMAM 等的研究工作. 关于各类方程及系统不变流形，特别是有限维不变流形存在性的最新进展请参见文献 [6, 9–12]. 利用不变流形，至少从理论上来说，能将无限维动力系统渐近状态的研究简化为一类简单微分方程系统的类似问题渐近状态的研究，而后者很容易通过一些已知的方法来解决. 因此，有关基于不变流形约化原理的一些思想，已成为研究所考虑问题的各种动力学行为的有力工具. 关于此理论的更多内容，读者可参见文献 [13–14]. 近几十年来，约化原理的理论和应用得到了广泛的发展. 值得一提的是， CHUESHOV[7] 证明了一个抽象双曲 – 抛物系统指数吸引不变流形的存在性，并提出了一个约化原理，使得该系统的动力学行为可以用具有修正非线性项的单一双曲方程来描述. 对于前述抽象的双曲 – 抛物型系统，在前述文献中，当非线性项具有较强的限制条件时，应用文献 [2] 中所提出的方法，也得到了类似的结果. 更进一步， CARABALLO 等 [15] 将文献 [7] 的研究结果推广到了一类具有白噪声扰动的抽象双曲和抛物耦合系统.

本研究利用文献 [6] 确定的有限维流形的存在性定理，得到一个有限维系统 (称之为约化系统), 并给出了约化原理，澄清了原系统和约化系统之间吸引子和平衡解的关系.

1 预备知识

用 $(\cdot,\cdot)_H$ 和 $(\cdot,\cdot)_X$ 分别表示 Hilbert 空间 H 和 X 的内积. 对应范数分别用 $\|\cdot\|_H$ 和 $\|\cdot\|_X$ 表示. 内积空间 $Z := H \times X$ 赋予范数：$\|z\|_0^2 := \|u\|_H^2 + \|\theta\|_X^2, z = (u,\theta) \in Z$. 设 $A : \mathcal{D}(A) \subset H \to H$, $B : \mathcal{D}(B) \subset X \to X$ 是稠定闭线性算子并且 $-A$(或 $-B$) 是 H 上 C_0– 半群 $\mathrm{e}^{-At}, t \geqslant 0$(或 X 上 C_0– 半群 $\mathrm{e}^{-Bt}, t \geqslant 0$) 的无穷小生成元. 在没有混淆的情况下，将上述半群简记为 e^{-At} 和 e^{-Bt}. 设非线性项 $F : Z \to H, G : Z \to X$ 是整体 Lipschitz 的. 它们的 Lipschitz 系数分别为 L_F, L_G.

方程 (1) 初值问题的整体适定性参见文献 [6] 的定理 2.1. 因此，存在一个无限维动力系统 (Z, φ^t), 定义为 $\varphi^t z_0 = z(t; z_0), t \geqslant 0, z_0 \in Z$, 其中 $z(\cdot; z_0)$ 是方程 (1) 初值问题的温性解. 将相空间 Z 划分为两个部分：

$$Z = \underbrace{\{0\} \times X^u}_{\text{不稳定子空间}} \oplus \underbrace{H \times X^s}_{\text{稳定子空间}}, \tag{2}$$

其中，X^u 是 X 的有限维子空间，X^s 是 X^u 的正交余空间. 注意到 $X = X^u \oplus X^s, \dim(X^u) < \infty$, $X^s = (X^u)^\perp$. 用 $\mathcal{P}$ 表示从 X 到 X^u 的正交投影，令 $\mathcal{Q} = Id_X - \mathcal{P}$. 假设子空间 X^u 和 X^s 在半群 e^{-Bt} 作用下是不变的. 算子 A 和 B 满足如下条件：

- 存在 $\lambda_0^- > 0$, 使得：

$$(Au, u)_H \geqslant \lambda_0^- \|u\|_H^2, \quad u \in \mathcal{D}(A); \tag{3}$$

- (二分性) 存在 $\lambda^- > \lambda^+ > 0$, 使得：

$$(Bp, p)_X \leqslant \lambda^+ \|p\|_X^2, \quad p \in X^u, \quad (Bq, q)_X \geqslant \lambda^- \|q\|_X^2, \quad q \in \mathcal{D}(B) \cap X^s. \tag{4}$$

2 约化原理

主要利用有限维不变流形 (考虑强挤压条件情形和谱间隙条件情形), 分别得到对应的有限维系统 (称之为约化系统), 并澄清了原系统和约化系统之间吸引子和平衡解的关系.

2.1 强挤压条件的情形

对 $\sigma > 0$, 定义锥 Θ_σ 为 $\Theta_\sigma = \left\{(u, \theta) \in Z; \max\{\sigma\|u\|_H^2, \|\mathcal{Q}\theta\|_X^2\} \leqslant \|\mathcal{P}\theta\|_X^2\right\}$. 显然 Θ_σ 是 Z 的一个闭子集. 用 $\mathrm{int}\Theta_\sigma$ 表示 Θ_σ 的内部. 对 $d_0 > 0$, 令 $\mathscr{F}$ 是 Z 的一个非空子集且

$$\mathscr{F} \subset \mathscr{H} := \{(u, \theta) \in Z; \|(u, \mathcal{Q}\theta)\|_0 \leqslant d_0\}.$$

下面是强挤压性质的概念.

定义 1 设 (Z, φ^t) 是一个动力系统，如果存在 Z 的一个非空子集 $\mathscr{F}$, 使得：

1) (锥不变性) 对满足 $\varphi^t z_i \in \mathscr{F}, t > 0$ 的 $z_i \in \mathscr{F}, i = 1, 2, z_1 - z_2 \in \mathrm{int}\Theta_\sigma$意味着$\varphi^t z_1 - \varphi^t z_2 \in \Theta_\sigma$, $t > 0$;

2) (挤压性) 存在常数 $N \geqslant 1, \delta > 0$, 使得对满足 $\varphi^t z_i \in \mathscr{F}, t > 0$ 的 $z_i \in \mathscr{F}, i = 1, 2, \varphi^r z_1 - \varphi^r z_2 \notin \Theta_\sigma$, $r > 0$意味着$\|\varphi^t z_1 - \varphi^t z_2\|_0 \leqslant N\|z_1 - z_2\|_0 \mathrm{e}^{-\delta t}$, $t \in [0, r]$.

则称动力系统 (Z, φ^t) 满足强挤压性质.

上述定义参见文献 [6], 且用到如下条件：

(H_1) 对所有的 $t \geqslant 0$ 和 $p \in X^u$, $\varphi^t(0, p) \in \mathscr{F}$;

(H_2) 在锥 Θ_σ 上，动力系统 (Z, φ^t) 具有 $\mathscr{F}$ 上的强挤压性质.

基于上述两个条件，文献 [6] 给出动力系统 (Z, φ^t) 的一个不变流形定理. 该流形具有 Lipschitz 光滑性且是有限维数的，并且具有局部跟追踪性质.

定理 1 假设条件 $(\mathrm{H}_1), (\mathrm{H}_2)$ 成立，则存在映射 $\mathcal{T}^1 : X^u \to H, \mathcal{T}^2 : X^u \to X^s$, 使得：

1) 对任意的 $p_1, p_2 \in X^u$, $\|\mathcal{T}(p_1) - \mathcal{T}(p_2)\|_0 \leqslant \left(1 + \sigma^{-1}\right)^{1/2} \|p_1 - p_2\|_X$, $\|\mathcal{T}(p_1)\|_0 \leqslant d_0$, 其中，$\mathcal{T} = (\mathcal{T}^1, \mathcal{T}^2)$;

2) $\mathfrak{M} := \mathrm{Gra}\,\mathcal{T} \subset \overline{\mathscr{F}}$ 在半流 φ^t 作用下是严格不变的，即对所有的 $t \geqslant 0$, $\varphi^t\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$, 其中，$\mathrm{Gra}\,\mathcal{T} = \left\{(\mathcal{T}^1(p), p + \mathcal{T}^2(p)); p \in X^u\right\}$ 是映射 $\mathcal{T}$ 的图；

3) 对在区间 $[t_0, \infty)$ 上满足 $\varphi^t z_0 \in \mathscr{F}$ 的 $z_0 \in Z$, 存在 $z_0^* \in \mathfrak{M}$, 使得：

$$\|\varphi^t z_0 - \varphi^{t-t_0} z_0^*\|_0 \leqslant N_0 \mathrm{e}^{-\delta(t-t_0)}, \ t \geqslant t_0,$$

其中，$N_0 > 0$ 是依赖于 z_0, z_0^* 的常数.

根据定理 1 可知，对每一个 $p_0 \in X^u$, $\mathcal{P}\theta(\cdot;\Phi(p_0))$ 是方程组 (1) 的惯性形式

$$p' = -\nu Bp + \mathcal{P}G(\Phi(p)), \quad p \in X^u \tag{5}$$

的一个解，其中，

$$\Phi(p) = (\mathcal{T}^1(p), p + \mathcal{T}^2(p)). \tag{6}$$

反之，若 $p \in C([0,\infty); X^u)$ 是惯性形式 (5) 的一个解，则 $\Phi(p(\cdot))$ 是方程组 (1) 的一个解．令 $\mathscr{F}_0 = \{z \in \mathscr{F}; 对所有的 t > 0, \varphi^t z \in \mathscr{F} \setminus \mathfrak{M}\}$. 注意到流形 $\mathfrak{M}$ 有性质：对 $z_0 \in \mathscr{F}_0$, 存在 $z_0^* \in \mathfrak{M}$, 使得对任意的 $t \geqslant 0$,

$$\|\varphi^t z_0 - \varphi^t z_0^*\|_0 \leqslant N\|z_0 - z_0^*\|_0 \mathrm{e}^{-\delta t}, \quad \|z_0^*\|_0 \leqslant \left[2 + (1+\sigma)^{1/2}\right](d_0 + \|z_0\|_0).$$

下面的引理给出由式 (6) 所定义映射 Φ 的一些有用性质.

引理 1 Φ 是整体 Lipschitz 的，其 Lipschitz 系数为 $1 + \left(1+\sigma^{-1}\right)^{1/2}$, Φ 是一个同胚映射且对任意的 $z \in \mathfrak{M}$, $\|\Phi^{-1}(z)\|_X \leqslant \|z\|_0$.

这是基于定理 1 的一个直接结果．证明略．引理 1 意味着映射 $X^u \ni p \mapsto \mathcal{P}G(\Phi(p))$ 是整体 Lipschitz 的，所以惯性形式 (5) 可生成一个动力系统，记为 $(X^u, \varphi_{\mathrm{r}}^t)$, 即所谓的 “约化系统”. 下面的引理揭示了动力系统 (Z, φ^t) 与其约化系统 $(X^u, \varphi_{\mathrm{r}}^t)$ 之间的关系.

引理 2 对每一个 $t \geqslant 0$, $\varphi_{\mathrm{r}}^t = \Phi^{-1} \circ \varphi^t \circ \Phi$.

证明 令 $p_0 \in X^u$. 由定理 1 中的 2) 可知，对所有的 $t \geqslant 0$, $\varphi^t(\Phi(p_0)) \in \mathfrak{M}$. 记 $p(t) = (\Phi^{-1} \circ \varphi^t \circ \Phi)(p_0), t \geqslant 0$. 注意到 $p(t) = \mathcal{P}\theta(t; \mathcal{T}^1(p_0), p_0 + \mathcal{T}^2(p_0)), \varphi^t(\Phi(p_0)) = \Phi(p(t))$. 因此，得到结论 $p(t) = \mathrm{e}^{-\nu Bt}p_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{-\nu B(t-s)}\mathcal{P}G(\Phi(p(s)))\mathrm{d}s$. 这意味着 $p \in C([0,\infty);\ X^u)$ 是方程组 (5) 在初始值 p_0 下的一个解．更进一步，使用唯一性讨论，可以得到对每一个 $t \geqslant 0, p(t) = \varphi_{\mathrm{r}}^t p_0$. 得证.

然后给出如下结果.

定理 2 如果约化系统 $(X^u, \varphi_{\mathrm{r}}^t)$ 具有整体吸引子 $\mathfrak{A}_{\mathrm{r}}$, 则存在 Z 的非空紧子集 $\mathfrak{A}_{\mathrm{loc}}$ 满足 :

1) $\mathfrak{A}_{\mathrm{loc}}$ 在半流 φ^t 作用下是严格不变的 ;

2) 对 Z 的每一个包含于 $\mathscr{F}_0$ 的有界子集 $\mathscr{B}$, 当 $t \to \infty$ 时， $\mathrm{dist}(\varphi^t(\mathscr{B}), \mathfrak{A}_{\mathrm{loc}}) \to 0$.

注 1 事实上， $\mathfrak{A}_{\mathrm{loc}} = \Phi(\mathfrak{A}_{\mathrm{r}})$.

证明 因为引理 1 意味着 Φ 是连续的，所以 $\mathfrak{A}_{\mathrm{loc}} := \Phi(\mathfrak{A}_{\mathrm{r}})$ 在 Z 中是紧的．更进一步，利用引理 2 和 $\mathfrak{A}_{\mathrm{r}}$ 在半流 φ_{r}^t 作用下的严格不变性可知 $\varphi^t(\mathfrak{A}_{\mathrm{loc}}) = \Phi \circ \varphi_{\mathrm{r}}^t(\mathfrak{A}_{\mathrm{r}}) = \Phi(\mathfrak{A}_{\mathrm{r}}) = \mathfrak{A}_{\mathrm{loc}}, t \geqslant 0$, 即结论 (1) 成立．要证结论 (2), 令 $\mathscr{B} \subset \mathscr{F}_0$ 是 Z 的有界子集．记 $K = N\left(3 + (1+\sigma)^{1/2}\right)\left(d_0 + \sup\limits_{z\in\mathscr{B}}\|z\|_0\right)$. 对 $z_0 \in \mathscr{B}$, 由 [6 , 推论 3.1] 可知存在 $z_0^* \in \mathfrak{M}$, 使得 $\|\varphi^t z_0 - \varphi^t z_0^*\|_0 \leqslant K\mathrm{e}^{-\delta t}$. 这结合引理 1 和引理 2 暗含了对每一个 $p \in \mathfrak{A}_{\mathrm{r}}$ 和 $t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\|\varphi^t z_0 - \Phi(p)\|_0 &\leqslant \|\varphi^t z_0 - \varphi^t z_0^*\|_0 + \|\varphi^t z_0^* - \Phi(p)\|_0 \\ &\leqslant K\mathrm{e}^{-\delta t} + \left(1 + \left(1+\sigma^{-1}\right)^{1/2}\right)\|\varphi_{\mathrm{r}}^t(\Phi^{-1}(z_0^*)) - p\|_X.\end{aligned}$$

对 $p \in \mathfrak{A}_{\mathrm{r}}$, 取下确界可诱导出 $\mathrm{dist}(\varphi^t z_0, \mathfrak{A}_{\mathrm{loc}}) \leqslant K\mathrm{e}^{-\delta t} + \left(1 + \left(1+\sigma^{-1}\right)^{1/2}\right)\mathrm{dist}(\varphi_{\mathrm{r}}^t(\hat{\mathscr{B}}), \mathfrak{A}_{\mathrm{r}})$, 其中， $\hat{\mathscr{B}} = \left\{p \in X^u; \|p\|_X \leqslant (2 + (1+\sigma)^{1/2})\left(d_0 + \sup\limits_{z\in\mathscr{B}}\|z\|_0\right)\right\}$ 是 X^u 的有界子集．这里使用了引理 1 和 [6 , 推论 3.1(2)]. 得证.

2.2 谱间隙条件的情形

假设算子 A, B 满足条件 (3) 和 (4). 记 $\lambda_{\mathrm{Gap}} = \dfrac{\lambda^- - \lambda^+}{2}, \lambda_c = \dfrac{\lambda^- + \lambda^+}{2}$. 另外，为了方便，记

$$\begin{aligned}&\Lambda_{\mathrm{Gap}} = L_F(\lambda_0^- - \nu\lambda_c)^{-1} + L_G(\nu\lambda_{\mathrm{Gap}})^{-1},\\&L_0 = (1-\Lambda_{\mathrm{Gap}})^{-1}\left(L_F(4\nu\lambda_{\mathrm{Gap}}(\lambda_0^- - \nu\lambda_c))^{-1/2} + L_G(2\nu\lambda_{\mathrm{Gap}})^{-1}\right).\end{aligned}$$

定理 3[6] 假设 $\lambda_0^- > \nu\lambda_c$ 和 $\Lambda_{\mathrm{Gap}} < 1$, 则存在映射 $\mathcal{T}^1 : X^u \to H, \mathcal{T}^2 : X^u \to X^s$, 使得：

1) $\mathcal{T}$ 是整体 Lipschitz 的， Lipschitz 系数为 L_0, 其中 $\mathcal{T} = (\mathcal{T}^1, \mathcal{T}^2)$;

2) $\mathfrak{M} := \mathrm{Gra}\,\mathcal{T}$ 在半流 φ_{p}^t 作用下是严格不变的;

3) $\mathfrak{M}$ 是渐近完备的. 具体来说，对 $z_0 \in Z$ 存在 $z_0^* \in \mathfrak{M}$, 使得：

$$\|\varphi_{\mathrm{p}}^t z_0 - \varphi_{\mathrm{p}}^t z_0^*\|_0 \leqslant N(1+\|z_0\|_0)\mathrm{e}^{-(\nu\lambda_c+\epsilon)t}, \quad t \geqslant 0, \tag{7}$$

其中， $N, \epsilon > 0$ 是依赖于 t, z_0, z_0^* 的常数.

根据定理 3, 可以建立关于整体吸引子的约化原则和平衡解的渐近稳定性. 注意到引理 1 和引理 2 在当前环境下仍是正确的，除了映射 Φ 的 Lipschitz 系数被替换为 $1 + L_0$.

首先给出动力系统 $(Z, \varphi_{\mathrm{p}}^t)$ 与其约化系统 $(X^u, \varphi_{\mathrm{r}}^t)$ 之间整体吸引子的一个双向刻画.

定理 4 约化系统 $(X^u, \varphi_{\mathrm{r}}^t)$ 具有整体吸引子当且仅当动力系统 $(Z, \varphi_{\mathrm{p}}^t)$ 具有整体吸引子.

证明 根据定理 3 中的 3), "必要性" 可以通过一个类似于定理 2 的讨论来证明.

要证充分性，设 $\mathfrak{A}$ 是动力系统 (Z, φ^t) 的一个整体吸引子. 由 [6 , 注 5.3 和命题 2.2] 可知：

$$\mathfrak{A} \subset \mathfrak{M}. \tag{8}$$

接下来证明 $\mathfrak{A}_{\mathrm{r}} := \{\mathcal{P}\theta; (u,\theta) \in \mathfrak{A}\}$ 是约化系统 $(X^u, \varphi_{\mathrm{r}}^t)$ 的整体吸引子. 显然 $\mathfrak{A}_{\mathrm{r}}$ 是非空的. 此外，由 $\mathfrak{A}$ 在 Z 中的紧性立即可以得到 $\mathfrak{A}_{\mathrm{r}}$ 在 X^u 中的紧性. 更进一步，由式 (8) 可知 $\mathfrak{A} = \Phi(\mathfrak{A}_{\mathrm{r}})$. 可以发现 $\varphi_{\mathrm{r}}^t(\mathfrak{A}_{\mathrm{r}}) = \varphi_{\mathrm{r}}^t \circ \Phi^{-1}(\mathfrak{A}) = \Phi^{-1}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}_{\mathrm{r}}, t \geqslant 0$. 也就是说， $\mathfrak{A}_{\mathrm{r}}$ 在半流 φ_{r}^t 作用下是不变的. 余下只需证明对 X^u 的每一个有界子集 $\mathscr{B}$, 当 $t \to \infty$ 时， $\mathrm{dist}(\varphi_{\mathrm{r}}^t(\mathscr{B}), \mathfrak{A}_{\mathrm{r}}) \to 0$. 注意到对任意的 $z \in \mathfrak{A}, p \in \mathscr{B}$ 和 $t \geqslant 0$, $\|\varphi_{\mathrm{r}}^t p - \Phi^{-1}(z)\|_X = \|\Phi^{-1} \circ \varphi_{\mathrm{p}}^t \circ \Phi(p) - \Phi^{-1}(z)\|_X \leqslant \|\varphi_{\mathrm{p}}^t \circ \Phi(p) - z\|_0$. 从而可以得到 $\mathrm{dist}(\varphi_{\mathrm{r}}^t(\mathscr{B}), \mathfrak{A}_{\mathrm{r}}) \leqslant \mathrm{dist}(\varphi_{\mathrm{p}}^t \circ \Phi(\mathscr{B}), \mathfrak{A})$. 这结合 $\Phi(\mathscr{B})$ 是 Z 中的有界子集这一事实得到当 $t \to \infty$ 时， $\mathrm{dist}(\varphi_{\mathrm{p}}^t \circ \Phi(\mathscr{B}), \mathfrak{A}) \to 0$. 得证.

下面给出动力系统 $(Z, \varphi_{\mathrm{p}}^t)$ 与其约化系统 $(X^u, \varphi_{\mathrm{r}}^t)$ 之间零平衡解渐近稳定性的一个单向刻画.

定理 5 假设 $F(0) = 0, G(0) = 0$. 如果约化系统 $(X^u, \varphi_{\mathrm{r}}^t)$ 的零平衡解是渐近稳定的，则动力系统 $(Z, \varphi_{\mathrm{p}}^t)$ 的零平衡解也是渐近稳定的.

证明 注意到如下估计式成立：

$$\|\Phi(p)\|_0 \leqslant (1+L_0)\|p\|_X,\ p \in X^u, \quad \|\varphi_{\mathrm{r}}^t p\|_X \leqslant \|\varphi_{\mathrm{p}}^t \circ \Phi(p)\|_0,\ p \in X^u, t \geqslant 0. \tag{9}$$

由 [6 , 定理 5.4], 可知对 $z \in Z$, 存在 $z^* \in \mathfrak{M}$, 使得：

$$\|z^*\|_0 \leqslant (1+N)\|z\|_0, \quad \|\varphi_{\mathrm{p}}^t z\|_0 \leqslant \|\varphi_{\mathrm{p}}^t z^*\|_0 + N\|z\|_0 \mathrm{e}^{-(\nu\lambda_c+\epsilon)t}, \quad t \geqslant 0. \tag{10}$$

接下来，用依赖于 z 的 z^* 表示通过上述方法得到的元素．对每一个 $\epsilon > 0$, 存在 $\eta > 0$, 使得：

$$\|\varphi_{\mathrm{r}}^t p\|_X < 2^{-1}(1+L_0)^{-1}\epsilon, \quad t \geqslant 0. \tag{11}$$

当 $p \in X^u$ 时，满足 $\|p\|_X < \eta$. 考虑满足 $\|z\|_0 < 2^{-1}(1+N)^{-1}\min\{\epsilon,\eta\}$ 的 $z \in Z$. 使用式 (10) 中的第二个估计式，可以得到 $\|z^*\|_0 < \eta$, 因此有 $\|\Phi^{-1}(z^*)\|_X < \eta$. 这结合式 (9) 的第一个估计式和式 (11) 意味着对所有的 $t \geqslant 0$, $\|\varphi_{\mathrm{p}}^t z^*\|_0 = \|\Phi \circ \varphi_{\mathrm{r}}^t \circ \Phi^{-1}(z^*)\|_0 \leqslant (1+L_0)\|\varphi_{\mathrm{r}}^t \circ \Phi^{-1}(z^*)\|_0 < \dfrac{\epsilon}{2}$. 从而由式 (10) 的第一个估计式可知，对所有的 $t \geqslant 0$, $\|\varphi^t z\|_0 < \epsilon$. 也就是说，系统 (Z, φ^t) 的零平衡解是稳定的.

接下来，取 $\hat{\eta} > 0$, 使得对满足 $\|p\|_X < \hat{\eta}$ 的所有 $p \in X^u$, 有 $\varphi_{\mathrm{r}}^t p \to 0$, 当 $t \to \infty$. 考虑满足 $\|z\|_0 < \hat{\eta}(1+N)^{-1}$ 的 $z \in Z$. 利用式 (10) 的第二个估计式可以得到： $\|z^*\|_0 < \hat{\eta}$, 因此 $\|\Phi^{-1}(z^*)\|_X < \hat{\eta}$. 从而，当 $t \to \infty$, $\varphi_{\mathrm{p}}^t z^* = \Phi \circ \varphi_{\mathrm{r}}^t \circ \Phi^{-1}(z^*) \to 0$. 这里用到了 $\Phi(0) = 0$ 这一事实．因此，由式 (10) 中的第一个估计式，得到当 $t \to \infty$ 时， $\varphi^t z \to 0$. 综上所有结果证得定理的结论.

参考文献：

[1] CHUESHOV I D. Introduction to the Theory of Infinite-dimensional Dissipative Systems [M]. Kharkiv: Acta, 2002.

[2] HENRY D. Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1981.

[3] PAZY A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations [M]. New York: Springer-Verlag, 1983.

[4] ROBINSON J C. Infinite-Dimensional Dynamical Systems: An Introduction to Dissipative Parabolic PDEs and the Theory of Global Attractors [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

[5] CAGINALP G. An analysis of a phase field model of a free boundary [J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1986, 92(3): 205–245.

[6] WANG R N, ZHAO J C. Invariant manifolds of the phase-field systems in high dimensions (full version) [J]. preprint.

[7] CHUESHOV I D. A reduction principle for coupled nonlinear parabolic-hyperbolic partial differential equations [J]. Journal of Evolution Equations, 2004, 4: 591–612.

[8] TU J Y. Global attractors and robustness of the Boissonade system [J]. Journal of Dynamics and Differential Equations, 2015, 27: 187–211.

[9] HAMED-ABU M, GUO Y, TITI E S. Inertial manifolds for certain subgrid-scale α-models of turbulence [J]. SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, 2015, 14(3): 1308–1325.

[10] KOSTIANKO A. Inertial manifolds for the 3D modified-Leray-α model with periodic boundary conditions [J]. Journal of Dynamics and Differential Equations, 2018, 30(1): 1–24.

[11] WANG R N, ZHAO J C. Theory of invariant manifolds for infinite-dimensional nonautonomous dynamical systems and applications [J]. preprint.

[12] ZELIK S. Inertial manifolds and finite-dimensional reduction for dissipative PDEs [J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A, 2014, 144(6): 1245–1327.

[13] LYKOVA O B, MITROPOL'SKII Y A. Integral Manifolds in Nonlinear Mechanics [M]. Moscow: Nauka, 1973.

[14] PLISS V A. The reduction principle in the theory of the stability of motion [J]. Izvestiia Akademii Nauk SSSR, Seriya Matematicheskaya, 1964, 27: 1297–1324.

[15] CARABALLO T, CHUESHOV I, LANGA J A. Existence of invariant manifolds for coupled parabolic and hyperbolic stochastic partial differential equations [J]. Nonlinearity, 2005, 18: 747–767.

(责任编辑：冯珍珍，顾浩然)