

求解堤坝渗流场的罚函数无单元法

沈振中¹ 陈小虎^{1 2} 吴越建³

(1. 河海大学水利水电工程学院 江苏 南京 210098 ; 2. 长江勘测规划设计研究院枢纽设计处 湖北 武汉 430010 ;
3. 中国水利水电第 7 工程局 3 分局 四川 成都 611130)

摘要 : 从变分原理出发 , 采用罚函数法处理渗流边界条件 , 推导了用无单元法求解有自由面的堤坝渗流问题的基本方程和迭代格式 , 给出了罚因子选取的具体表达式 , 并计算分析了某不透水地基上土坝的稳定渗流场 . 与电模拟试验成果的比较表明 , 文中所提出的计算方法和程序是正确的 , 且应用罚函数无单元法求解堤坝渗流问题 , 可以得到较高的计算精度和计算效率 .
关键词 : 堤坝 ; 渗流 ; 边界条件 ; 罚函数法 ; 无单元法 ; 变分原理
中图分类号 : TV223.4 文献标识码 : A 文章编号 : 1000-1980(2008)01-0044-05

有自由面的渗流问题普遍存在于堤坝、岩土边坡、地下洞室等实际工程中 , 目前常采用有限单元法求解 . 由于单元网格的限制 , 复杂渗流问题的有限元前处理工作量十分庞大 . 无单元法是一种新兴的工程数值计算方法 , 它采用滑动最小二乘法近似场函数 , 摆脱了单元的限制 , 计算过程中可以任意布置节点 , 因此在求解渗流自由面等可动边界问题时优势明显 . 迄今为止 , 无单元法的研究主要集中在裂纹扩展追踪、变形和应力分析等领域 , 且研究成果较多^[1-5] , 并已发展了三维无单元法^[6-9] . 但是 , 在渗流问题求解方面的研究尚不多见 . 曾清红等^[10]将无单元法用于求解稳定渗流问题 , 李广信等^[11]提出了有自由面渗流的无单元法 , 但他们都没有考虑如何准确施加渗流边界条件的问题 . 李晓春^[12]将无单元法用于求解裂隙渗流问题 , 并考虑用罚函数法处理渗流边界条件 , 但未能给出推导过程和罚因子的具体表达式及其物理意义 , 仅从量级上进行比较选择了罚因子的量值 . 本文从变分原理出发 , 采用罚函数法处理渗流边界条件 , 推导了用无单元法求解有自由面的堤坝渗流问题的基本方程和迭代格式 , 给出了罚因子选取的具体表达式 , 并计算分析了某不透水地基上土坝的稳定渗流场 . 与现有文献中电模拟试验成果的比较表明 , 罚函数无单元法的计算成果是合理的 .

1 无单元法和渗流定解问题

无单元 Galerkin 法采用最小二乘逼近 , 其基本原理和求解过程可参见文献 [1-3] .
考虑二维平面饱和渗流问题 . 不计源或汇 , 根据连续性方程 , 应用达西定律 , 可得各向异性稳定渗流基本微分方程^[13]

$$k_x \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + k_z \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0 \tag{1}$$

式中 : H ——水头场函数 ; k_x, k_z —— x 和 z 方向的渗透系数 ; x ——水平坐标 ; z ——垂直坐标 .
堤坝稳定渗流的定解问题一般包含 4 种边界条件 , 即已知水头边界、不透水边界、出渗面边界和自由面边界 .

2 罚函数无单元法

堤坝渗流系统的总能量 π 可表示为

$$\pi = \frac{1}{2} \mathbf{H}^T \mathbf{K} \mathbf{H} - \mathbf{H}^T \mathbf{F} + c \tag{2}$$

收稿日期 2007-01-19
基金项目 河海大学院士学科发展基金(HHYS003) 江苏省高等学校研究生创新计划(B06005)
作者简介 沈振中(1968—) 男 , 江苏吴江人 , 教授 , 博士 , 博士生导师 , 主要从事水工结构和岩土工程研究 .

由变分原理,对其求极值可得整体平衡方程

$$KH + F = 0 \tag{3}$$

式中: K ——总体渗透矩阵; H ——待求水头列阵; F ——右端平衡流量.下面确定 K 和 F 中的元素^[14].

2.1 流量平衡方程

式(1)的能量泛函可表示为

$$\pi = \iint_{\Omega} \frac{1}{2} \left[k_x \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + k_z \left(\frac{\partial H}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega \tag{4}$$

根据变分原理,对其求极值可得

$$\begin{cases} K^{(1)} = \iint_{\Omega} B(x) k B(x) d\Omega \\ F^{(1)} = (0 \ 0 \ \dots \ 0)^T \end{cases} \tag{5}$$

式中: $B(x) = (B_1(x), B_2(x), \dots, B_n(x))$; $B_i(x) = \left(\frac{\partial n_i}{\partial x}, \frac{\partial n_i}{\partial z} \right)^T$; $k = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_z \end{bmatrix}$; $x = (x, y)$ ——场点; n_i ——型函数; Ω ——计算区域.

2.2 已知水头边界

采用罚函数法处理已知水头边界条件.在边界处假设有一强透水层,其渗透系数为 k_s ,厚度为 ΔS ,如图 1(a)所示.设强透水层内的水头损失为 ΔH ,则已知水头边界上的能量泛函为

$$\pi = \int_{\Gamma} \frac{1}{2} k_s \left(\frac{\Delta H}{\Delta S} \right)^2 \Delta S d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{1}{2} k_s \frac{(H - H_B)^2}{\Delta S} d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{1}{2} k_s \frac{(N^T H - H_B)^2}{\Delta S} d\Gamma \tag{6}$$

式中: N ——型函数矩阵; Γ ——强透水层边界; H_B ——边界已知水头函数.根据变分原理,对其求极值可得

$$\begin{cases} K^{(2)} = \int_{\Gamma_1} \frac{k_s}{\Delta S} N^T N d\Gamma_1 \\ F^{(2)} = \int_{\Gamma_1} \frac{k_s}{\Delta S} N H_B d\Gamma_1 \end{cases} \tag{7}$$

式中: Γ_1 ——已知水头边界; $k_s/\Delta S$ ——罚因子. $k_s/\Delta S$ 取值需足够大但又不能太大.足够大才能起到罚因子的作用,太大又会造成总体渗透矩阵的病态,使得求解方程组时会得到虚假解.

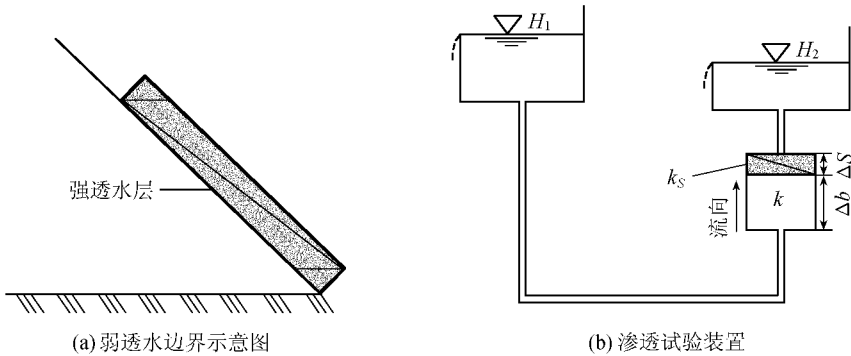


图 1 罚函数法处理已知水头边界示意图

Fig.1 Penalty function method for processing known water head boundary

为了合理地估计罚因子的值,不妨设想如图 1(b)所示的渗透试验.在土样上方有一层强透水层,土样渗透系数为 k ,厚 Δb ,强透水层渗透系数为 k_s ,厚 ΔS ,其顶部水头值为已知水头 H_2 .设土样内的水头损失为 ΔH_1 ,强透水层的水头损失为 ΔH_2 ,并设横截面面积为 A .由达西定律可知,经过土样和强透水层的流量分别为 $Q_1 = k \frac{\Delta H_1}{\Delta b} A$ 和 $Q_2 = k_s \frac{\Delta H_2}{\Delta S} A$.由流量平衡条件可得

$$k \frac{\Delta H_1}{\Delta b} A = k_s \frac{\Delta H_2}{\Delta S} A$$

要使得土样顶部接近已知水头 H_2 ,必须有 $\Delta H_1 \gg \Delta H_2$.设 $\Delta H_1 = c \Delta H_2$,则有

$$\frac{k_s}{\Delta S} = \frac{ck}{\Delta b} \quad (8)$$

经计算分析,当 $c = 10 \sim 100$ $\Delta b = \min d_n$ 时可得到较好结果,其中 d_n 为节点间距。

2.3 不透水边界

考虑在不透水边界上设有一层弱透水层,如图2所示。记弱透水层内边界为 Γ_2 ,外边界为 Γ'_2 ,在 Γ'_2 上法向流量 $\bar{q}$ 为0。设渗流区域和弱透水层的法向渗透系数分别为 k 和 k_d ,弱透水层厚为 Δd 。弱透水层能量泛函为

$$\pi = \int_{\Gamma_2} \Delta q \Delta H d\Gamma \quad (9)$$

由于 $k_d \Delta H = \int_{\Gamma_2} k_d \frac{\partial H}{\partial \mathbf{n}} d\mathbf{n} = \int_{\Gamma_2} q d\mathbf{n} = \frac{1}{2} \left(k \frac{\partial H}{\partial \mathbf{n}} + \bar{q} \right) \Delta d$,

$\Delta q = k \frac{\partial H}{\partial \mathbf{n}} - \bar{q}$,若考虑 $\bar{q} = 0$,则

$$\pi = \int_{\Gamma_2} \frac{1}{2} \frac{\Delta d}{k_d} k^2 \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{n}} \right)^2 d\Gamma = \int_{\Gamma_2} \frac{1}{2} \frac{\Delta d}{k_d} k^2 \left(\frac{\partial N}{\partial \mathbf{n}} \right)^2 d\Gamma \quad (10)$$

式中 $\mathbf{n}$ 为边界法向单位矢量。由变分原理,对其求极值可得

$$\mathbf{K}^{(3)} = \int_{\Gamma_2} \frac{\Delta d}{k_d} \mathbf{B}^T(\mathbf{x}) \mathbf{k} \mathbf{R} \mathbf{k} \mathbf{B}(\mathbf{x}) d\Gamma \quad \mathbf{F}^{(3)} = (0 \ 0 \ \dots \ 0)^T \quad (11)$$

式中 $\mathbf{R}$ ——旋转矩阵; α ——不透水边界与 x 轴的夹角。即

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sin^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (12)$$

同样,设渗流区域法向厚度为 Δb ,则区域法向平均流速为 $v_1 = k \frac{\Delta H}{\Delta b}$,弱透水层法向平均流速为 $v_2 = k_d \frac{\Delta H}{\Delta d}$,欲使 Γ_2 上法向流速接近0,则需 $v_1 \gg v_2$,设 $v_1 = cv_2$,则可以得到

$$\frac{\Delta d}{k_d} = \frac{c \Delta b}{k} \quad (13)$$

经计算分析, c 可取 $10 \sim 100$ $\Delta b = R_{\max}$, $R_{\max}$ 为最大影响半径。

2.4 $\mathbf{K}$ 和 $\mathbf{F}$ 中的元素

综上所述,由 $\mathbf{K} = \mathbf{K}^{(1)} + \mathbf{K}^{(2)} + \mathbf{K}^{(3)}$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}^{(1)} + \mathbf{F}^{(2)} + \mathbf{F}^{(3)}$ 可得

$$\begin{cases} K_{ij} = \iint_{\Omega} \left(k_x \frac{\partial n_i}{\partial x} \frac{\partial n_j}{\partial x} + k_z \frac{\partial n_i}{\partial z} \frac{\partial n_j}{\partial z} \right) d\Omega + \int_{\Gamma_1} \frac{k_s}{\Delta S} n_i n_j d\Gamma_1 + \\ \frac{\Delta d}{k_d} \int_{\Gamma_2} \left[(k_x \sin \alpha)^2 \frac{\partial n_i}{\partial x} \frac{\partial n_j}{\partial x} + (k_z \cos \alpha)^2 \frac{\partial n_i}{\partial z} \frac{\partial n_j}{\partial z} - k_x k_z \sin \alpha \cos \alpha \left(\frac{\partial n_i}{\partial x} \frac{\partial n_j}{\partial z} + \frac{\partial n_i}{\partial z} \frac{\partial n_j}{\partial x} \right) \right] d\Gamma_2 \\ F_i = \int_{\Gamma_1} \frac{k_s}{\Delta S} n_i H_B d\Gamma_1 \end{cases} \quad (14)$$

3 求解过程

自由面曲线采用三次样条函数插值,以便使用较少的插值点得到精确且光滑的自由面曲线。这样,无单元法求解有自由面的堤坝稳定渗流问题的计算步骤如下:

- 在全域内生成节点,并生成积分网格。
- 确定初始出渗点,生成自由面上的节点,出渗点作为自由面上最后一个节点。
- 将自由面节点按三次样条插值形成自由面边界,以确定渗流域。
- 对渗流域内的高斯点循环集成平衡方程组,待求水头的节点仅考虑渗流域内的节点。
- 求解平衡方程组,并对自由面上的节点进行以下判断:如果 $|H_i - z_i| < \epsilon$,计算停止,输出结果;若

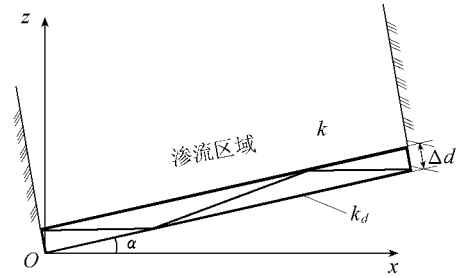


图2 罚函数法处理不透水边界示意图

Fig.2 Penalty function method for processing impermeable boundary

$|H_i - z_i| > \epsilon$, 调整自由面位置, 重复步骤 c ~ e.

采用无单元法求解有自由面的渗流场时, 对那些有自由面穿过的积分子域, 并不需要对积分网格进行任意的处理. 在计算渗流系数矩阵时, 只要将此子域内的函数 $\frac{\partial n_i}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial n_i}{\partial z}$ 看作为一个分段分布的函数, 且在渗流域之外的函数值取为 0. 因此, 积分网格可以始终保持不变.

4 算 例

某不透水地基上下游设有排水棱体的均质土坝, 坝高 12 m, 坝顶宽 6 m, 上下游坝坡坡率分别为 3.0 和 2.0, 排水棱体上下游边坡坡率为 1.0 和 2.0, 顶宽 2 m, 上游水深 10 m, 下游水深 4 m. 坝体的渗透系数为 2.315×10^{-6} m/s, 排水棱体的渗透系数为 2.894×10^{-4} m/s. 采用罚函数无单元法计算, 共迭代 15 步, 得到的坝体内的水头分布如图 3 所示.

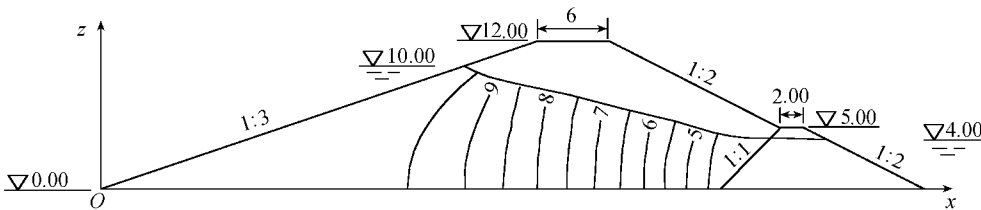


图 3 不透水地基上的土坝及其渗流场(单位 m)

Fig.3 Earth dam on impermeable foundation and its seepage field

将罚函数无单元法计算的自由面坐标与电模拟试验结果^[13]进行对比(表 1), 可见两者的误差很小. 另外, 试验得到的坝体单宽渗流量为 $0.34(\text{m}^3 \cdot \text{d}^{-1})/\text{m}$, 无单元法计算结果为 $0.3296(\text{m}^3 \cdot \text{d}^{-1})/\text{m}$, 与试验值的相对误差仅为 -3.06%, 可见, 采用罚函数无单元法计算的渗流场是正确的, 且计算精度较高.

5 结 论

本文针对堤坝有自由面的渗流问题, 采用罚函数法处理渗流边界条件, 导出了罚函数无单元法分析渗流问题的基本方程以及估算罚因子的表达式, 研制和开发了相应的计算程序, 并对某土坝进行了计算分析. 结果表明, 计算成果是合理的, 且罚函数无单元法的计算精度和效率较高, 可用于有自由面的堤坝等渗流分析.

无单元法与有限元法相比有一定的优势, 它实现了积分网格和节点的独立布置, 避免了对有自由面穿越的子域的重新处理, 可根据需要灵活地增加、移动、减少节点, 简化了渗流问题的求解过程, 具有发展前景.

参考文献:

[1] BELYTSCHKO T, LU Y Y, GU L. Element free Galerkin method[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1994, 37(2) 229-256.

[2] BELYTSCHKO T, LU Y Y, GU L. Crack propagation by element-free Galekin method[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1995, 51(2) : 295-315.

[3] 寇晓东. 无单元法追踪结构开裂及拱坝稳定研究[D]. 北京: 清华大学, 1998.

[4] 庞作会, 葛修润, 郑宏, 等. 一种新的数值方法: 无网格伽辽金法(EFGM) [J]. 计算力学学报, 1999, 16(3) 320-329.

[5] 寇晓东, 周维垣. 应用无单元法近似计算拱坝开裂[J]. 水利学报, 2000(10) 28-35.

[6] BELYTSCHKO T, KRYSL P, KRONGAUZ Y. A three-dimensional explicit element-free Galerkin method[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1997, 24 : 1253-1270.

[7] KRYSL P, BELYTSCHKO T. Element free Galerkin method for dynamic propagation of arbitrary 3-D crack[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999, 44(6) 767-800.

[8] 胡云进, 周维垣, 林鹏. 无单元法在三维断裂力学中的应用[J]. 岩土力学, 2003, 24(增刊) 21-24.

表 1 自由面坐标的计算值与试验值
Table 1 Calculated result and test data
of free surface coordination

x/m	自由面高度/m		相对 误差/%
	无单元法 计算结果	电模拟 试验结果	
32.8	8.883 2	8.900	- 0.19
37.8	7.861 1	8.000	- 1.74
42.8	6.778 5	6.900	- 1.76
47.8	5.596 6	5.700	- 1.81
51.0	4.884 2	4.850	0.71

- [9] 周维垣, 黄岩松, 林鹏. 三维无单元伽辽金法及其在拱坝分析中的应用[J]. 水利学报, 2005, 36(6): 645-649.
- [10] 曾清红, 卢德唐, 齐岩. 无网格法求解稳定渗流问题[J]. 计算力学学报, 2003, 20(4): 440-445.
- [11] 李广信, 葛锦宏, 介玉新. 有自由面渗流的无单元法[J]. 清华大学学报: 自然科学版, 2002, 42(11): 1552-1555.
- [12] 李晓春. 小湾水电站坝肩岩体裂隙网络渗流的三维网络与无网格法耦合模型研究[D]. 长春: 吉林大学, 2005.
- [13] 顾慰慈. 渗流计算原理及应用[M]. 北京: 中国建材工业出版社, 2000: 10-13; 193-194.
- [14] 陈小虎. 基于无单元法的应力场与渗流场耦合模型研究[D]. 南京: 河海大学, 2006.

Penalty function element-free method for solving seepage field of embankments

SHEN Zhen-zhong¹, CHEN Xiao-hu^{1,2}, WU Yue-jian³

(1. College of Water Conservancy and Hydropower Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China;

2. Hydraulic Complex Design Department, Changjiang Institute of Survey, Planning, Design and Research, Wuhan 430010, China;

3. Bureau 7, Sinohydro Engineering, Chengdu 611130, China)

Abstract Based on the variational principle, the penalty function method was used for processing boundary condition of seepage flow. The basic equation and iteration form were deduced to deal with the seepage problem of embankments with free surface by use of the element-free Galerkin method, and a formula for selection of the penalty factor was given. Then, the present method was applied to calculation of the steady seepage field of an earth-dam on impermeable foundation. The comparison of the calculated result with that from electrical analogy method shows that the calculation method and program are correct, and that the precision and efficiency of calculation can be improved by the penalty function element-free method.

Key words :embankment; seepage; boundary condition; penalty function method; element-free method; variational principle

· 简讯 ·

河海大学获准创办英文期刊 *Water Science and Engineering*

国家新闻出版总署日前正式批复,由河海大学创办英文期刊 *Water Science and Engineering*(WSE, 水科学与水工程)。该刊为季刊,面向国内外公开发行人,国内统一连续出版物号为:CN32-1785/TV。

Water Science and Engineering 办刊宗旨:以党和国家的方针政策为指导,弘扬科学精神,探索水科学规律,创新水工程技术,反映水科学研究领域的最新成果,交流水工程建设的新技术和新经验;注重人与自然的和谐共处,促进水资源的可持续利用;发挥学术民主,促进国际交流,为我国的经济建设和社会发展服务。

Water Science and Engineering 主要刊登反映国内外水科学研究和水工程建设领域重大科技成果和最新发展趋势的英文原创性科技论文,内容包括:大型水利工程建设、水电能源开发、跨流域调水、江河综合治理、地球水圈研究、水资源保护、水环境影响评价以及水生态修复等;也刊登国内外相关学术会议及技术交流等动态信息。

编辑部地址 210098 南京市西康路1号河海馆811室;投稿邮箱: wse@hhu.edu.cn;咨询热线: 025-83786363。

(*Water Science and Engineering* 编辑部供稿)