

刚性容器内流体非线性大幅晃动的数值模拟

赵兰浩¹ 李同春¹ 牛志伟¹ M. PASTOR²

(1. 河海大学水利水电工程学院, 江苏 南京 210098; 2. 西班牙国家公共实验研究中心, 马德里 西班牙)

摘要 取与容器固结的坐标系, 将外激励视为质量力, 针对刚性容器内流体非线性大幅晃动问题, 提出了在时间和空间上均具有二阶精度的两步 Taylor-Galerkin 分步有限元方法. 该方法首先显式地求解忽略压力梯度项的中间速度场, 然后通过压力泊松方程求得压力场, 最后根据求得的压力对速度场进行修正. 求解中利用 Level Set 方法隐式地追踪自由面, 即在每个时间步求解 Level-Set 函数随水流的输运方程, 并通过迭代方法对其重新进行初始化处理, 使其保持为距离的函数, 从而达到捕捉自由面的目的. 控制方程统一采用简便且具有较高精度的两步 Taylor-Galerkin 格式进行离散. 算例验证结果表明, 该数值方法是正确和有效的.

关键词 刚性容器; 大幅晃动; Level Set; 两步 Taylor-Galerkin; 分步有限元法

中图分类号 O351.2 **文献标识码** A **文章编号** 1000-198X(2006)04-0401-05

流体大幅晃动问题的研究在数学上涉及求解 Navier-Stokes 方程带有移动边界的初边值问题. 由于方程本身和自由液面边界条件都是非线性的, 并且自由表面随时间以未知方式运动, 这个问题的求解是非常复杂的, 三维问题更是如此. 因此, 许多研究是在流体简化模型等线性化理论基础上进行的, 如假定流体是微幅晃动无黏无旋的势流. 然而, 当流体大幅晃动时, 非线性效应在一定情况下可能会表现得非常突出, 甚至会出现波面碎波等强非线性现象. 用线性理论模拟液体的晃动, 通常低估了晃动波高, 不能真实地预测自由液面的位置. 这时采用流体原始非线性运动方程, 则可不受人为约定条件的限制, 全面地反映非线性和黏性效应^[1].

求解流体大幅晃动问题, 自由面的追踪是最大的难点. 有限差分法中的 MAC 方法和 VOF 方法等已在求解自由面问题中得到了很大发展, 其主要不足之处是计算量和存储量较大以及要求界面重构这一复杂的表面处理技术. 与此相比, Level Set 方法则将界面条件融入到控制方程中去, 可在整个域内用统一的方程求解, 不需要显式地追踪界面, 可以很方便地捕捉界面, 因此可以应用于流体大幅晃动问题的研究中.

此外, 与差分法相比, 有限元法可以灵活方便地采用多种单元形式, 能够精确处理各种不同的几何形状和边界条件, 而且便于与已有固体问题的有限元程序相结合, 以求解流体大幅晃动中的流固耦合问题. 因此, 本文首先取与容器固结的坐标系, 然后将外激励视为质量力, 采用具有二阶精度的两步 Taylor-Galerkin^[2]分步有限元方法求解控制方程, 最后将自由面视为水和空气两相介质的交界面, 利用 Level Set 方法追踪界面, 求解刚性容器内流体三维大幅非线性晃动问题.

1 适用于大幅晃动问题的 Level Set 方法

Level Set 方法是求解两相流问题的一种方法^[3-4]. 其主要思想是, 对求解域内的 2 种流体介质用统一的 Navier-Stokes 方程求解, 通过设置一个距离函数隐式地跟踪界面, 并且将界面条件融入到控制方程中. 这种方法不需要构造具体自由面位置, 可以较容易地处理复杂界面和剧烈变化的自由面(如合并、交叉、破碎等). 为了确定交界面的位置, 引入标记函数 ϕ . ϕ 是一个距离函数, 定义其为某空间点到交界面的符号距离, 交界面以上为正, 以下为负, 而零值处代表交界面. 因为 ϕ 随水流输运, 所以可以达到捕捉界面的目的.

对于不相混掺的 2 种流体, 其某种物理特性参数 M (如密度、黏性等)服从方程 $\frac{\partial M}{\partial t} + \nabla \cdot M \cdot \mathbf{u} = 0$. 其中 \mathbf{u}

为流体速度.根据 Level Set 的思想,若构造一个距离函数 Φ ,使其满足 Hamilton-Jacobi 型的控制方程

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \Phi \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

则 Φ 可以用来指示不同的流体区域.即:当 $\Phi \geq 0$ 时, $M = M_1$; 当 $\Phi < 0$ 时, $M = M_2$. 式(1)为标记函数 Φ 随水流输运的控制方程^[3].

为了保证能够捕捉到正确的界面,必须保证 Φ 是一个距离函数^[5],也就是使 $|\nabla \Phi| = 1$. 初始时刻的 Φ 值可以根据已知的流体空间分布给出,即 $\Phi(X, t=0) = \pm d$, d 表示计算区域 X 点到交界面的垂直距离.但在计算过程中,由于流场通常不是简单的均匀流场,界面会发生剧烈变化,经过若干时间步后 Φ 就不再保持为距离函数.采用 Sussman^[4]提出的迭代方法,可以使 Φ 保持为距离函数:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + S(\Phi^n) |\nabla \Phi| = S(\Phi^n) \quad (\text{初始条件为 } \Phi(X, \tau=0) = \Phi^n(X)) \quad (2)$$

式中: $S(\cdot)$ ——符号函数; $\Phi^n(X)$ ——方程(1)在 t^n 时刻的解; τ ——虚拟的迭代计算时间.

另外,由于所要计算的水和空气这2种流体的物理性质差别很大,交界面附近不连续,方程求解不稳定,因而需要对交界面附近的密度、黏性等物理特性参数进行光滑处理.最简单的方法是对交界面附近的密度、黏性等进行线性插值^[5]:

$$\begin{cases} M = M_1 & (\Phi \geq \delta) \\ M = M_1 + (M_2 - M_1) \chi(\Phi + \delta) / (2\delta) & (-\delta < \Phi < \delta) \\ M = M_2 & (\Phi \leq -\delta) \end{cases} \quad (3)$$

其中 δ 所取数量级与网格尺寸数量级相同.

有了计算区域内流体物理性质指标的分布,就可以对整个流场进行求解.用 Level Set 方法求解大幅晃动问题的步骤为:(a)用分步有限元法求解 Navier-Stokes 方程,得到速度场 U 和压力场 P ;(b)求解 Φ 的扩散方程(1),得到 Φ 值;(c)保持 Φ 为距离的函数;(d)根据 Φ 值进行物理特性插值,以备下一步计算用.

2 数值离散方法

一般来说,利用有限元方法求解 Navier-Stokes 方程时,为了保证求解的稳定性,必须满足所谓的 Babuska-Brezzi 条件,即速度应采用比压力高一阶的差值函数的混合插值法.但这样做会使得计算机程序和数据的输入都相当复杂.与此相比,基于 Taylor-Galerkin 方法^[6-8]或 Characteristic-Galerkin 方法^[9-11]的分步有限元法则可使速度和压力采用同阶线性插值而保证计算稳定.在 Taylor-Galerkin 方法基础上导出的两步 Taylor-Galerkin 离散方法,不但在时间和空间上均具有二阶精度,而且与传统 Taylor-Galerkin 方法相比,具有编程简单和计算速度快的优点.因此,本文采用两步 Taylor-Galerkin^[2]分步有限元方法求解控制方程.

2.1 N-S 方程求解

黏性不可压缩 Navier-Stokes 方程及连续性方程为

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \mathbf{u} \cdot (\rho \mathbf{u}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \nabla p + \mathbf{f}_b \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (5)$$

式中: \mathbf{u} ——速度; p ——压力; ρ ——密度; $\boldsymbol{\tau}$ ——黏性应力张量, $\boldsymbol{\tau} = \mu \nabla^2 \mathbf{u}$, μ 为流体黏性系数; \mathbf{f}_b ——体力,本文仅考虑重力和激振力, $\mathbf{f}_b = \rho \mathbf{g} + \rho \ddot{\mathbf{G}}(t)$, \mathbf{g} 为重力加速度; $\ddot{\mathbf{G}}(t)$ ——外加激励加速度向量.

首先显式地求得忽略压力梯度项的中间速度场增量 $\Delta \mathbf{u}^{*,n}$,然后结合连续性方程用半隐式解法求得压力场增量 Δp^n ,最后利用压力方程对速度场进行校正,从而得到 $\Delta \mathbf{u}^{**n}$.于是,得到速度场增量 $\Delta \mathbf{u}^n = \Delta \mathbf{u}^{*,n} + \Delta \mathbf{u}^{**n}$.

若记 $\mathbf{F} = \mathbf{u} \mathbf{u}^T + \frac{\delta_{ij} p}{\rho}$, $\mathbf{G} = -\frac{\boldsymbol{\tau}}{\rho}$, $\mathbf{Q} = -\mathbf{g} - \ddot{\mathbf{G}}(t)$,则可将方程(4)改写为易于离散的守恒式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla \cdot \mathbf{G} + \mathbf{Q} = 0 \quad (6)$$

记 $\mathbf{u} = \mathbf{u}^* + \mathbf{u}^{**}$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}^* + \mathbf{F}^{**}$, $\mathbf{F}^* = \mathbf{u} \mathbf{u}^T$, $\mathbf{F}^{**} = \delta_{ij} \frac{p}{\rho}$,方程(6)可改写为如下分步格式:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}^*}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{F}^* + \nabla \cdot \boldsymbol{G} + \boldsymbol{Q} = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}^{**}}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{F}^{**} = 0 \tag{8}$$

首先,用两步 Taylor-Galerkin^[2]格式求解忽略压力梯度项的方程(7).为方便起见,暂省略上标.将 \boldsymbol{u}^{n+1} 对时间进行二阶 Taylor 展开:

$$\boldsymbol{u}^{n+1} = \boldsymbol{u}^n + \Delta t \left. \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} \right|^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \left. \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} \right|^n \tag{9}$$

$$\left. \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} \right|^n = -(\nabla \cdot \boldsymbol{F} + \nabla \cdot \boldsymbol{G} + \boldsymbol{Q})^n$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} \right|^n &= -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \boldsymbol{F} + \nabla \cdot \boldsymbol{G} + \boldsymbol{Q})^n = -\frac{2}{\Delta t}[\nabla \cdot (\boldsymbol{F}^{n+\frac{1}{2}} - \boldsymbol{F}^n) + \\ &\quad \nabla \cdot (\boldsymbol{G}^{n+\frac{1}{2}} - \boldsymbol{G}^n) + \boldsymbol{Q}^{n+\frac{1}{2}} - \boldsymbol{Q}^n] \end{aligned}$$

将 $\left. \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} \right|^n, \left. \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} \right|^n$ 的表达式代入式(9),可得

$$\boldsymbol{u}^{n+1} = \boldsymbol{u}^n - \Delta t(\nabla \cdot \boldsymbol{F}^{n+\frac{1}{2}} + \nabla \cdot \boldsymbol{G}^{n+\frac{1}{2}} + \boldsymbol{Q}^{n+\frac{1}{2}})$$

采用标准 Galerkin 加权余量法对上式进行离散:

$$\begin{aligned} \int N^T N d\Omega \Delta \boldsymbol{u}^n &= \Delta t \left[\int \boldsymbol{F}^{n+\frac{1}{2}} \nabla N d\Omega - \int_{\Gamma} N \boldsymbol{F}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \boldsymbol{n} d\Gamma + \int \boldsymbol{G}^{n+\frac{1}{2}} \nabla N d\Omega - \right. \\ &\quad \left. \int_{\Gamma} N \boldsymbol{G}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \boldsymbol{n} d\Gamma - \int N \boldsymbol{Q}^{n+\frac{1}{2}} d\Omega \right] \end{aligned} \tag{10}$$

式中 $\boldsymbol{F}^{n+\frac{1}{2}}, \boldsymbol{G}^{n+\frac{1}{2}}, \boldsymbol{Q}^{n+\frac{1}{2}}$ 分别为 $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{Q}$ 在 $n + \frac{1}{2}$ 时刻的值,可由 $\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}$ 得到

$$\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}} = \boldsymbol{u}^n - \frac{\Delta t}{2}(\nabla \cdot \boldsymbol{F} + \nabla \cdot \boldsymbol{G} + \boldsymbol{Q})^n$$

然后,结合连续性方程(5),压力泊松方程(8)可以离散为

$$\int \frac{1}{\rho} \nabla N^T \nabla N d\Omega \Delta p^n = -\frac{1}{\Delta t} \int N \nabla \cdot \boldsymbol{u}^{*,n} d\Omega - \int \frac{1}{\rho} \nabla N \nabla p d\Omega + \int_{\Gamma-\Gamma_p} \frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1} \cdot \boldsymbol{n} N d\Gamma \tag{11}$$

式中 $\boldsymbol{u}^{*,n} = \boldsymbol{u}^n + \Delta \boldsymbol{u}^{*,n}, \Delta \boldsymbol{u}^{*,n}$ 可通过式(10)得出.

最后,利用压力方程(8)进行速度校正:

$$\int \frac{\rho}{\Delta t} N^T N d\Omega \Delta \boldsymbol{u}^{**} + \int_{\Omega} N^T \nabla p^{n+1} d\Omega = 0 \tag{12}$$

2.2 距离函数 Φ 的求解

记 $\boldsymbol{F}' = \Phi \boldsymbol{u}$, 则方程(1)可写成易于离散的守恒式

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{F}' = 0 \tag{13}$$

可以看出,方程(13)和方程(7)结构相同,因此采用相同的离散格式,可得

$$\int N^T N d\Omega \Delta \Phi^n = \Delta t \left[\int \boldsymbol{F}'^{n+\frac{1}{2}} \nabla N d\Omega - \int_{\Gamma} N \boldsymbol{F}'^{n+\frac{1}{2}} \cdot \boldsymbol{n} d\Gamma \right] \tag{14}$$

2.3 保持 Φ 为距离的函数

对方程(2)进行离散,可得

$$\int N^T N d\Omega \Delta \Phi^n = \Delta \tau \int N S(\Phi^0) [1 - |\nabla \Phi^{n+\frac{1}{2}}|] d\Omega \tag{15}$$

式中 Φ^0 是方程(1)在 t^n 时刻的解.对方程(15)进行虚拟时间步 $\Delta \tau$ 的迭代,直到稳态为止,使得 $\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \rightarrow 0$,则求解得出的 Φ 将和 Φ^0 具有相同的零值面,并且满足 Φ 为距离函数的要求.

按式(3)对 Φ 值进行流体物理特性参数的插值,以备下一步计算之用.

3 数值算例

以矩形刚性容器中流体的大幅晃动^[12]为例,用上述方法模拟横向强迫晃动问题.刚性容器内充液宽度为0.8 m,充液深度为0.3 m,液体密度为 1000 kg/m^3 ,重力加速度为 9.81 m/s^2 .计算区域用四边形等参单元进行离散,速度和压力用同阶线性插值.容器底部输入横向加速度谐波激励 $\ddot{G}_x(t) = 0.01 g \sin(2\pi f_1 t)$,其中 f_1 为液体的一阶晃动频率,取为文献[12]得到的试验值0.89 Hz.在该激励作用下,流体会发生共振反应.图1为本文方法计算得到的流体左、右两侧壁面波高共振反应曲线,图2给出了 $t = 3.62 \text{ s}$, $t = 5.35 \text{ s}$ 时刻的速度场.由图1可以看出,本文计算结果与文献[12]试验结果一致,与文献[13]用分步法、文献[14]用边界元法和有限元法得到的结果也符合得很好.从图中还可以看出,当振幅较小时,由本文方法得到的结果与线性理论得到的结果具有较好的一致性,即波峰和波谷的幅值基本相当,而当振幅增大时,流体的晃动呈现明显的非线性特性,波峰幅值大于波谷幅值,这与试验中观测到的现象相符合.

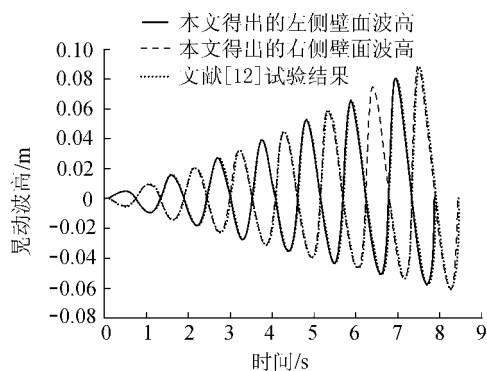
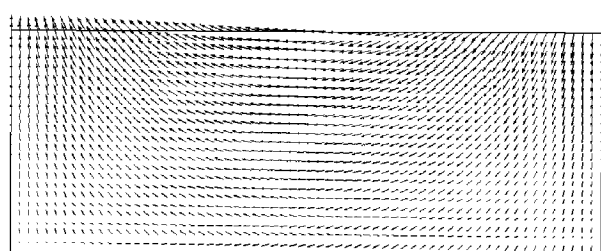
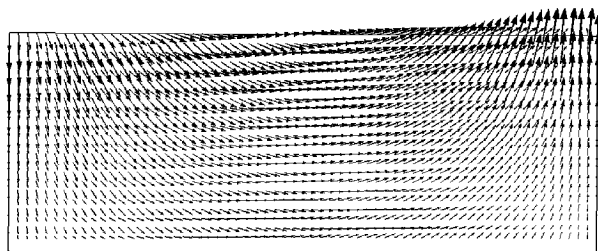


图1 容器壁面晃动波高时间曲线

Fig.1 Time history of sloshing wave height at container wall



(a) $t = 3.62 \text{ s}$



(b) $t = 5.35 \text{ s}$

图2 速度场分布

Fig.2 Distribution of velocity fields

4 结 语

本文将 Level Set 方法引入到刚性容器内流体三维大幅非线性晃动问题中,将外激励视为质量力,将自由面视为水和空气两相介质的交界面,从全 Navier Stokes 方程出发,采用两步 Taylor-Galerkin 方法对控制方程进行离散,导出了利用 Level Set 方法求解三维大幅非线性晃动问题的分步有限元方法.计算结果表明,该方法可以很方便地追踪自由面的位置,较全面地反映流体大幅晃动时的非线性效应,并且具有较高的计算精度和较好的计算稳定性,可以较为真实地描述刚性容器内流体大幅非线性晃动过程.

参考文献:

- [1] 李遇春, 楼梦麟. 渡槽中流体非线性晃动的边界元模拟[J]. 地震工程与工程振动, 2000, 20(6): 51-56.
- [2] QUECEDO M, PASTOR M. A reappraisal of Taylor-Galerkin algorithm for drying-wetting areas in shallow water computations[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2002, 38: 515-531.
- [3] OSHER S, SETHAIN J A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations[J]. Journal of Computational Physics, 1988, 79(1): 12-49.
- [4] SUSSMAN M, SMERKA D, OSHER S. A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow[J]. Journal of Computational Physics, 1994, 114(1): 146-159.
- [5] QUECEDO M, PASTOR M. Application of the level set method to the finite element solution of two-phase flows[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001, 30: 645-664.
- [6] DONEA J. A Taylor-Galerkin method for convective transport problems[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering,

1984 20 :101-109.

- [7] PERAIRE J. A finite element method for convection dominated flow[D]. Swansea : University of Wales , 1986.
- [8] PERAIRE J , ZIENKIEWICZ O C , MORGAN K. Shallow water problems. A general explicit formulation[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering , 1986 22 :547-574.
- [9] ZIENKIEWICZ O C , CODINA R. A general algorithm for compressible and incompressible flow-Part I. The split , characteristic-based scheme[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids , 1995 20 :869-885.
- [10] ZIENKIEWICZ O C , NITHIARASU P , CODINA R , et al. The characteristic-based-split procedure : An efficient and accurate algorithm for fluid problems[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids , 1999 31 :359-392.
- [11] ZIENKIEWICZ O C , ORTIZ P. A split-characteristic based finite element model for the shallow water equations[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids , 1995 20 :1061-1080.
- [12] MUTO K , KASAI Y , NAKAHARE M , et al. Experimental tests on sloshing response of a water pool with submerged blocks[J]. Fluid-Structure Dynamics , 1985 9(7) :209-214.
- [13] 曾江红. 多腔充液自旋系统动力学与液体晃动三维非线性数值研究[D]. 北京 :清华大学工程力学系 , 1996.
- [14] 刘志红 , 黄玉盈. 任意的拉-欧边界元法解大晃动问题[J]. 振动工程学报 , 1993(6) :10-19.

Numerical simulation of nonlinear large-amplitude sloshing of liquid in rigid container

ZHAO Lan-hao¹ , LI Tong-chun¹ , NIU Zhi-wei¹ , M. PASTOR²

(1. College of Water Conservancy and Hydropower Engineering , Hohai University , Nanjing 210098 , China ;

2. CEDEX and E. T. S. de Caminos , Madrid , Spain)

Abstract : A Taylor-Galerkin fractional step method of two steps with the second order accuracy in time and space was developed to deal with the 3-D nonlinear large-amplitude sloshing problem. The calculation coordinates was fixed in the container , and the external excitation was regarded as the mass force. According to the method , the intermediate velocity field neglecting pressure gradient term was obtained explicitly , and then , the velocity field was corrected based on the pressure field obtained from the pressure Poisson equation. Moreover , the Level Set approach was applied to track the free surface implicitly. During this process , the transport equation of the Level Set function was solved in each time step , and the function was reinitialized through the iteration method so that it was maintained as a distance function and the tracking of free surface was realized. The governing equations of the system were discretized by the two-step Taylor-Galerkin method , which was of high accuracy and easy to be carried out. The validity and reliability of the method were proved by two numerical examples.

Key words : rigid container ; large-amplitude sloshing ; Level Set ; two-step Taylor-Galerkin ; step finite element method