DOI:10.3969/J.ISSN.1000-5137.2022.03.007

一维有界区域上双稳态方程多重正解的存在性

金 怡，凌慧铧，陆俊帆 *

(上海师范大学 数理学院，上海 200234)

摘 要：研究了一维有界区域上双稳态反应扩散方程的正平衡解．构造了一些双稳态非线性项，使用相平面分析和常微分方程理论，证明了相应的方程多个正平衡解的存在性．

关键词：反应扩散方程；双稳态方程；平衡解；多重正解

中图分类号：O 175.25 **文献标志码**：A **文章编号**：1000-5137(2022)03-0294-07

Existence of multiple positive solutions for bistable equations in one-dimensional bounded domains

JIN Yi, LING Huihua, LU Junfan*

(Mathematics and Science College, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, China)

Abstract: In this paper, we study the positive stationary solutions of the bistable reaction-diffusion equation in one-dimensional bounded domains. We construct some bistable nonlinear terms, and use phase plane analysis and the theory of ordinary differential equation to prove the existence of multiple positive stationary solutions of the corresponding equation.

Key words: reaction-diffusion equation; bistable equation; stationary solution; multiple positive solutions

0 引 言

考虑如下问题：

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(u), & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

收稿日期: 2022-04-25

基金项目：国家自然科学基金 (12071299)

作者简介：金 怡 (1998—), 女，硕士研究生，主要从事反应扩散方程方面的研究． E-mail: 1498228692@qq.com

* **通信作者**：陆俊帆 (1992—), 博士，讲师，主要从事偏微分方程的研究． E-mail: jlu@shnu.edu.cn

引用格式：金怡，凌慧铧，陆俊帆：一维有界区域上双稳态方程多重正解的存在性 [J]. 上海师范大学学报 (自然科学版), 2022, 51(3): 294–300.

Citation format: JIN Y, LING H H, LU J F. Existence of multiple positive solutions for bistable equations in one-dimensional bounded domains[J]. Journal of Shanghai Normal University(Natural Sciences), 2022, 51(3): 294–300.

其中， f 是双稳态非线性项． f 是 $[0,+\infty)$ 上的 Lipschitz 函数，且存在 $a_0\in(0,1)$, 使得：

$$\begin{cases} f(0)=f(a_0)=f(1)=0,\ f'(0)<0,\ f'(1)<0, \\ f(u)>0\ (a_0<u<1),\ f(u)<0\ (0<u<a_0), \\ \text{存在 } \theta\in(a_0,1) \text{ 使得 } \displaystyle\int_0^\theta f(s)\mathrm{d}s=0. \end{cases} \tag{$\mathbb{H}$}$$

问题 (1) 的有界解通常会收敛于一个平衡解，比较典型的证明有 Lyapunov 泛函方法、上下解方法及零点性质 (仅对一维问题适用) 方法等 [1−2]. 因此，对问题 (1) 的平衡解，即如下问题的解：

$$\begin{cases} \Delta v+f(v)=0, & x\in\Omega, \\ v(x)=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

细致的分析是研究问题 (1) 解的定性性质的必要基础.

由前人的工作可知，当区域充分大，问题 (2) 至少可以有两个正解 [3−5]. 本文作者将对一维方程研究 (2) 是否有指定个数的正解问题，即对

$$\begin{cases} v''+f(v)=0, & -l<x<l, \\ v(-l)=v(l), \end{cases} \tag{3}$$

进行讨论，构造合适的非线性项 f, 并用相平面分析和常微分方程理论证明相应问题 (3) 多重正解的存在性. 即证明以下结论.

定理 1 对任意给定的正整数 n, 存在恰当的非线性项 f, 以及 $L_*=L_*(f)>0$, 使得对任何 $l>L_*$, 问题 (3) 至少有 $2n$ 个正解.

本文第一节介绍问题 (3) 正解的基本性质；第二节通过相平面分析和常微分方程理论证明定理 1.

1 正解的基本性质

先讨论问题 (3) 正解的一些基本性质. 对此，有如下结论.

命题 设 $v(x)$ 为问题 (3) 的正解，则它满足以下性质：

1) $v(x)=v(-x)$ $(x\in[-l,l])$;

2) $v'(x)<0$ $(x\in(0,l])$;

3) $0<v(x)<1$ $(x\in(-l,l))$.

证明 结论 1) 可根据 $f(v)$ 不含 x 的事实得出；结论 3) 由极值原理可得. 对于结论 2), 可通过相平面分析 [5] 得出，并用首次积分证明.

记 $a:=v(0)>0$, 考虑初值问题：

$$\begin{cases} v''+f(v)=0, \\ v(0)=a,\ v'(0)=0, \end{cases}$$

方程两边同时乘以 $2v'$, 进行首次积分可得：

$$(v')^2+2F(v)=C,$$

其中， $F(v) := \int_0^v f(s)\mathrm{d}s$. 特别地，当 $x=0$ 时，可得 $C=2F(v(0))=2F(a)$. 故：

$$v' = \pm\sqrt{2F(a)-2F(v)}, \tag{4}$$

由条件可知：

$$F(v)<0\ (0<v<\theta),\ F(v)>0\ (\theta<v<1).$$

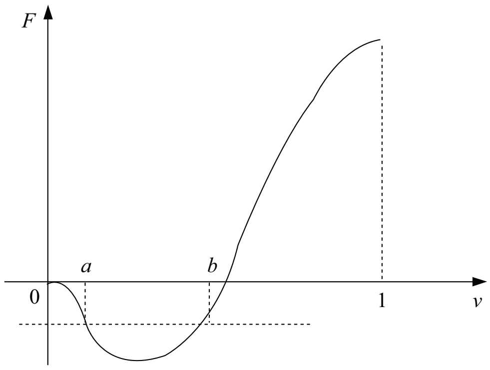

图 1　$F(v)$ 的图像

如图 1, 若 $0<a<\theta$, 则存在唯一 $b\in(0,\theta)$, 使得 $F(a)=F(b)$. 不妨设 $a\leqslant b$, 为使式 (4) 有意义，需

$$a<v(x)<b\ (0<x<l),$$

这与 $v(l)=0$ 矛盾．若 $a=\theta$, 同理可知：

$$0<v(x)<\theta,\ v'(x)<0\ (0<x<l),$$

当 $v(x)\to 0$ 时，有：

$$v' = -\sqrt{2F(\theta)-2F(v)} = -\sqrt{-2F(v)} \sim -\sqrt{-f'(0)}v,$$

这与 $v(l)=0$ 也矛盾．因此只有 $a>\theta$ 是可能的．此时 $v(x)$ 必取值于 $[0,a]$. 因此 $v'(x)\leqslant 0$. 若存在 $x_1\in(0,l)$, 使得

$$v'(x_1)=0=-\sqrt{2F(a)-2F(v(x_1))},$$

则 $v(x_1)=a$, 这表明 $v(x)\equiv a\ (0\leqslant x\leqslant x_1)$, 从而有：

$$0=v''(x_1)=-f(v(x_1))=-f(a),\ 0\leqslant x\leqslant x_1.$$

与 f 的假设矛盾．也即证明了结论 2).

由性质 2) 可知在 $[0,l]$ 上有

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\sqrt{2F(a)-2F(v)},$$

进行变量分离，并在 $[0,x]$ 上积分得：

$$\int_{v(x)}^{a} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2F(a)-2F(r)}} = x, \tag{5}$$

特别地，当 $x=l$ 时，

$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2F(a)-2F(r)}}=l,$$

定义：

$$l=L(a):=\int_0^a \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2\int_r^a f(s)\mathrm{d}s}}. \tag{6}$$

此时，先给定 l, 如果存在 a 使得 (6) 成立，将此 a 代入 (5), 那么 (5) 就是问题 (3) 的隐式解. 然而对给定的 l, 通过 (6) 很难求得 a 的值，且可能存在多个 a 对应同一个 l. 将问题转化，先给定一个 a, 求出 $l=L(a)$, 构造合适的 f, 使得有多个 a 可以对应相同的 L, 那么当问题 (3) 中的 l 取为这样的 L 时，该问题就有多个解.

2 多重正解的存在性

2.1 两个正解的结果

先考虑一般的双稳态问题，在条件 $(\mathbb{H})$ 下证明问题 (3) 至少存在两个正解，即为定理 2.

定理 2 对于满足条件 $(\mathbb{H})$ 的非线性项 $f(v)$, 存在 $L_*>0$, 使得对任何 $l>L_*$, 问题 (3) 至少有 2 个正解.

证明 利用相平面分析可知，当 (6) 中 $a\to\theta^+$ 或 $a\to 1^-$ 时， $L(a)\to\infty$.

令 $a=\theta+\varepsilon$, 其中， ε 为待定的充分小正实数，

$$L(\theta+\varepsilon)=\int_0^{\theta+\varepsilon}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2\int_r^{\theta+\varepsilon}f(s)\mathrm{d}s}}>\int_0^{\delta}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2\int_r^{\theta+\varepsilon}f(s)\mathrm{d}s}},$$

其中， $\delta=\delta(\varepsilon)$. 由于

$$\int_r^{\theta+\varepsilon}f(s)\mathrm{d}s=\int_0^{\theta}f(s)\mathrm{d}s+\int_\theta^{\theta+\varepsilon}f(s)\mathrm{d}s-\int_0^r f(s)\mathrm{d}s.$$

上式右端第一项为 0, 对后两项做估计，不妨设 $A_1<f(s)<A_2,\, s\in[\theta,\theta+\varepsilon]$, 可得：

$$A_1\varepsilon<\int_\theta^{\theta+\varepsilon}f(s)\mathrm{d}s<A_2\varepsilon.$$

注意到 $f(s)$ 在 $s=0$ 附近有 $2f'(0)s<f(s)<\dfrac{f'(0)}{2}s$,

$$f'(0)r^2=\int_0^r 2f'(0)s\mathrm{d}s\leqslant\int_0^r f(s)\mathrm{d}s\leqslant\int_0^r\frac{f'(0)}{2}s\mathrm{d}s=\frac{f'(0)}{4}r^2<0,$$

所以

$$A_1\varepsilon+0\leqslant\int_\theta^{\theta+\varepsilon}f(s)\mathrm{d}s-\int_0^r f(s)\mathrm{d}s<A_2\varepsilon-f'(0)r^2,$$

$$\frac{1}{\sqrt{A_2\varepsilon-f'(0)r^2}}<\frac{1}{\sqrt{\int_r^{\theta+\varepsilon}f(s)\mathrm{d}s}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{A_1\varepsilon}},$$

取 $\delta=\varepsilon^{1/4}$, 于是

$$\int_0^{\delta}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2\int_r^{\theta+\varepsilon}f(s)\mathrm{d}s}}>\int_0^{\delta}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2A_2\varepsilon-2f'(0)r^2}}=\frac{1}{\sqrt{-2f'(0)}}\ln\frac{\delta+\sqrt{\delta^2-\frac{A_2\varepsilon}{f'(0)}}}{\sqrt{-\frac{A_2\varepsilon}{f'(0)}}}$$

$$>\frac{1}{\sqrt{-2f'(0)}}\ln\frac{\delta}{\sqrt{-\frac{A_2\varepsilon}{f'(0)}}}=\frac{1}{\sqrt{-2f'(0)}}\ln\frac{1}{\varepsilon^{1/4}\sqrt{-\frac{A_2}{f'(0)}}},$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时，上式右端趋于无穷，即 $L(a)\to\infty$ $(a\to\theta^+)$.

同样地，对待定的充分小正实数 ε,

$$L(1-\varepsilon)=\int_0^{1-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2\int_r^{1-\varepsilon}f(s)\mathrm{d}s}}>\int_{1-\delta}^{1-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2\int_r^{1-\varepsilon}f(s)\mathrm{d}s}},$$

其中， $\delta=\sqrt{\varepsilon}>\varepsilon$. 因为 $f(s)$ 在点 $s=1$ 附近有 $\frac{f'(1)}{2}(s-1)<f(s)<2f'(1)(s-1)$, 所以

$$\int_r^{1-\varepsilon}\frac{f'(1)}{2}(s-1)\mathrm{d}s<\int_r^{1-\varepsilon}f(s)\mathrm{d}s<\int_r^{1-\varepsilon}2f'(1)(s-1)\mathrm{d}s,$$

$$\int_{1-\delta}^{1-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2\int_r^{1-\varepsilon}f(s)\mathrm{d}s}}>\int_{1-\delta}^{1-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{-2f'(1)[(1-r)^2-\varepsilon^2]}}>\frac{\ln\frac{\delta}{\varepsilon}}{\sqrt{-2f'(1)}}=\frac{\ln\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}{\sqrt{-2f'(1)}},$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时，上式最右端趋于无穷，即 $L(a)\to\infty$ $(a\to 1^-)$.

综上， $L(a)$ 在 $v(0)=a$ 非常靠近 θ 和 1 时都趋于正无穷 (见图 2). 由于 $L(a)$ 在 $(\theta,1)$ 内一定能取到最小值 L_*, 当 $l>L_*$ 时， $L(a)=l$ 至少有 2 个根 $\hat{a}_1,\hat{a}_2$ 满足 $\theta<\hat{a}_1<\hat{a}_2<1$, 它们对应问题 (3) 的 2 个正解 $\hat{v}_1,\hat{v}_2$, 其中， $\hat{v}_i$ 满足 $\hat{v}_i(0)=\hat{a}_i$ $(i=1,2)$. 定理 2 证毕.

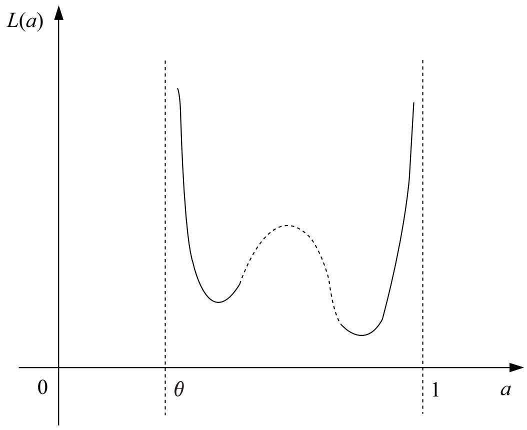

图 2 对应 2 个解的 $L(a)$ 的图像

2.2 主要结论 (定理 1) 的证明

本小节将构造一些特殊的非线性项 f, 使得问题 (3) 可以有任意多个正解.

令 f 如图 3 所示，当 $a\in[a_1,a_2]$ 时， $f(a)=\varepsilon$ (ε 为待定的小参数). 记 $S_1=\int_{\theta}^{a_1}f(s)\mathrm{d}s$, $S_2=\int_{a_2}^{a_3}f(s)\mathrm{d}s$, 可得:

$$L(a_2)=\int_0^{a_2}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2\int_r^{a_2}f(s)\mathrm{d}s}}>\int_{a_1}^{a_2}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2\int_r^{a_2}f(s)\mathrm{d}s}}=\frac{\sqrt{2(a_2-a_1)}}{\sqrt{\varepsilon}}\to\infty(\varepsilon\to 0),$$

$$
\begin{aligned}
L(a_1) &= \int_0^{a_1} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2\int_r^{a_1} f(s)\mathrm{d}s}} = \int_0^{\theta} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2\int_r^{a_1} f(s)\mathrm{d}s}} + \int_{\theta}^{a_1} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2\int_r^{a_1} f(s)\mathrm{d}s}} \\
&< \frac{\theta}{\sqrt{2S_1}} + \int_{\theta}^{a_1} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2\int_r^{a_1} f(s)\mathrm{d}s}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L(a_3) &= \int_0^{a_3} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2\int_r^{a_3} f(s)\mathrm{d}s}} = \int_0^{a_2} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2\int_r^{a_3} f(s)\mathrm{d}s}} + \int_{a_2}^{a_3} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2\int_r^{a_3} f(s)\mathrm{d}s}} \\
&< \frac{a_2}{\sqrt{2S_2}} + \int_{a_2}^{a_3} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2\int_r^{a_3} f(s)\mathrm{d}s}},
\end{aligned}
$$

从图 3 易知，对充分小的 ε_0, 当 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ 时都有 $L(a_1) < M_1(\varepsilon_0)$, $L(a_3) < M_2(\varepsilon_0)$. a 与 $L(a)$ 的图像大致如图 4 所示.

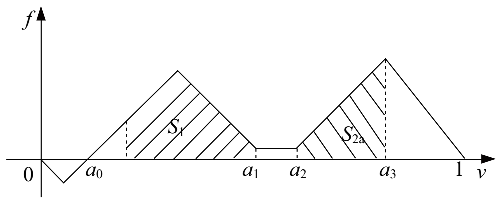

图 3　对应 4 个解的 f 的图像

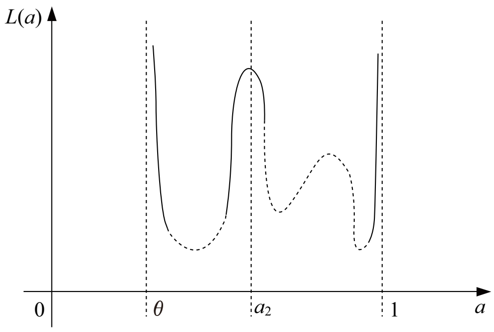

图 4　对应 4 个解的 $L(a)$ 的图像

取 $L_* = \max\{M_1(\varepsilon_0),\ M_2(\varepsilon_0)\}$, 对任何 $l > L_*$, 由前面分析可知，当 $\varepsilon > 0$ 充分小时，有 $L(a_2) > L_*$. 故 $L(a) = l$ 至少有 4 个根 $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$, $\hat{a}_3$, $\hat{a}_4$ 满足 $\theta < \hat{a}_1 < \hat{a}_2 < \hat{a}_3 < \hat{a}_4 < 1$, 它们对应问题 (3) 的 4 个正解 $\hat{v}_1$, $\hat{v}_2$, $\hat{v}_3$, $\hat{v}_4$, 其中 $\hat{v}_i$ 满足 $\hat{v}_i(0) = \hat{a}_i\ (i = 1, 2, 3, 4)$.

类似地，设 f 形如图 5 所示，其中，当 $a \in [a_1, a_2] \cup [a_4, a_5]$ 时，$f(a) = \varepsilon$ (ε 为待定的小参数). 从图 5 易知，对充分小的 ε_0, 只要 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, 就有 $L(a_1) < M_1(\varepsilon_0)$, $L(a_4) < M_2(\varepsilon_0)$, $L(a_6) < M_3(\varepsilon_0)$ (a 与 $L(a)$ 的图像大致如图 6 所示).

取 $L_* = \max\{M_1(\varepsilon_0),\ M_2(\varepsilon_0),\ M_3(\varepsilon_0)\}$, 对任何 $l > L_*$, 由前面的分析可知，当 $\varepsilon > 0$ 充分小时，有 $L(a_2) > L_*$, $L(a_5) > L_*$. 故 $L(a) = l$ 至少有 6 个根 $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$, $\hat{a}_3$, $\hat{a}_4$, $\hat{a}_5$, $\hat{a}_6$ 满足 $\theta < \hat{a}_1 < \hat{a}_2 < \hat{a}_3 < \hat{a}_4 < \hat{a}_5 < \hat{a}_6 < 1$, 它们对应问题 (3) 的 6 个正解 $\hat{v}_1$, $\hat{v}_2$, $\hat{v}_3$, $\hat{v}_4$, $\hat{v}_5$, $\hat{v}_6$, 其中 $\hat{v}_i$ 满足 $\hat{v}_i(0) = \hat{a}_i\ (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$.

以此类推，可以构造合适的双稳态 f 使得问题 (3) 至少存在 $2n$ 个解. 定理 1 证毕.

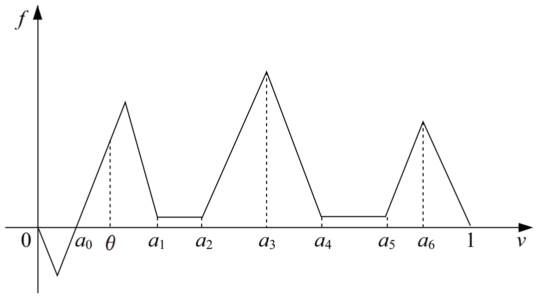

图 5　对应 6 个解的 f 的图像

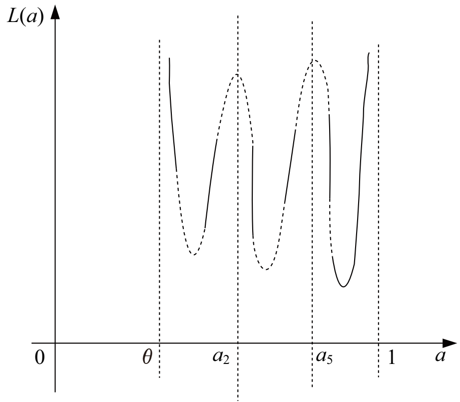

图 6　对应 6 个解的 $L(a)$ 的图像

参考文献:

[1] DU Y H, MATANO H. Convergence and sharp thresholds for propagation in nonlinear diffusion problems [J]. Journal of the European Mathematical Society, 2010, 12(2): 279–312.

[2] MATANO H. Convergence of solutions of one-dimensional semilinear parabolic equations [J]. Journal of Mathematics of Kyoto University, 1978, 18(2): 221–227.

[3] ARONSON D G, WEINBERGER H F. Nonlinear diffusion in population genetics, conbustion, and nerve pulse propagation [C]// Partial Differential Equations and Related Topics, Lecture Notes in Math. Berlin: Springer, 1975, 446: 5–49.

[4] ARONSON D G, WEINBERGER H F. Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics [J]. Advances in Mathematics, 1978, 30(1): 33–76.

[5] YE Q X, LI Z Y, WANG M X, et al. Introduction to Reaction-diffusion Equation [M]. Beijing: Science Press, 2011.

(责任编辑：冯珍珍，顾浩然)