

文章编号:1000-582X(2006)07-0119-05

结构系统模糊可靠性分析*

吕玺琳¹,吕恩琳²

(1. 同济大学 地下建筑与工程系, 上海 200092; 2. 重庆大学 工程力学系, 重庆 400030)

摘要:将模糊数学理论与可靠性分析相结合,建立一种结构系统模糊可靠性分析方法.同时考虑结构可靠性分析模型中存在的随机性和模糊性,利用分解定理处理模糊数,得到结构构件模糊可靠度各 λ 水平截集下的区间解.利用这些区间解计算结构系统模糊可靠度,既有效地降低计算量,又保留了中间计算过程的模糊性,使结果更准确.具体推导了 β 约界法计算结构系统模糊可靠度的公式,算例表明,该模糊可靠度计算方法是有效可行的.

关键词:结构系统;随机;模糊可靠度;区间解; β 约界法

中图分类号:O159

文献标识码:A

结构系统可靠性通常定义为:在规定的使用条件和环境下,在给定的使用寿命期间,结构系统有效地承受载荷和耐受环境而正常工作的能力^[1].随着科技发展,研究对象越来越复杂,复杂结构系统受多种因素影响,难以用数学或力学方法精确表达.实践表明,对于复杂系统问题,用模糊理论能客观地进行描述,得到与工程实际基本相符的模型.由于常规可靠性理论基本假设的局限性,对于模糊问题,若仍使用常规可靠性理论,必将导致计算结果和实际不一致.为此,可靠性分析必然与模糊数学结合,建立结构模糊可靠性分析模型.目前的模型,大多建立在构件层次上,并非系统层次,而构件模型不能直接应用于工程.因此,将可靠性理论推广到系统级别,极具工程实际意义.

1 结构构件模糊可靠性分析

1.1 模型中存在的模糊性

结构可靠性分析模型主要涉及应力和强度.应力与载荷、结构尺寸、材料性能及支座等因素有关.这些因素常常具有模糊性的特征,因此,应力也具有了模糊性.材料强度是一个复杂的力学量,生产厂家、试样质量情况、试验条件、尺寸和加工方法等因素均可能对其造成影响.为尽量符合具体情况,应利用模糊数学方法,依靠设计人员的经验和判断用主观模糊变量处理.

1.2 直接积分法

获得应力和强度后,即可建立结构可靠性分析模型.模糊事件概率表示为

$$P(\bar{A}) = \int_0^1 \mu_{\bar{A}}(x) dP = E[\mu_{\bar{A}}(x)], \quad (1)$$

式(1)为勒贝格积分, $P(\bar{A})$ 表示模糊事件的概率, $\mu_{\bar{A}}(x)$ 为模糊安全事件的隶属函数,由模糊强度、模糊应力和失效状态隶属函数构造,但很难直接给出,即便得到了其解析式,其积分计算也相当麻烦.利用普通事件概率与模糊事件概率间的关系,可将模糊事件概率通过分解定理转换为普通事件概率计算.模糊事件概率用普通概率表示为^[2]

$$P(\bar{A}) = \int_0^1 P(\bar{A}_{\lambda}) d\lambda = \int_0^1 \left[\int_{A_{\lambda}^c} f(x) dx \right] d\lambda, \quad (2)$$

式中 \bar{A} 是实数域上的凸模糊集, \bar{A}_{λ} 是其 λ 水平截集,记为 $[A_{\lambda}^l, A_{\lambda}^u]$,由 $\mu_{\bar{A}}(x) \geq \lambda$ 得出. $f(x)$ 是基本变量的分布函数.

1.3 基于区间方法计算结构模糊可靠度

若不确定参变量 X 在某区间内变化,区间的上下界分别为 X^l, X^u ,则 $X \in X^l = [X^l, X^u]$ 为区间变量,令 $X^c = \frac{(X^l + X^u)}{2}$, $X^r = \frac{(X^u - X^l)}{2}$, X^c 表示算术平均值, X^r 为区间数的离差,则

$$\begin{cases} X^l = X^c - X^r, \\ X^u = X^c + X^r. \end{cases} \quad (3)$$

* 收稿日期:2006-03-20

作者简介:吕玺琳(1981-),男,重庆大足人,同济大学博士研究生,主要从事岩土工程、结构可靠性设计的研究.

设强度为随机变量 R , 应力为连续型隶属函数的模糊变量 \tilde{S} . 对截集水平 λ , 得到区间数 $\tilde{S}_\lambda = [S_\lambda^l, S_\lambda^u]$, S_λ^u, S_λ^l 分别表示截集区间的上下界. 根据常规可靠度理论, 结构构件模糊可靠度的 λ 水平截集值为

$$P_{r\lambda} = P(R \geq \tilde{S}_\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_R(r) \left[\int_{-\infty}^R f_{\tilde{S}_\lambda}(s) ds \right] dr = \int_{S_\lambda^l}^{S_\lambda^u} \frac{R - S_\lambda^l}{S_\lambda^u - S_\lambda^l} \cdot f_r(R) dr + \int_{S_\lambda^l}^{+\infty} f_r(r) dr, \quad (4)$$

式中 $f_r(r), f_{\tilde{S}_\lambda}(s)$ 分别为抗力和模糊应力的密度函数.

设应力为随机变量 S , 强度为模糊变量 \tilde{R} , 对任一截集水平 λ , 模糊强度对应区间数为 $\tilde{R}_\lambda = [R_\lambda^l, R_\lambda^u]$. 根据常规可靠度理论, 构件模糊可靠度在 λ 水平截集下为

$$P_{r\lambda} = P(S \leq \tilde{R}_\lambda) = \int_{R_\lambda^l}^{R_\lambda^u} \frac{1}{R_\lambda^u - R_\lambda^l} \left[\int_{-\infty}^R f_s(s) ds \right] dr = \int_{-\infty}^{R_\lambda^l} f_s(s) ds + \int_{R_\lambda^l}^{R_\lambda^u} \frac{R_\lambda^u - S}{R_\lambda^u - R_\lambda^l} f_s(s) ds, \quad (5)$$

式中 $f_r(r), f_s(s)$ 分别为抗力和模糊应力的密度函数.

当变量为模糊随机变量时, 根据已有试验数据和专家经验, 用 L-R 型模糊数描述随机变量的均值和标准差. 由分解定理, 将随机变量 x_i 的模糊均值 \tilde{m}_{x_i} 和模糊标准差 $\tilde{\sigma}_{x_i}$ 表示为各 λ 水平截集下的区间形式

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{x_i} &= m_i^c(\lambda) + m_i^r(\lambda) \delta_{m_i}, \\ \tilde{\sigma}_{x_i} &= \sigma_i^c(\lambda) + \sigma_i^r(\lambda) \delta_{\sigma_i}, \end{aligned} \quad (6)$$

式中 $\lambda \in [0, 1], \delta_{m_i}, \delta_{\sigma_i} \in [-1, 1]$. 结构构件模糊功能函数方程表示为

$$\tilde{Z} = \tilde{R} - \tilde{S}. \quad (7)$$

设模糊强度 $\tilde{R} \in N((\tilde{m}_R)_{LR}, (\tilde{\sigma}_R^2)_{LR})$, 模糊应力 $\tilde{S} \in N((\tilde{m}_S)_{LR}, (\tilde{\sigma}_S^2)_{LR})$. 利用扩展原理, 将一次二阶矩法扩展到模糊情形, 则结构模糊可靠性指标 $\tilde{\beta}$ 表示为

$$\tilde{\beta} = \frac{\tilde{m}_R - \tilde{m}_S}{\sqrt{\tilde{\sigma}_R^2 + \tilde{\sigma}_S^2}}. \quad (8)$$

由式(6)可知, 可以将模糊数转换为一系列 λ 水平截集下的区间. 在截集水平 λ 下, 抗力、载荷效应的均值和标准差对应区间数为 $\overline{m}_R(\lambda), \overline{m}_S(\lambda), \overline{\sigma}_R(\lambda), \overline{\sigma}_S(\lambda)$.

$$\left. \begin{aligned} \overline{m}_R(\lambda) &= m_R^c(\lambda) + m_R^r(\lambda) \delta_R \\ \overline{m}_S(\lambda) &= m_S^c(\lambda) + m_S^r(\lambda) \delta_S \\ \overline{\sigma}_R(\lambda) &= \sigma_R^c(\lambda) + \sigma_R^r(\lambda) \delta_{\sigma R} \\ \overline{\sigma}_S(\lambda) &= \sigma_S^c(\lambda) + \sigma_S^r(\lambda) \delta_{\sigma S} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

λ 水平截集下对应的模糊可靠性指标的截集区间为

$$\tilde{\beta}_\lambda = [\beta_\lambda^l, \beta_\lambda^u], \quad (10)$$

式中 $\beta_\lambda^l, \beta_\lambda^u$ 分别为

$$\left. \begin{aligned} \beta_\lambda^l &= \frac{R^l(\lambda) - S^u(\lambda)}{\sqrt{(\sigma_R^u(\lambda))^2 + (\sigma_S^u(\lambda))^2}} \\ \beta_\lambda^u &= \frac{R^u(\lambda) - S^l(\lambda)}{\sqrt{(\sigma_R^l(\lambda))^2 + (\sigma_S^l(\lambda))^2}} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

同时, 式(10)也可表示为

$$\tilde{\beta}_\lambda = [R(\lambda) - S(\lambda) + (R^r(\lambda) \delta_R - S^r(\lambda) \delta_S) \cdot [(\sigma_R^c(\lambda) + \sigma_R^r(\lambda) \delta_{\sigma R})^2 + (\sigma_S^c(\lambda) + \sigma_S^r(\lambda) \delta_{\sigma S})^2]^{\frac{1}{2}}]. \quad (12)$$

结构模糊可靠度在 λ 水平截集下 $P_{r\lambda}$ 值为

$$P_{r\lambda} = \frac{1}{\beta_\lambda^u - \beta_\lambda^l} \left\{ \beta_\lambda^u \Phi(\beta_\lambda^u) - \beta_\lambda^l \Phi(\beta_\lambda^l) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\exp\left(-\frac{\beta_\lambda^u^2}{2}\right) - \exp\left(-\frac{\beta_\lambda^l^2}{2}\right) \right] \right\}. \quad (13)$$

式中 $\Phi(\cdot)$ 表示标准正态分布函数, 根据式(2), 模糊可靠度的估计值为

$$P_r = \int_0^1 P_{r\lambda} d\lambda. \quad (14)$$

通过模糊有限元求得模糊应力各 λ 水平截集下的区间解^[3], 模糊随机有限元求得模糊随机应力各 λ 水平截集下模糊均值和模糊方差的区间解^[4]. 将所得区间解代入以上公式即可求得模糊可靠度各 λ 水平截集的表达式.

2 结构系统模糊可靠度

研究结构系统可靠度的核心是研究结构的失效模式, 而主要失效模式识别算法的核心是生成结构主要失效树, 生成失效树的基本操作有分枝和约界 2 种^[5]. 分枝是由随机性引起的. 限制分枝规模的操作就是约界, 它将符合某些条件的一组而非一个失效模式遴选出来. 不同方法的差异在于所采用的约界准则和约界策略的不同, β 约界法是一种可在不同水准上, 通过有效算法, 将不太可能发展为重要失效路径的失效路径提前删除, 以避免分枝规模的扩大, 从而简化计算的方法.

D. A. Ralescu 提出一个模糊问题应得到模糊解, 在计算过程中应尽量保留模糊性以保证最终结果的准确性^[6]. 故应将结构构件可靠性指标视为模糊数代入结构系统可靠度计算公式计算, 基于 β 约界法计算模糊可靠度的具体过程如下.

1) 水准 0 上的模糊可靠度

单一构件失效的可靠性分析称为水准 0 上结构系统可靠性分析, 各构件相互独立, 系统可靠性等同于具有最低可靠性指标的构件的可靠性. 设结构系统由各失效构件组成, 失效构件 i 的模糊可靠性指标用 $\tilde{\beta}_i$ 表示, 则水准 0 上, 系统模糊可靠性指标为

$$\tilde{\beta} = \min_{i=1,2,\dots,n} \tilde{\beta}_i, \quad (15)$$

式中 n 为失效构件数, 它是对承受最严重载荷构件的可靠性估算. 利用分解定理, 将模糊可靠性指标 $\tilde{\beta}$ 表示为在各 λ 水平截集下的区间

$$\tilde{\beta}_\lambda = [\beta'_\lambda, \beta''_\lambda], \quad (16)$$

$\beta'_\lambda, \beta''_\lambda$ 分别是 $\tilde{\beta}$ 在 λ 水平截集下区间的上下界, 通过式(13)、(14)即得水准 0 上模糊可靠度的估计值.

2) 水准 1 上的模糊可靠度

水准 1 上结构系统的可靠性定义为 n 个失效构件构成的串联系统的可靠性. 利用水准 0 上结果, 只考虑危险失效要素, 选模糊可靠性指标的 λ 截集区间上下界分别位于 $[\beta''_{\lambda_{\min}}, \beta''_{\lambda_{\min}} + \Delta\beta], [\beta'_{\lambda_{\min}}, \beta'_{\lambda_{\min}} + \Delta\beta]$ 内的失效要素, 通常取 $\Delta\beta = 1.0 \sim 3.0^{[7]}$. 将最大界限估计法、Ditlevson 法及近似公式法扩展到模糊情形, 得到各 λ 截集水平下模糊失效概率 \tilde{P}_f 对应 λ 截集区间 $[P'_{f\lambda}, P''_{f\lambda}]$, 由式(13)、(14)即得水准 1 上模糊可靠度的估计值 P_r .

①最大界限法

结构模糊失效概率 \tilde{P}_f 为

$$\tilde{P}_f = (\max_{i=1,2,\dots,n} P(\tilde{F}_i) + 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(\tilde{F}_i))) / 2, \quad (17)$$

\tilde{F}_i 表示第 i 个模糊失效事件, 利用模糊失效概率得到模糊可靠度

$$\tilde{P}_r = 1 - \tilde{P}_f. \quad (18)$$

同样, 利用分解定理处理, 求得模糊失效概率 λ 截集水平的上下界分别为

$$\left. \begin{aligned} P'_{f\lambda} &= (\max_{i=1,2,\dots,n} P(F^i_{f\lambda}) + 1 - \prod_{i=1}^n [1 - P(F^i_{f\lambda})]) / 2 \\ P''_{f\lambda} &= (\max_{i=1,2,\dots,n} P(F''^i_{f\lambda}) + 1 - \prod_{i=1}^n [1 - P(F''^i_{f\lambda})]) / 2 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

模糊可靠度的 λ 水平截集为

$$\tilde{P}_{r\lambda} = [1 - P''_{f\lambda}, 1 - P'_{f\lambda}]. \quad (20)$$

结构模糊可靠性指标的 λ 截集区间为

$$\tilde{\beta}_\lambda = \Phi^{-1}(\tilde{P}_{r\lambda}) = [\Phi^{-1}(1 - P''_{f\lambda}), \Phi^{-1}(1 - P'_{f\lambda})], \quad (21)$$

$\Phi^{-1}(\cdot)$ 为标准正态密度函数的反函数.

②Ditlevson 法

将 Ditlevson 法扩展到模糊情形, 为

$$\tilde{P}_f = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^n \tilde{P}_{f_i} - \sum_{i=2}^n \max[\tilde{P}(\tilde{F}_i \cap \tilde{F}_j)] + \tilde{P}(\tilde{F}_1) + \sum_{i=2}^n \max(\tilde{P}(\tilde{F}_i) - \sum_{j=1}^{i-1} P(\tilde{F}_i \cap \tilde{F}_j)), 0 \right\}. \quad (22)$$

利用式(18) - (21), 即得模糊可靠度的 λ 水平截集区间.

③近似公式法

λ 水平截集下, 各杆模糊可靠性指标和模糊失效概率的截集区间分别为 $[\beta'_\lambda, \beta''_\lambda], \tilde{P}_{f\lambda} = [P'_{f\lambda}, P''_{f\lambda}]$, 计算公式如下

$$\left. \begin{aligned} P'_{f\lambda} &= 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \prod_{i=1}^n \Phi\left(\frac{\beta'_{i\lambda} - \sqrt{\rho}t}{\sqrt{1-\rho}}\right) dt \\ P''_{f\lambda} &= 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \prod_{i=1}^n \Phi\left(\frac{\beta''_{i\lambda} - \sqrt{\rho}t}{\sqrt{1-\rho}}\right) dt \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

式中 $\varphi(\cdot)$ 表示标准正态密度函数, 各构件相关系数 ρ_{ij} 均相等, 记 $\rho_{ij} = \rho$.

3) 水准 2 上的模糊可靠度

水准 2 上结构系统可靠度估算同样基于串联系统进行, 但其组成单元是一系列并联系统, 且每个并联系统有关键一对失效构件. 关键失效构件用 β 约界法识别. 设结构由 n 个失效构件模拟, 1 级关键失效构件数为 n_1 , 并设关键失效构件 l 的可靠性指标为最低, 记为 $\tilde{\beta}_{l\min}$. 假定失效构件 l 失效, 将其移去, 附加人为载荷 F_l 修改结构. 若移去的失效构件是塑性的, 则人为载荷 F_l 为

$$F_l = r_e R_l, \quad (24)$$

式中 R_l 为构件 l 的承载能力, $0 < r_e \leq 1$. 分析结构系统受载荷 P_1, \dots, P_k 和人为载荷 F_l 作用下的模糊可靠性, 得出 l 失效后结构各失效要素的模糊可靠性指标 $\tilde{\beta}_{i/l}$. 选可靠性指标位于 $[\tilde{\beta}_{i/l\min}, \tilde{\beta}_{i/l\min} + \Delta\beta]$ 的失效元素分别与 l 组成并联系统, 将得到的并联系统串联, 类似水准 1 的分析, 即得水准 2 上的模糊可靠度. 具体计算公式如下

$$\left. \begin{aligned} \tilde{S}_{i/l} &= \sum_{j=1}^k a_{ij} \tilde{P}_j + a_{il} \tilde{F}_l \\ \tilde{Z}_{i/l} &= \min(\tilde{R}_i^+ - \tilde{S}_{i/l}, \tilde{R}_i^- + \tilde{S}_{i/l}) \\ \tilde{\beta}_{i/l} &= \frac{\tilde{\mu}_{Z_{i/l}}}{\tilde{\sigma}_{Z_{i/l}}} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

若构件为塑性破坏, $a_{il} \neq 0$; 若为脆性破坏, $a_{il} = 0^{[8]}$. 由 $\tilde{\beta}_{i/l}$ 和 $\tilde{\beta}_i$ 及两者的相关系数用 Ditlevson 法算得

并联子系统的模糊失效概率,进而求得模糊可靠度. 然后用类似水准 1 的方法求出水准 2 的模糊可靠度.

4) 水准 3 及以上的模糊可靠度

水准 3 上模糊可靠度的计算与水准 2 类似,只是并联子系统失效构件数为 3 个. 用 β 约界法判定关键 3 失效构件,每 3 失效构件形成一个并联系统. 类似地,这个方法可以推广到更高水准的系统计算中,但一般情况下很少采用.

3 算 例

平面超静定桁架结构如图 1 所示,已知 $a = 1 \text{ m}$,弹性模量 E 为正态随机变量,均值为 210 GPa ,变异系数为 0.1 . 杆件屈服应力和外载荷分别服从 $N(235, 20, 30)_{\text{LR}}$ kN/m^2 , $(10\ 000, 400, 500)_{\text{LR}}$ kN^2/m^4 , $N(1\ 000, 40, 50)_{\text{LR}}$ kN , $(10\ 000, 400, 500)_{\text{LR}}$ kN^2 的正态分布,各模糊数的隶属函数均为二次型,设杆 1 横截面积服从均值为 $4.50 \times 10^3 \text{ mm}^2$, 变异系数为 0.1 的正态随机变量,其它各杆件横截面积分别为 $3.18, 2.75, 6.00, 1.80, 4.00, 1.48, 4.00, 3.08, 1.32 (\times 10^3 \text{ mm}^2)$. 由结构系统模糊可靠性分析模型衡量该结构系统的可靠性.

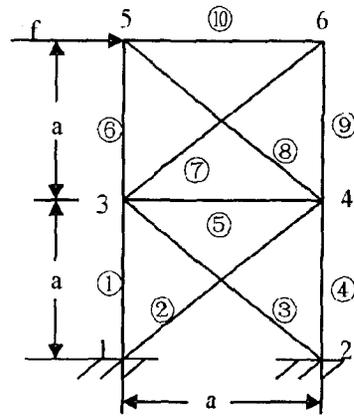


图 1 平面超静定桁架结构

解:当 λ 取一定值时,结构系统各水准上模糊可靠度对应的区间结果如表 1 所示. 结构系统在水准 0、1、2 上模糊可靠度估计值为:0.935 2, 0.903 6, 0.978 7, 与常规可靠性模型各水准上可靠度值 0.957 5, 0.941 5, 0.978 9 比较,各水准上模糊可靠度值均小于常规情形的值. 表明忽略模糊性得到的结果偏于危险,采用结构系统模糊可靠性分析模型得到的可靠度衡量结构更安全.

表 1 模糊可靠性指标的 λ 水平截集结果

Table with 8 columns (水准, 1.0, 0.95, 0.9, 0.85, 0.8, 0.75, 0.7) and 4 rows (水准 0, 1, 2) showing reliability intervals.

4 结 语

在模糊数学和常规可靠性、结构构件模糊可靠性模型基础上,对同时考虑模糊性和随机性的结构系统可靠性进行研究,得到了系统模糊可靠度的计算公式,进一步完善了可靠性分析模型,使之更符合工程实际. 在得到系统模糊可靠度最终结果前的计算过程中保留了参数的模糊性,使计算结果优于以往计算模型.

参考文献

[1] 王光远,张鹏. 工程结构及系统的模糊可靠性分析[M]. 南京:东南大学出版社,2001. 33-42.
[2] 杜布瓦 D,普哈德 H. 模糊集与模糊系统——理论和应用[M]. 南京:江苏科学技术出版社,1987. 70-158.

[3] 郭书祥,吕震宙,冯立富. 模糊运算和模糊有限元静力控制方程的求解[J]. 应用数学和力学,2002,23(9): 936-942.
[4] 吕恩琳. 模糊随机有限元平衡方程的摄动解法[J] 应用数学和力学,1997,18(7):631-638.
[5] 董聪. 现代结构系统可靠性理论及其应用[M]. 北京:科学出版社,2001. 134-135.
[6] RALESCU D A. Extensions of Fuzzy Aggregation[J]. Fuzzy Sets and Systems,1997,86(3):321-330.
[7] FENG Y S. Engineering Significant Failure Models of a Structure System by Using Criterion Method[J]. Comput Struct,1988,30:1153-1157.
[8] THOFT-CHRISTENSEN P, SORENSEN J D. Reliability of Structural Systems with Correlated Elements[J]. Applied Mathematical Modeling, 1982,6:171-178.

Structural System Fuzzy Reliability Analysis

LV Xi-lin¹, LV En-lin²

(1. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China;

2. Department of Engineering Mechanics, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

Abstract: The authors combine fuzzy mathematic theory with reliability analysis to deduce a method of analyzing structural system for fuzzy reliability. Considering the stochastic numbers and fuzzy numbers in the reliability analysis model of structural system, they utilize structural component reliability analysis and λ cut and a series of interval answers are obtained. These numbers to calculate fuzzy reliability of structural system can not only reduce the computation cost, but also reserve the fuzziness during calculation process and make the result more accurate. The formula calculating the reliability of structural system based on β -Unzipping method is proposed. Example indicates the way put forward in this paper is effective and feasible.

Key words: structural system; stochastic; fuzzy reliability; interval answer; β -Unzipping

(编辑 姚 飞)

(上接第97页)

Fuzzy Transportation Problem and Its Hybrid Intelligent Algorithm

ZHONG Bo, ZHANG Xian-jun, PENG Tao

(College of Mathematics and Physics Chongqing University, Chongqing 400030, China)

Abstract: The authors investigate a more practical transportation problem under fuzzy environment, that is, capacities of supplies and demands in the transportation problem are fuzzy variables. To obtain a directive decision, the authors construct a mathematical model for the fuzzy transportation problem based chance constrained programming and dependent chance programming in fuzzy environment. In addition, since there are many complex fuzzy variables in the mathematical model, the authors design the genetic algorithm to solve the model based on fuzzy simulation. Finally, they give a numerical example to show the efficiency of the algorithm.

Key words: fuzzy transportation problem; chance constrained programming; dependent chance programming; genetic algorithm

(编辑 张小强)