第27卷第1期 河 海 大 学 学 报 Vol.27 No.1
1999年1月 JOURNAL OF HOHAI UNIVERSITY Jan.1999

应用非等时空距GM(1,1)模型拟合地下水计算参数

郭存芝 汤瑞凉
(河海大学技术经济学院 南京 210098) (河海大学计划财务处 南京 210098)
陈传美
(河海大学技术经济学院 南京 210098)

摘 要 将非等时空距灰色模型引入地下水计算参数的拟合,给出了浅层地下水资源评价的常用参数给水度、潜水蒸发系数的应用实例及其精度检验,取得了较为满意的计算结果.

关键词 非等时空距;灰色模型;地下水;计算参数;精度检验
中图号 P641.2;O159

地下水计算参数的合理测定和估计是提供较为可靠的地下水资源量计算结果的必要前提,在获得正确可靠的实测资料的基础上,需选择合适的模型和方法.

受各种自然因素与人类活动的影响,地下水资源系统的时空变化十分复杂,是一个没有物理原型的本征灰系统.给水度、降雨入渗补给系数、潜水蒸发系数等浅层地下水资源评价的常用计算参数是一系列随地下水埋深不同而不同的与各种水文地质或水文气象因素作用有关的灰过程.因此,可考虑利用灰色系统理论,由有限实测离散数列建立微分方程型的动态模型,拟合地下水计算参数.

为兼顾实际应用中实测数据序列的埋深等差与非等差两种情形,本文选用具有广泛适用性的非等时空距GM(1,1)模型进行探讨.

1 非等时空距GM(1,1)模型

1.1 非等时空距灰色过程的定义

设某灰色过程 ζ 的原始序列为 $X^{(0)}=\{X^{(0)}(P_i)\mid P_i\in R^+,i=1,2,\cdots,n\}$,并且 $P_{i+1}-P_i>0$,存在 $1\leqslant i<n$ 和 $1\leqslant j<n$,满足 $P_{i+1}-P_i\neq P_{j+1}-P_j$,则称此灰色过程为非等时空距灰色过程,并称 P_i 为过程 ζ 的时空序.

1.2 非等时空距GM(1,1)模型

1.2.1 一般非等时空距GM(1,1)模型

设非等时空距灰色过程序列为

$$X^{(0)}=\{X^{(0)}(P_i)\mid P_i\in R^+,i=1,2,\cdots,n\}$$

由于时空序 P_i 是非等时空距的,当 $\Delta P_i=P_{i+1}-P_i$ 相差不十分悬殊时,可考虑生成新的等时空序 P'_i,使其具有如下特点:(a) P'_i 为等时空距序列,即 $P'_i=b_0+b_1i$,其中 $i\in N$,b_0,b_1 为待定系数;(b) P'_i 与 P_i 有最近距离,即满足 $\sum_{i=1}^{n}[P'_i-P_i]^2$ 为最小.这两个特点满足最小二乘法性质,故 P'_i 可用最小二乘法求得.与 P'_i 对应的灰数值 $X^{(0)}(P'_i)$ 可用插值法求得.由此就生成了灰色过程 ζ 对应于新的等时空序 P'_i 的新灰数序列 $X^{(0)'}=\{X^{(0)}(P'_i)\mid P'_i\in R^+,i=1,2,\cdots,n\}$.对 $X^{(0)'}$ 建模,再还原,可得非等时空距灰色模型.

作1-AGO生成,得

$$X^{(1)'}=\{X^{(1)}(P'_i)\mid X^{(1)}(P'_i)=\sum_{k=1}^{i}X^{(0)}(P'_k),i=1,2,\cdots,n\}$$

GM(1,1)模型为

收稿日期:1998-03-24
第一作者简介 郭存芝,女,博士研究生,技术经济及管理专业,主要从事投资经济研究.

$$\frac{\mathrm{d}X^{(1)'}}{\mathrm{d}P}+aX^{(1)'}=u \tag{1}$$

响应方程为 $\hat{X}^{(1)}(P_i')=[X^{(0)}(P_1')-\hat{u}/\hat{a}]\mathrm{e}^{\hat{a}(1-i)}+\hat{u}/\hat{a}$

这里 $[\hat{a},\hat{u}]^{\mathrm{T}}=(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}Y_n$ $\quad Y_n=[X^{(0)}(P_2'),X^{(0)}(P_3'),\cdots,X^{(0)}(P_n')]^{\mathrm{T}}$

$$B=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}[X^{(1)}(P_2')+X^{(1)}(P_1')] & 1\\ -\frac{1}{2}[X^{(1)}(P_3')+X^{(1)}(P_2')] & 1\\ \square & \square\\ -\frac{1}{2}[X^{(1)}(P_n')+X^{(1)}(P_{n-1}')] & 1\end{bmatrix}$$

作 1-IAGO 成,并将 $i=(P_i'-b_0)/b_1$ 代入,得还原方程为

$$\hat{X}^{(0)}(P_i')=[X^{(0)}(P_1')-\hat{u}/\hat{a}](1-\mathrm{e}^{\hat{a}})\mathrm{e}^{\hat{a}(b_0+b_1-P_i')/b_1}\qquad i=2,3,\cdots,n \tag{2}$$

$$\hat{X}^{(0)}(P_i')=\hat{X}^{(1)}(P_i')\qquad i=1 \tag{3}$$

将式(2)改写为 $X^{(0)}(P_i')=c\mathrm{e}^{-\hat{a}P_i'/b_1}+b$,进行二次参数拟合,求

$$(\hat{c},\hat{b})^{\mathrm{T}}=(D^{\mathrm{T}}D)^{-1}D^{\mathrm{T}}Y$$

其中 $D^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-aP_2/b_1} & \mathrm{e}^{-aP_3/b_1} & \cdots & \mathrm{e}^{-aP_n/b_1}\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}$ $\quad Y=[X^{(0)}(P_2),X^{(0)}(P_3),\cdots,X^{(0)}(P_n)]^{\mathrm{T}}$

可得求解结果

$$\left.\begin{aligned}&\hat{X}^{(0)}(P_i')=\hat{c}\mathrm{e}^{-\hat{a}P_i'/b_1}+\hat{b} && i=2,3,\cdots,n\\ &\hat{X}^{(0)}(P_i')=\hat{X}^{(1)}(P_i') && i=1\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

具体地,若 ζ 为离散过程,有

$$\left.\begin{aligned}&\hat{X}^{(0)}(P_i)=\hat{c}\mathrm{e}^{-\hat{a}P_i/b_1}+\hat{b} && i=2,3,\cdots,n\\ &\hat{X}^{(0)}(P_i)=X^{(0)}(P_1')+[\hat{X}^{(0)}(P_2)-\hat{X}^{(0)}(P_1')](P_i-P_1')/(P_2-P_1') && i=1\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

若 ζ 为连续过程,有

$$\left.\begin{aligned}&\hat{X}^{(0)}(P)=\hat{c}\mathrm{e}^{-\hat{a}P/b_1}+\hat{b} && P\geqslant P_2\\ &\hat{X}^{(0)}(P)=X^{(0)}(P_1')+[\hat{X}^{(0)}(P_2)-\hat{X}^{(0)}(P_1')](P-P_1')/(P_2-P_1') && P<P_2\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

1.2.2 连续型直接 GM(1,1)模型

直接用对 P 具有指数连续性的离散数列(等时空距或非等时空距) $X^{(0)}=\{X^{(0)}(P_i)\mid P_i\in R^+,i=1,2,\cdots,n\}$ 建立 GM(1,1)模型:

$$\frac{\mathrm{d}X^{(0)}}{\mathrm{d}P}+aX^{(0)}=u \tag{7}$$

响应方程为 $\hat{X}^{(0)}(P)=c\mathrm{e}^{-\hat{a}P}+\hat{u}/\hat{a}$

这里 $[\hat{a},\hat{u}]^{\mathrm{T}}=(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}Y_n$ $\quad B=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}[X^{(0)}(P_2)+X^{(0)}(P_1)] & 1\\ -\frac{1}{2}[X^{(0)}(P_3)+X^{(0)}(P_2)] & 1\\ \square & \square\\ -\frac{1}{2}[X^{(0)}(P_n)+X^{(0)}(P_{n-1})] & 1\end{bmatrix}$

$$Y_n=\left[\frac{X^{(0)}(P_2)-X^{(0)}(P_1)}{P_2-P_1},\frac{X^{(0)}(P_3)-X^{(0)}(P_2)}{P_3-P_2},\cdots,\frac{X^{(0)}(P_n)-X^{(0)}(P_{n-1})}{P_n-P_{n-1}}\right]^{\mathrm{T}}$$

将响应方程改写为 $\hat{X}^{(0)}(P)=c\mathrm{e}^{-\hat{a}P}+b$,用原始数列 $X^{(0)}(P)$ 及 $\hat{a}$ 来估计 c 和 b,其中

$$(\hat{c},\hat{b})=(D^{\mathrm{T}}D)^{-1}D^{\mathrm{T}}Y\qquad Y=[X^{(0)}(P_1),X^{(0)}(P_2),\cdots,X^{(0)}(P_n)]^{\mathrm{T}}$$

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-\hat{a}P_1} & \mathrm{e}^{-\hat{a}P_2} & \cdots & \mathrm{e}^{-\hat{a}P_n}\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

这样,经两次参数拟合可得

$$\hat{X}^{(0)}(P) = \hat{c}e^{-\hat{a}P} + \hat{b} \tag{8}$$

2　非等时空距 GM(1,1)模型的应用

现以山西省大同市平原区为例,应用非等时空距 GM(1,1)模型,确定对应于不同的地下水埋深 Δ 的地下水计算参数——给水度 $\mu(\Delta)$和潜水蒸发系数 $C(\Delta)$. 引用河海大学、大同市水资源管理委员会办公室科研报告' 缺水城市地下水超采前景分析与对策 '中的有关数据资料如表 1 所示.

表 1　大同市平原区 $\mu(\Delta)$和 $C(\Delta)$资料

Table 1　Data of $\mu(\Delta)$ and $C(\Delta)$ in plain region of Datong City

Δ/m	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	Δ/m	0.0	1.5	2.0	3.5	6.0
$\mu(\Delta)$	0.000	0.017	0.034	0.052	0.070	$C(\Delta)$	1.000	0.040	0.030	0.015	0.000

注 :该区岩土最细毛管水最大上升高度为 2.0 m,2.0 m 以下 $\mu(\Delta)$为常值 0.070,这里只考虑 2.0 m 以上的情形.

2.1　给水度 $\mu(\Delta)$的确定

利用连续型直接 GM(1,1)模型,先求

$$[\hat{a},\hat{u}]^{\mathrm{T}} = (B^{\mathrm{T}},B)^{-1}B^{\mathrm{T}}Y_n$$

这里 $B^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -0.0085 & -0.0255 & -0.0430 & -0.0610 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$　　$Y_n = [0.034 \quad 0.034 \quad 0.036 \quad 0.036]^{\mathrm{T}}$

得模型

$$X^0(P) = ce^{0.045706823P} + b$$

再求

$$[\hat{c},\hat{b}]^{\mathrm{T}} = (D^{\mathrm{T}}D)^{-1}D^{\mathrm{T}}Y$$

其中

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1.023116551 & 1.046767478 & 1.070965132 & 1.095722153 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y = [0 \quad 0.017 \quad 0.034 \quad 0.052 \quad 0.070]^{\mathrm{T}}$$

最终得给水度模型为

$$\mu(\Delta) = 0.731331005e^{0.045706823\Delta} - 0.731333388 \tag{9}$$

2.2　潜水蒸发系数 $C(\Delta)$的确定

采用一般非等时空距 GM(1,1)模型,$C(\Delta)$的等时空距生成序列为

$$P' = \{-0.2,1.2,2.6,4.0,5.4\}$$

$$X^{(0)'} = \{1.1280,0.0460,0.0240,0.0120,0.0036\}$$

作 1-AGO 生成,求$[\hat{a},\hat{u}] = (B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}Y_n$

这里

$$B^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -0.1510 & -1.1860 & -1.2040 & -1.2118 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y_n = [0.0460 \quad 0.0240 \quad 0.0120 \quad 0.0036]^{\mathrm{T}}$$

得 $X^{(0)}(P_i') = ce^{-0.484624155P_i'} + b$. 进行二次参数拟合,求

$$(\hat{c},\hat{b}) = (D^{\mathrm{T}}D)^{-1}D^{\mathrm{T}}Y$$

其中

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0.483387711 & 0.379368098 & 0.183381877 & 0.054598715 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y = [0.04 \quad 0.03 \quad 0.015 \quad 0]^{\mathrm{T}}$$

最终得潜水蒸发系数模型为

$$\left.\begin{aligned} C(\Delta) &= 0.090545035e^{-0.484624155\Delta} - 0.003666554 && \Delta \geqslant 1.5\,\mathrm{m} \\ C(\Delta) &= 1.000011977 - 0.639940116\Delta && \Delta < 1.5\,\mathrm{m} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

3　精 度 检 验

采用灰色模型常用的精度检验方法——后验差检验法对上述求得的给水度灰色模型、潜水蒸发系数灰色模型进行精度检验. 对应于不同地下水埋深的给水度 $\mu(\Delta)$、潜水蒸发系数 $C(\Delta)$的原始值、计算值及残差列于表 2.

表2 $\mu(\Delta)$,$C(\Delta)$原始值、计算值及残差

Table 2 Original values, calculated values and differences of $\mu(\Delta)$ and $C(\Delta)$

Δ_i/m	$\mu(\Delta_i)$	$\hat{\mu}(\Delta_i)$	$e_\mu(i)$	Δ_i/m	$C(\Delta_i)$	$\hat{C}(\Delta_i)$	$e_C(i)$
0.0	0.000	-0.000002383	0.000002383	0.0	1.000	1.000011977	-0.000011977
0.5	0.017	0.016903468	0.000096532	1.5	0.040	0.040101803	-0.000101803
1.0	0.034	0.034200124	-0.000200124	2.0	0.030	0.030683344	-0.000683344
1.5	0.052	0.051896618	0.000103382	3.5	0.015	0.012937764	0.002062236
2.0	0.070	0.070002195	-0.000002195	6.0	0.000	0.001277089	-0.001277089

后验差比值
$$C_\mu = S_{e_\mu}/S_\mu = 0.002955006$$
$$C_C = S_{e_C}/S_C = 0.001957478$$
小误差概率
$$P_\mu = P\{|e_\mu(i) - \bar{e}_u| < 0.6745 S_\mu\} = 100\%$$
$$P_C = P\{|e_C(i) - \bar{e}_C| < 0.6745 S_C\} = 100\%$$
式中:S_μ,S_{e_μ},S_C,S_{e_C}——$\mu(\Delta)$,$C(\Delta)$的原始值序列及残差序列的标准差.

一般地,模型的精度等级划分如表3所示.

表3 模型精度等级判别[2]

Table 3 Precision level criterion of model

检验参数	1级(好)	2级(合格)	3级(勉强)	4级(不合格)
小误差概率 P	$0.95 \leqslant P$	$0.80 \leqslant P < 0.95$	$0.70 \leqslant P < 0.80$	$P < 0.70$
后验差比值 C	$C \leqslant 0.35$	$0.35 < C \leqslant 0.50$	$0.50 < C \leqslant 0.65$	$0.65 < C$

注 模型精度级别 = max{P所在的级别,C所在的级别}.

由此可见,给水度灰色模型与潜水蒸发系数灰色模型的精度都属于1级(好),且都明显优于1级(好)与2级(合格)的小误差概率P与后验差比值C的分界点95%,0.35.

4 结 语

本文尝试将灰色模型引入浅层地下水计算参数的拟合,取得了满意的计算结果,为水文及水文地质参数的估算以及地下水资源的评价提供了一种新方法.不足之处敬请指正.

参 考 文 献

1 邓聚龙.灰色系统理论教程.武汉:华中理工大学出版社,1990.428
2 傅立.灰色系统理论及其应用.北京:科学技术文献出版社,1992.58~60,89~93
3 孙虎元,魏绪钧.非等间隔灰色模型及应用.应用基础与工程科学学报,1996,4(4):407~411

Application of Non-equal Interval Grey Model to Determination of Parameters for Groundwater Resource Computation

Guo Cunzhi
(*College of Technical Economics*, *Hohai Univ.*, *Nanjing* 210098)
Tang Ruiliang
(*Department of Finance*, *Hohai Univ.*, *Nanjing* 210098)
Chen Chuanmei
(*College of Technical Economics*, *Hohai Univ.*, *Nanjing* 210098)

Abstract The non-equal interval grey model is used to determine the paramaters of ground-water resource computation in this paper. Examples for the frequently used parameters-specific yield and coefficient of phreatic evaporation are given. The examination of precision is included in the paper, and the calculation results show the effectiveness of the model.

Key words non-equal interval; grey model; groundwater; computation parameters; precision examination