

文章编号:1000-582X(2002)03-0010-05

基于直接算法的虚拟式小波变换信号分析仪^{*}

钟佑明,汤宝平^{**},秦树人

(重庆大学机械工程学院测试中心,重庆 400044)

摘要:介绍了作者研制开发的一台基于直接算法的虚拟式小波变换信号分析仪,从而实现了用直接算法对信号进行离散小波变换和连续小波变换的功能。介绍了小波变换的直接算法公式,即由小波变换的原始公式通过直接数值化方法获得的数值算法公式。作者通过研究获得了直接算法中的一些结论,如离散小波变换直接算法中对小波的采样原理和技术、小波尺度范围的限定,边缘现象的解决措施,以及连续小波变换直接算法中的一些结论。基于这些研究,结合虚拟仪器技术开发出的基于直接算法的虚拟式小波变换信号分析仪能用任何母小波对信号进行离散小波变换和连续小波变换。它即可用于对母小波的研究和对小波理论的学习,也可用于一些工程信号分析。给出了分析仪应用的几个典型例子,表明本文的分析仪在许多情况下可以获得应用。

关键词:小波变换;直接算法;Mallat 算法;虚拟分析仪

中图分类号:TH115

文献标识码:A

小波变换的原始思想是利用大小可变的柔性时频窗口(也称为可变焦的数学显微镜^[1])观察信号,以获取信号的时频局部化信息。这一思想直观易懂。小波变换中研究和应用较多的是离散小波变换,然而目前实现离散小波变换的算法一般采用 Mallat 算法^[2],Mallat 算法不是直接基于小波变换原始思想,而是建立在一套比较抽象的数学理论基础之上的,且其变换要求母小波具有正交性,不能用一般的母小波进行变换。作者研制用直接算法实现小波变换的虚拟信号分析仪。所谓小波变换的直接算法,就是根据直观反映小波变换“加柔性窗观察信号”思想的原始数学公式,通过直接数值化实现的数值算法。基于直接算法的虚拟式小波变换信号分析仪无较抽象的理论,易于理解,具有重要的研究和开发价值。

1 小波变换直接算法的公式

1.1 离散小波变换直接算法的公式

离散小波变换直接算法的公式表示为

$$W_{m,n} = \sum_k x(kT_s) \overline{\Psi_{m,n}(kT_s)} T_s =$$

$$\sum_k x(kT_s) 2^{-m/2} \overline{\Psi(2^{-m}kT_s - n)} T_s \quad (1)$$

$$x_m(kT_s) = \sum_n W_{m,n} \Psi_{m,n}(kT_s) = \sum_n W_{m,n} 2^{-m/2} \Psi(2^{-m}kT_s - n) \quad (2)$$

其中, $x(t)$ 为被分析信号函数, $\Psi(t)$ 为母小波函数, T_s 为采样时间间隔,

$$\Psi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \Psi(2^{-m}t - n) \quad (m, n \in Z) \quad (3)$$

为尺度参数或频率参数为 m , 平移参数为 n 的小波, $W_{m,n}$ 为小波系数, $x_m(t)$ 称为信号 $x(t)$ 在尺度 m 上的小波分量。

1.2 连续小波变换直接算法的公式

连续小波变换直接算法的公式可表示为

$$W_s(n\Delta a, l\Delta b) = \sum_k x(kT_s) \overline{\Psi_{n\Delta a, l\Delta b}(kT_s)} T_s = |n\Delta a|^{-\frac{1}{2}} \sum_k x(kT_s) \overline{\Psi\left(\frac{kT_s - l\Delta b}{n\Delta a}\right)} T_s \quad (4)$$

其中 $x(t)$ 为被分析信号函数, $\Psi(t)$ 为母小波函数, T_s 为采样时间间隔,

* 收稿日期:2001-11-12

基金项目:国家自然科学基金资助项目(59875090);博士点基金资助项目(2000061112)

作者简介:钟佑明(1970-),男,四川荣县人,重庆大学博士生,主要从事虚拟仪器和信号分析的研究。

** 重庆大学机械传动国家重点实验室研究人员。

$$\Psi_{a,b}(t) = |a|^{-\frac{1}{2}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (a \in R - \{0\}, b \in R) \quad (5)$$

为尺度参数或频率参数为 a ，平移参数为 b 的小波， $W_x(a,b)$ 为小波系数， Δa 为尺度参数或频率参数的采样间隔， Δb 为平移参数 b 的采样间隔。

1.3 小波变换直接算法的原理框图

小波变换直接算法采用的原理如图 1 所示，其中

$$C_\Psi = \int_R \frac{|\hat{\Psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (6)$$

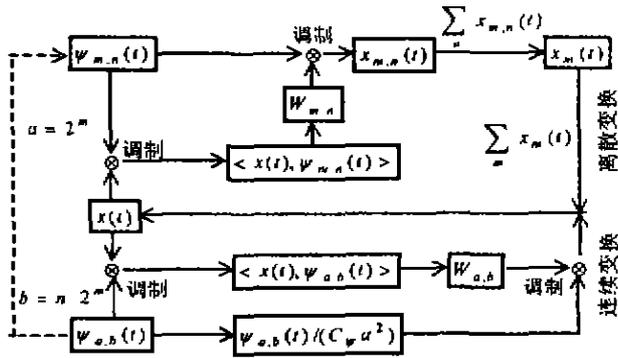


图 1 小波变换直接算法原理图

2 离散小波变换直接算法的一些结论

虽然小波变换直接算法公式简单易懂，但直接算法中的一些问题值得研究，以便其在计算机上易于实现。通过研究，获得了以下结论。

2.1 对小波的采样原理和技术

离散小波变换直接算法中的采样包括对信号的采样和对小波的采样^[3,4]。对信号和小波的采样都应满足信号采样定理，但离散小波变换中的小波是随尺度而变化的，尺度越大，频率越低，因此离散小波变换直接算法中的采样频率 $1/T$ ，或采样间隔 T ，是由信号和变换中最小尺度的小波决定的，且具有确定的规律。即对尺度为 m 的小波

$$\Psi_m(t) = 2^{-m/2} \Psi(2^{-m}t) \quad (7)$$

以时间间隔 T ，采样得

$$\Psi_m(kT_s) = 2^{-m/2} \Psi\left(\frac{kT_s}{2^m}\right) = 2^{-m/2} \Psi\left(k \frac{T_s}{2^m}\right) \quad (8)$$

因此，离散小波变换直接算法中对小波的采样可归结为对母小波的采样，采样时间间隔随尺度成倍改变：若尺度为 m 时，对母小波的采样间隔为 T_s^m ，则当尺度为 $m+1$ 时，对母小波的采样间隔为 $T_s^{m+1} = T_s^m/2$ 。根据这一确定关系，可将离散小波变换中对小波的采样分为两步进行：按 T_s 对母小波 $\Psi(t)$ 采样获得母小波的采

样数据 $\Psi(kT_s)$ ，然后按 2^{-m} ($m < 0$) 为采样点间隔对 $\Psi(kT_s)$ 进行二次采样并乘以相应的系数即可获得对尺度为 m 的小波的采样。若 $m \leq m_0 > 0$ ，则应先对母小波 $\Psi(t)$ 按 $T_s/2^{m_0}$ 采样，再按 2^{m_0-m} ($m \leq m_0$) 为采样点间隔对 $\Psi(kT_s)$ 二次采样获得对尺度为 m 的小波的采样。

2.2 小波尺度范围的限定

$$\text{设 } W_{2^m}x(y) = \langle x(t), \Psi_{m,y}(t) \rangle$$

$$\int_{\mathbb{R}} x(t) 2^{-m/2} \Psi(2^{-m}t - y) dt \quad (m \in Z, y \in R) \quad (9)$$

则有^[5]

$$\hat{W}_{2^m}x(\omega) = 2^{-m/2} \hat{x}(\omega) \hat{\Psi}(2^m\omega) \quad (10)$$

因此，若设信号 $x(t)$ 和母小波 $\Psi(t)$ 的频带分别为 $0 < \omega_{\min}^x \leq \omega \leq \omega_{\max}^x, 0 < \omega_{\min}^\Psi \leq \omega \leq \omega_{\max}^\Psi$ ，则尺度 m 应满足关系式

$$\log_2(\omega_{\min}^x/\omega_{\max}^\Psi) < m < \log_2(\omega_{\max}^x/\omega_{\min}^\Psi) \quad (11)$$

虽然某些信号和母小波（如 Little - Paley 小波，Meyer 小波）的频带具有紧支撑，但多数情况下， $\omega_{\min}^x \rightarrow 0, \omega_{\max}^\Psi \rightarrow 0$ ，因此根据式(11)确定尺度 m 范围一般较大。实际中可由式(10)得

$$|\hat{W}_{2^m}x(\omega)| \leq 2^{-m/2} AB \quad (12)$$

其中

$$A = \sup\{\|\hat{x}(\omega)\| \mid \omega \in R\}, B = \sup\{\|\hat{\Psi}(\omega)\| \mid \omega \in R\}$$

因此，若要求

$$|\hat{W}_{2^m}x(\omega)| \leq \varepsilon \quad (13)$$

则尺度应满足

$$m \geq 2 \log_2(AB/\varepsilon) \quad (14)$$

对式(1)、(2)变形得

$$W_{m,n} = \sum_k x(kT_s) 2^{-m/2} \Psi(2^{-m}kT_s - n) T_s = \sum_k x(kT_s) 2^{-m/2} \Psi\left(-\frac{2^m n - kT_s}{2^m}\right) T_s = \sum_k x(kT_s) 2^{-m/2} \Psi\left(-\frac{2^m(n/T_s)T_s - kT_s}{2^m}\right) T_s \quad (15)$$

$$x_m(kT_s) = \sum_n W_{m,n} 2^{-m/2} \Psi\left(\frac{kT_s - 2^m n}{2^m}\right) = \sum_n W_{m,n} 2^{-m/2} \Psi\left(\frac{kT_s - 2^m(n/T_s)T_s}{2^m}\right) \quad (16)$$

因此，在离散小波变换直接算法中，若采样频率 $1/T_s$ 与信号采样点数 N 均已确定，并要求式(15)、(16)中的 $2^m(n/T_s)$ 为整数， $1 \leq 2^m(n/T_s) \leq N$ ，则尺度应满足关系式

$$\log_2 T_s \leq m \leq NT_s \quad (17)$$

进一步设最小尺度为 m_{min} , 最大尺度为 m_{max} , 以及 $1 \leq 2^{m_{min}}(n/T_s) \leq N, 1 \leq 2^{m_{max}}(n/T_s) \leq N$ 则有

$$m_{max} - m_{min} \leq \log_2 N \quad (18)$$

这样尺度的范围便由式(11)、(14)、(17)、(18)确定。

2.3 边缘现象的处理

由于计算机只能获得有限范围内的信号数据, 在边缘处信号与小波不能完全内积, 这就产生了小波变换中的边缘现象(图 2(a))。由图知, 小波变换中的边缘 $N\Psi_m^-$ 与 $N\Psi_m^+$ 是随尺度的变化而变化的, 尺度越大, 边缘越宽。这里 $N\Psi_m^-$ 与 $N\Psi_m^+$ 分别为对小波 $\Psi_m(t)$ 在原点左右两边的采样长度。

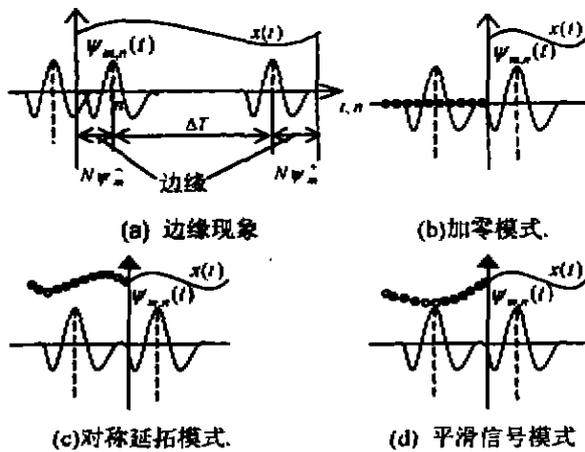


图2 小波变换中的边缘现象和处理措施

为了解决边缘现象, 可以采取拓展信号和限制小波平移位置等处理措施, 拓展信号包括补零、对称延拓和平滑信号(图 2(b)、(c)、(d))等模式⁽⁶⁾, 限制小波平移位置就是限制小波的平移参数 n , 使小波能与信号完全内积。限制小波平移位置等价于对信号延拓采样。

3 连续小波变换直接算法的一些结论

连续小波变换直接算法中, $\Delta a, \Delta b$ 可根据需要任意选取, 但采样时间间隔 T_s 应受采样频率定理和所需精度限制。仪器中连续小波变换的尺度参数 a 的范围可以任取, 平移参数 b 的范围则视待分析信号的时间范围确定, 假设取二者相同。因此, 在直接算法中, 若设信号和平移参数的样本点数分别 N_s 为 N_b , 则有如下关系:

$$N_s \times T_s = N_b \times \Delta b$$

又由式(4)得

$$W_x(n\Delta a, \Delta b) =$$

$$|n\Delta a|^{-\frac{1}{2}} \sum_k x(kT_s) \Psi\left(\frac{kT_s - (\Delta b/T_s)T_s}{n\Delta a}\right) T_s \quad (19)$$

为使对所有的 $l, \Delta b/T_s$ 能取整数, 本文所用的仪器中取 Δb 为 T_s 的倍数。

所有 $W_x(n\Delta a, \Delta b)$ 形成的三维图形称为信号 $x(t)$ 的连续小波变换谱。

4 基于直接算法的虚拟式小波变换信号分析仪

作者基于直接算法及其中的一些结论, 采用先进的虚拟仪器开发技术, 研制开发出了一台虚拟式小波变换信号分析仪(图 3)。

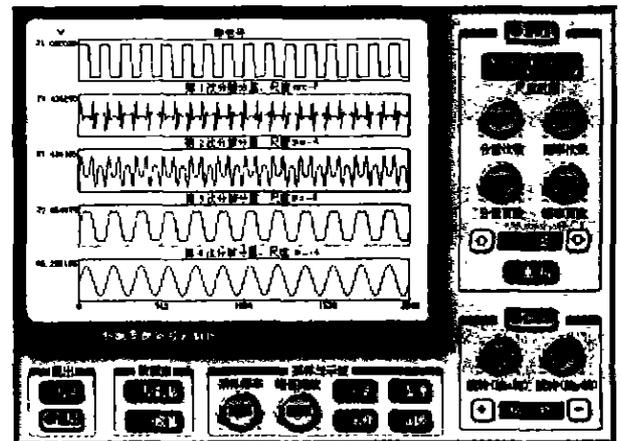


图3 基于直接算法的虚拟式小波变换信号分析仪

该仪器以对信号进行离散小波变换和连续小波变换的功能为主, 为更好地利用该仪器, 另外也配置了其他功能。具体说来, 它包括五个功能模块“离散小波变换”、“连续小波变换”、“示波和采样”、“数据库”和“退出”。在“离散小波变换”模块中, 可以通过“尺度范围”滑标任意选择变换尺度范围, 通过“分量次数”和“分量页数”旋钮观察原信号和各小波分量, 通过“频谱次数”和“频谱页数”观察原信号和各小波分量的频谱, 通过“分量”按钮观察所有小波分量, 通过“重构”按钮观察重构信号。在“连续小波变换”模块中, 可以通过单击分析窗口的右上角区域观察原信号和连续小波变换谱中对应于任一尺度的曲线, 通过“旋转 - x”和“旋转 - y”旋钮绕 x 轴或 y 轴旋转连续小波变换谱, 通过“缩放”按钮缩放连续小波变换谱, 通过鼠标右键双击切换对连续小波变换谱的显示, 通过单击分析窗口移动连续小波变换谱。在“示波和采样”模块中, 可以通过“示波”按钮显示波形, 通过“暂停”按钮暂停正显示的波形, 通过“采样”按钮采样和记录正显示的波形, 通过“回放”按钮回放刚记录的波形, 通过“采样频率”和“幅值尺度”旋钮调节示波的频率和幅值。在“数据库”模块中, 可以通过“原数据”按钮显示信号库中采样信号或分析信号, 通过“小波基”按钮显示母小波库中的母小波及其频谱。在“退出”模块中, 可以通过“打

印”按钮进行打印,通过“退出”按钮退出仪器。

基于 Mallat 算法的小波变换仪器只能用正交小波对信号进行离散小波变换,而且,由于其采用迭代算法,不能灵活选择变换的尺度。而本文研制开发的基于直接算法的小波变换仪器不仅能用正交小波,也能用一些非正交小波,如 Mexicanhat 小波, Morlet 小波等,对信号进行离散小波变换,它对每一尺度小波的变换是独立的,因而能灵活选择变换的小波尺度。

5 应用实例

本文所研制开发的分析仪对参与变换的小波基设

$$s(n) = \begin{cases} \sin(2\pi \cdot n/128) + 0.01\sin(2\pi \cdot 20n/128) & 805 \leq n < 807 \\ \sin(2\pi \cdot n/128) & \text{其他} \end{cases} \quad (20)$$

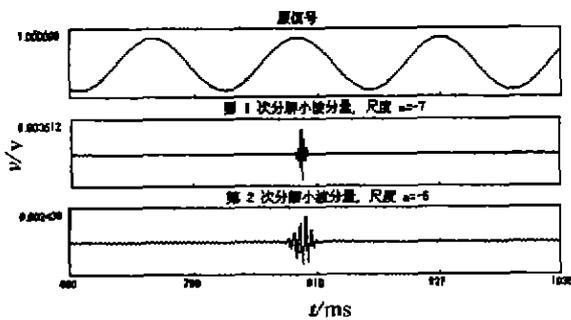


图 4 Morlet 小波对微弱信号的识别

图 5 则是本文分析仪用 Meyer 小波对具有两个奇异位置的奇异信号作离散小波变换的部分结果,奇异信号的解析表达式如式(21)所示。

有任何特别的要求,它对所有的母小波是通用的。它一方面可以应用于对小波基的研究和小波理论的学习,另一方面也可应用于工程信号分析。

例如,验证非正交小波对微弱信号的识别能力是非 Mallat 算法所能解决的,但用本文分析仪容易验证一些非正交小波的离散小波变换也能对微弱信号进行识别,如图 4 所示是用非正交的 Morlet 小波识别微弱信号的结果。微弱信号的解析表达式如式(20)所示。

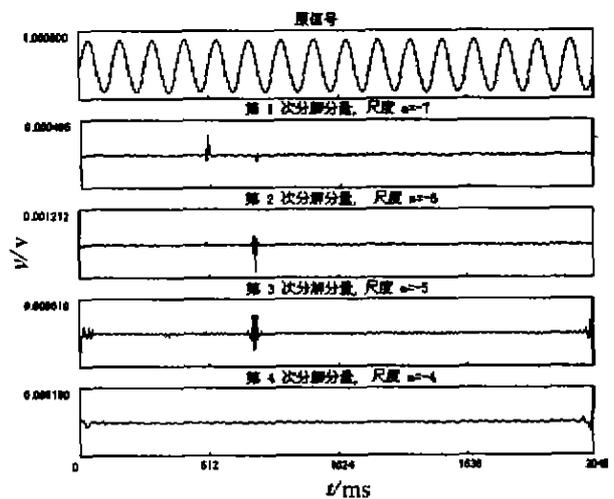


图 5 Meyer 小波对具有两个奇异位置的奇异信号的小波分解

$$s(n) = \begin{cases} \sin(2\pi \cdot n/128) + 0.01\sin(2\pi \cdot 8 \cdot n)/128 & 511 \leq n < 514 \\ \sin(2\pi \cdot n/128) + 0.04\sin(2\pi \cdot 2 \cdot n)/128 & 700 \leq n < 704 \\ \sin(2\pi \cdot n/128) & \text{其他} \end{cases} \quad (21)$$

图 5 表明, Meyer 小波对微弱信号具有较强的分辨能力。Meyer 小波是具有紧支撑的正交小波,但 Meyer 小波的小波函数与尺度函数均只有频域表达式,求其滤波系数是比较困难的,即使在 MATLAB 中目前也不存在 Meyer 小波的滤波系数,因而 Mallat 算法对 Meyer 小波的离散变换目前还无能为力。

图 6 是用本文分析仪对一感应电动机的轴承振动信号所作的小波变换分析。其中图 6(a)、(b)是用 db5 小波对轴承振动信号进行小波分解和重构的结果,而图 6(c)是用 Mexihat 小波对轴承振动信号进行连续小波变换的结果。从图 6 中容易直观看出轴承振动信号的时频局部化特性。

以上例子表明,本文所用仪器在许多情况下可以采用。

6 结束语

已知,小波变换是分析非线性、非平稳信号时频局部化特性的有力工具,小波变换最基本的变换方法也被许多人所熟悉。长期以来离散小波变换已习惯采用 Mallat 算法,但能否通过直接数值化方法实现离散小波变换的功能还是值得研究的。作者在较深入剖析了小波变换,尤其是离散小波变换直接算法中的一些问题的基础上,结合先进的虚拟仪器技术,成功研制出了基于直接算法的虚拟式小波变换信号分析仪。该分析仪有许多优点:它的原理直观易懂;它的小波分量所对应的小波的尺度是明确的;它可用于任何母小波。当然该分析仪的不足之处是需要通过积分求小波系数,其效果受被分析信号的性质和所用积分方法的影响。

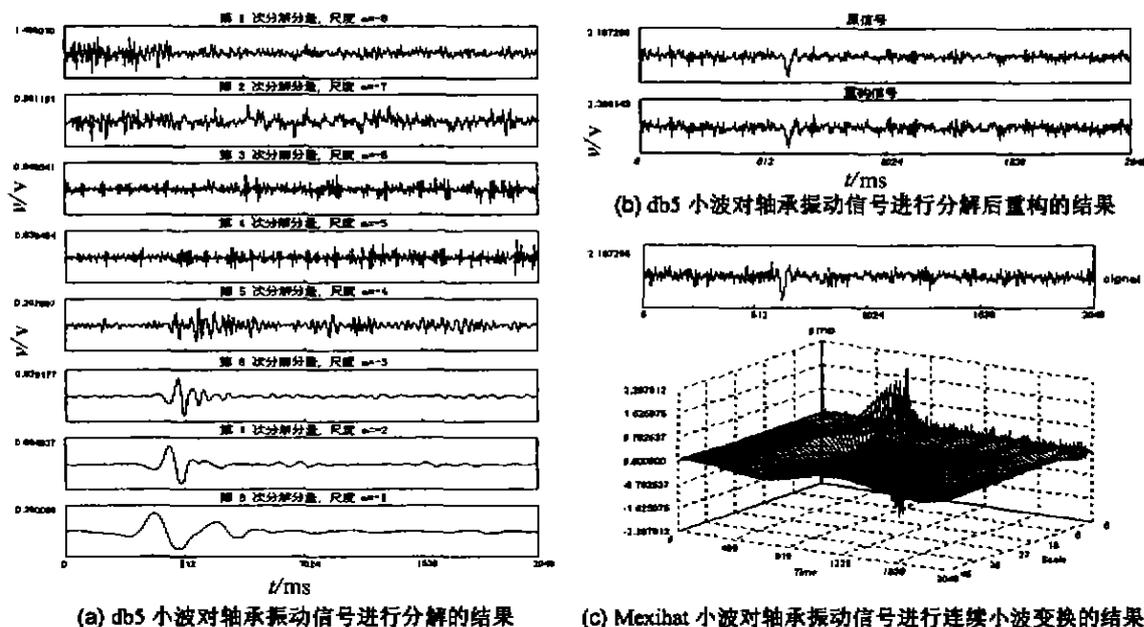


图6 用本文的仪器对一轴承振动信号进行小波变换分析的结果

参考文献:

- [1] 秦树人, 信号处理中的小波分析[J], 重庆大学学报(自然科学版), 1996, 19, (3): 35-43.
- [2] STEPHANE. G. MALLAT A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation. [J] IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1989, 11(7): 674-693.
- [3] QIN SHUREN, Sampling Principle and Technology in wavelet Analysis for Signals. [J] Chinese Journal of Mechanical Engineering(英文版), 1998, 11(4): 257-263.
- [4] 陈志奎, 工程信号中的小波采样和小波分析[J], 重庆大学学报(自然科学版), 1996, 11(5): 1-9.
- [5] 秦前清, 杨宗凯. 实用小波分析[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1994.
- [6] 胡昌华, 张军波, 基于 MATLAB 的系统分析与设计[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2000.

A Virtual Wavelet Transform Analyzer for the Signal Analysis Based on the Direct Algorithm

ZHONG You-ming, TANG Bao-ping, QIN Shu-ren

(The Test Center, College of Mechanical Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: A virtual wavelet transform analyzer for the signal analysis based on the direct algorithm is introduced so that the discrete wavelet transform and continuous wavelet transform is taken to signal in the direct algorithm. The authors first introduce the direct algorithm of the WT, which is numerical algorithm obtained from the original formula of the wavelet transform by directly numericalizing. Then some conclusions are drawn on the direct algorithm. The examples are the sampling principle and technology for the wavelets, the limitation of the scale range of the wavelets and the measures to solve the edge phenomenon in the direct algorithm of the discrete wavelet transform, and some conclusions in the direct algorithm of the continuous wavelet transform. The virtual wavelet transform analyzer for the signal analysis based on the direct algorithm explored based on these studies and combined with virtual instrument technique can make the discrete wavelet transform and continuous wavelet transform to signal with any basic wavelet. It can be applied in studying the property of any basic wavelet and learning the theory on the wavelet transform, and also in making some engineering signal analysis. In the end, the authors give some typical examples for the application of the virtual analyzer. These examples show that the analyzer can be applied in many situations.

Key words: wavelet transform, direct algorithm, mallat algorithm, virtual analyzer

(责任编辑 成孝义)