

一类半线性反应扩散方程组解的整体存在和有限爆破

修宗湖,陈才生

(河海大学理学院,江苏 南京 210098)

摘要 通过构造上下解的方法,给出了由 3 个方程组成的反应扩散方程组的齐次边界问题在 $p_1p_2p_3 < m_1m_2m_3$ 和 $p_1p_2p_3 > m_1m_2m_3$ 条件下,其非负解整体存在和有限爆破的充分条件,并考虑了参数 α, β, γ 及区域形状对其解性质的影响. 所得结果可以推广到 n 个方程的情况.

关键词 半线性反应扩散方程组; 整体存在; 有限爆破; 齐次边界

中图分类号 O175.29 **文献标识码** A **文章编号** 1000-198X(2005)03-0350-04

半线性反应扩散系统又称为牛顿渗流系统,由于其在牛顿流体理论及生物、化学等方面的广泛应用,近年来,对其解的结构研究发展迅速,也取得了许多成果. 文献 [1, 2] 分别研究了 Fujita 型问题即式 (1) 在无界和有界区域上的初边值问题:

$$u_t = \Delta u + v^p \quad v_t = \Delta v + u^q \tag{1}$$

文献 [3, 4] 研究了问题

$$u_t = \Delta u + u^{p_1}v^{q_1} \quad v_t = \Delta v + u^{p_2}v^{q_2} \tag{2}$$

在有界和无界区域上的 Dirichlet 问题. 在此基础上,文献 [5] 研究了

$$u_t = \Delta u + v^p e^u \quad v_t = \Delta v + u^q e^v \tag{3}$$

在有界区域上的初边值问题. 本文考虑了式 (3) 的退化形式,并推广到 3 个方程的情况,即系统

$$u_t = \Delta u^{m_1} + v^{p_1}e^{au} \quad v_t = \Delta v^{m_2} + w^{p_2}e^{\beta v} \quad w_t = \Delta w^{m_3} + u^{p_3}e^{\gamma w} \tag{4}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad v(x, 0) = v_0(x) \quad w(x, 0) = w_0(x) \quad x \in \bar{\Omega} \tag{5}$$

$$u(x, t) = v(x, t) = w(x, t) = 0 \quad x \in \partial\Omega \tag{6}$$

其中 $\Omega \in \mathbf{R}^N$, 有光滑边界 $\partial\Omega$; 参数 $m_i \geq 1, p_i \geq 0 (i = 1, 2, 3)$; $u_0(x), v_0(x), w_0(x)$ 是 Ω 上的非负连续函数; $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$.

1 解的整体存在性

首先不加证明地给出下面的引理.

引理 1 如果 $p_1p_2p_3 < m_1m_2m_3$, 则对任意的 $a_i, b_i > 0 (i = 1, 2, 3)$ 存在充分大的正数 N_1, N_2, N_3 , 满足 $a_1N_1^{m_1} > b_2N_2^{p_1}, a_2N_2^{m_2} > b_3N_3^{p_2}, a_3N_3^{m_3} > b_1N_1^{p_3}$.

定理 1 如果 $p_1p_2p_3 < m_1m_2m_3, \alpha, \beta, \gamma \leq 0$, 那么问题式 (4)~(6) 整体解存在.

证明 令 $\phi(x)$ 是问题 $\Delta\phi = \lambda_0, \phi = 0, \partial\phi/\partial\eta = 1, x \in \partial\Omega$ 的解, 其中 η 是外法向量, 且满足 $c_1 \leq \phi(x) \leq c_2, |\nabla u| \leq c_3, c_i > 0 (i = 1, 2, 3)$. 构造下列形式的上解: $\bar{u}(x, t) = \frac{N_1}{A + \phi}, \bar{v}(x, t) = \frac{N_2}{A + \phi}, \bar{w}(x, t) = \frac{N_3}{A + \phi}, N_i (i = 1, 2, 3)$ 是充分大的正数. 记 $A = \max\{K(m_1 + 1)c_3^2\lambda_0^{-1} - c_1, K(m_2 + 1)c_3^2\lambda_0^{-1} - c_1, K(m_3 + 1)c_3^2\lambda_0^{-1} - c_1\}$, K 是足够大的正数, 满足 $K(A + c_1)^{m_i+1} \geq (A + c_2)^{m_i+1} (i = 1, 2, 3)$. 在引理 1 中不妨令 $a_i = \{1(A + c_2)^{m_i+1} - 1\} / [K(A + c_1)^{m_i+1}]$, $b_i = 1(A + c_1)^{p_i} (i = 1, 2, 3)$. 因为 N_i 可以充分大, 由引理 1 知必有下面 3 个不等式成立:

$$\begin{cases} \{1(A+c_2)^{m_1+1}-1[K(A+c_1)^{m_1+1}]\}m_1N_1^{m_1}\lambda_0\geq N_2^{p_1}(A+c_1)^{p_1} \\ \{1(A+c_2)^{m_2+1}-1[K(A+c_1)^{m_2+1}]\}m_2N_2^{m_2}\lambda_0\geq N_3^{p_2}(A+c_1)^{p_2} \\ \{1(A+c_2)^{m_3+1}-1[K(A+c_1)^{m_3+1}]\}m_3N_3^{m_3}\lambda_0\geq N_1^{p_3}(A+c_1)^{p_3} \end{cases} \quad (7)$$

计算可得

$$\begin{aligned} \Delta \bar{u}^{m_1} &\leq -\{1(A+c_2)^{m_1+1}-1[K(A+c_1)^{m_1+1}]\}m_1N_1^{m_1}\lambda_0 \\ \Delta \bar{v}^{m_2} &\leq -\{1(A+c_2)^{m_2+1}-1[K(A+c_1)^{m_2+1}]\}m_2N_2^{m_2}\lambda_0 \\ \Delta \bar{w}^{m_3} &\leq -\{1(A+c_2)^{m_3+1}-1[K(A+c_1)^{m_3+1}]\}m_3N_3^{m_3}\lambda_0 \end{aligned}$$

那么由式(7)中的3个不等式知,必有

$$\begin{aligned} \bar{v}^{p_1} &\leq N_2^{p_1}(A+c_1)^{p_1} \leq \{1(A+c_2)^{m_1+1}-1[K(A+c_1)^{m_1+1}]\}m_1N_1^{m_1}\lambda_0 \\ \bar{w}^{p_1} &\leq N_3^{p_2}(A+c_1)^{p_2} \leq \{1(A+c_2)^{m_2+1}-1[K(A+c_1)^{m_2+1}]\}m_2N_2^{m_2}\lambda_0 \\ \bar{u}^{p_1} &\leq N_1^{p_3}(A+c_1)^{p_3} \leq \{1(A+c_2)^{m_3+1}-1[K(A+c_1)^{m_3+1}]\}m_3N_3^{m_3}\lambda_0 \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} \bar{u}_t = 0 &\geq \Delta \bar{u}^{m_1} + \bar{v}^{p_1} \geq \Delta \bar{u}^{m_1} + \bar{v}^{p_1}e^{\bar{u}} & \bar{v}_t = 0 &\geq \Delta \bar{v}^{m_2} + \bar{w}^{p_2} \geq \Delta \bar{v}^{m_2} + \bar{w}^{p_2}e^{\bar{v}} \\ \bar{w}_t = 0 &\geq \Delta \bar{w}^{m_3} + \bar{u}^{p_3} \geq \Delta \bar{w}^{m_3} + \bar{u}^{p_3}e^{\bar{w}} \end{aligned}$$

而且 N_1, N_2, N_3 可以充分大,因此有

$$\bar{u} = \bar{u}(x, 0) \geq u_0(x) \quad \bar{v} = \bar{v}(x, 0) \geq v_0(x) \quad \bar{w} = \bar{w}(x, 0) \geq w_0(x)$$

此外,显然有 $\bar{u} \geq 0, \bar{v} \geq 0, \bar{w} \geq 0, x \in \partial\Omega$. 则 $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ 是式(4)~(6)的一个上解,且与 t 无关,由比较原理知 $(u, v, w) \leq (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) (0 \leq t < \infty)$ 是其一个下解,则由文献[6]和式(4)~(6)的解整体存在. 证毕.

受文献[5]启发,给出引理2.

引理2 如果存在3个正数 a, b, c ,使得下面不等式成立:

$$\begin{cases} a^{m_1} \geq b^{p_1}(1+\varphi)^{p_1/m_2}e^{a(1+\varphi)^{1/m_2}} \\ b^{m_2} \geq c^{p_2}(1+\varphi)^{p_2/m_3}e^{b(1+\varphi)^{1/m_3}} \\ c^{m_3} \geq a^{p_3}(1+\varphi)^{p_3/m_1}e^{c(1+\varphi)^{1/m_1}} \end{cases} \quad (8)$$

$$a\varphi^{1/m_1} \geq u_0(x) \quad b\varphi^{1/m_2} \geq v_0(x) \quad c\varphi^{1/m_3} \geq w_0(x) \quad (9)$$

则问题式(4)~(6)有上解, φ 是下面问题的解:

$$\Delta \varphi = -1(x \in \Omega), \varphi = 0(x \in \partial\Omega), \varphi > 0(x \in \Omega) \quad (10)$$

证明 取 $\bar{u} = a(1+\varphi)^{1/m_1}, \bar{v} = b(1+\varphi)^{1/m_2}, \bar{w} = c(1+\varphi)^{1/m_3}$,容易验证 $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ 是上解,证毕.

定理2 如果 $p_1p_2p_3 > m_1m_2m_3$,则只要初值 $u_0(x), v_0(x), w_0(x)$ 适当小,问题式(4)~(6)有整体解存在.

证明 取 $\bar{u} = a(1+\varphi)^{1/m_1}, \bar{v} = b(1+\varphi)^{1/m_2}, \bar{w} = c(1+\varphi)^{1/m_3}$,由引理2,要证明式(4)~(6)存在整体解,只需证明能找到3个正数 a, b, c 使得式(8)和式(9)成立.不妨令 $K_0 = \sup_{x \in \Omega} \{1+\varphi\}$,下面分3种情况讨论.

a. 当 $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ 时,需要验证式(11)成立:

$$a^{m_1} \geq b^{p_1}K_0^{p_1/m_2}e^{acK_0^{1/m_3}} \quad b^{m_2} \geq c^{p_2}K_0^{p_2/m_3}e^{\beta aK_0^{1/m_1}} \quad c^{m_3} \geq a^{p_3}K_0^{p_3/m_1}e^{\gamma bK_0^{1/m_2}} \quad (11)$$

不妨取 $b = a^{m_1/p_1}/[K_0^{1/m_2}e^{(ac/p_1)K_0^{1/m_3}}], c = b^{m_2/p_2}/[K_0^{1/m_3}e^{(\beta a/p_2)K_0^{1/m_1}}]$,则 $c = a^{m_1m_2/(p_1p_2)}/[K_0^{(1/m_3+1/m_2)}e^{K_1}]$,那么对于式(11)只需要验证下式成立:

$$\begin{aligned} 1/[K_0^{(1+m_3/p_2)}e^{m_3K_1}] &\geq a^{(p_1p_2p_3-m_1m_2m_3)(p_1p_2)K_0^{p_3/m_1}e^{K_2}} \\ K_1 &= m_2acK_0^{1/m_3}(p_1p_2) + \beta aK_0^{1/m_1}/p_2 \\ K_2 &= \gamma a^{m_1/p_1}e^{(-acK_0^{1/m_3}/p_1)} \end{aligned}$$

令 $a > 0$ 充分小,即 $a \rightarrow 0^+$,则等价于 $1/[K_0^{(1+m_3/p_2)}e^{(m_2m_3ac(p_1p_2))}] \geq 0$ 显然成立,也即可以找到这样的3个正数 a, b, c 使得式(11)成立,而 u_0, v_0, w_0 可以适当小,因此引理2中两式成立.

b. 当 $\alpha, \beta, \gamma < 0$ 时,仅需验证式(12)成立:

$$a^{m_1} \geq b^{p_1}K_0^{p_1/m_2} \quad b^{m_2} \geq c^{p_2}K_0^{p_2/m_3} \quad c^{m_3} \geq a^{p_3}K_0^{p_3/m_1} \quad (12)$$

同上可证.

c. 当 $\alpha\beta\gamma < 0$ 且 $\max\{\alpha, \beta, \gamma\} > 0$ 时, 由 a 和 b 的证明过程分别讨论可证.

2 解的有限爆破

对于问题式(4)~(6)解的爆破性证明, 本文采取了构造爆破下解的方法, 给出了其解有限爆破的充分条件, 即下面的定理.

定理 3 无论 $p_1 p_2 p_3 < m_1 m_2 m_3$ 还是 $p_1 p_2 p_3 > m_1 m_2 m_3$, 只要 Ω 是厚的即 Ω 包含了一个足够大的球, $\alpha, \beta, \gamma > 0, m_i > 1 (i = 1, 2, 3)$ 则当 $u_0(x), v_0(x), w_0(x)$ 适当大时, 式(4)~(6)的解必有限爆破.

证明 令 $g(t)$ 是问题

$$g'(t) = \varepsilon g^\gamma(t) \quad g(0) = g_0 \quad (t > 0, r > 1) \quad (13)$$

的解, 其中 $\varepsilon > 0$ 可以适当小, g_0 足够大使得 $g(t)$ 有限爆破. 令 $B_K = \{x \in \mathbf{R}^N \mid |x| < k, k \in \mathbf{R}^+\}$, 在 B_1 中取函数 $\phi_1(x)$ 且满足条件 $\phi_1(x) \in C^2(\bar{B}_1), \phi_1(x) > 0 (x \in B_1), \phi_1(x) = 0 (x \in \partial B_1)$, 且当 $\phi_1(x) \leq c_1$ 时令 $\phi_k(x) = \phi_1\left(\frac{x}{k}\right)$, 则 $\phi_k(x)$ 必满足条件: $\phi_k(x): B_k \rightarrow \mathbf{R}^+, \phi_k(x) > 0 (x \in B_k), \phi_k(x) = 0 (x \in \partial B_k)$, 且当 $x \in \{x \in B_k \mid \phi_k(x) \leq c_1\}$ 时 $\Delta \phi_k(x) \geq \sigma/k^2$, 当 $x \in \{x \in B_k \mid \phi_k(x) > c_1\}$ 时 $\Delta \phi_k(x) \geq -l/k^2$, 其中 $-l = \inf \Delta \phi_1(x) (x \in B_1)$. 构造如下形式的下解: $\underline{u}(x, t) = g^n(t) \phi_k^{1/m_1}, \underline{v}(x, t) = g^{n_2}(t) \phi_k^{1/m_2}, \underline{w}(x, t) = g^{n_3}(t) \phi_k^{1/m_3}$, 其中 $g(t)$ 由式(13)定义. n_i 满足 $1/m_i < n_i \leq 1 (i = 1, 2, 3)$, 此时令 $1 < r \leq \min\{m_1 n_1, m_2 n_2, m_3 n_3\}$, 为证明 $(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$ 是下解, 需验证:

$$\underline{u}_t \leq \Delta \underline{u}^{m_1} + \underline{v}^{p_1} e^{\alpha \underline{u}} \quad \underline{v}_t \leq \Delta \underline{v}^{m_2} + \underline{w}^{p_2} e^{\beta \underline{u}} \quad \underline{w}_t \leq \Delta \underline{w}^{m_3} + \underline{u}^{p_3} e^{\gamma \underline{v}} \quad (14)$$

也即验证下面3式:

$$\begin{aligned} n_1 \varepsilon g^{n_1-1}(t) \phi_k^{1/m_1} &\leq g^{(m_1 n_1 - r)}(t) \Delta \phi_k + g^{(p_1 n_2 - r)}(t) \phi_k^{p_1/m_2} e^{(\alpha g^n(t)) \phi_k^{1/m_3}} \\ n_2 \varepsilon g^{n_2-1}(t) \phi_k^{1/m_2} &\leq g^{(m_2 n_2 - r)}(t) \Delta \phi_k + g^{(p_2 n_3 - r)}(t) \phi_k^{p_2/m_3} e^{(\beta g^n(t)) \phi_k^{1/m_1}} \\ n_3 \varepsilon g^{n_3-1}(t) \phi_k^{1/m_3} &\leq g^{(m_3 n_3 - r)}(t) \Delta \phi_k + g^{(p_3 n_1 - r)}(t) \phi_k^{p_3/m_1} e^{(\gamma g^n(t)) \phi_k^{1/m_2}} \end{aligned}$$

也即验证下面式(15)和式(16)成立:

$$\begin{cases} n_1 \varepsilon g^{n_1-1}(t) c_1^{1/m_1} \leq g^{m_1 n_1 - r}(t) \sigma/k^2 \\ n_2 \varepsilon g^{n_2-1}(t) c_1^{1/m_2} \leq g^{m_2 n_2 - r}(t) \sigma/k^2 \\ n_3 \varepsilon g^{n_3-1}(t) c_1^{1/m_3} \leq g^{m_3 n_3 - r}(t) \sigma/k^2 \end{cases} \quad (15)$$

其中 $x \in \{x \in B_k \mid \phi_k(x) \leq c_1, \Delta \phi_k \geq \sigma/k^2\}$.

$$\begin{cases} n_1 \varepsilon g^{n_1-1}(t) c_2^{1/m_1} \leq g^{m_1 n_1 - r}(t) \left(-l/k^2 + g^{p_1 n_2 - m_1 n_1}(t) c_1^{p_1/m_2} e^{\alpha g^n(t) c_1^{1/m_3}} \right) \\ n_2 \varepsilon g^{n_2-1}(t) c_2^{1/m_2} \leq g^{m_2 n_2 - r}(t) \left(-l/k^2 + g^{p_2 n_3 - m_2 n_2}(t) c_1^{p_2/m_3} e^{\alpha g^n(t) c_1^{1/m_1}} \right) \\ n_3 \varepsilon g^{n_3-1}(t) c_2^{1/m_3} \leq g^{m_3 n_3 - r}(t) \left(-l/k^2 + g^{p_3 n_1 - m_3 n_3}(t) c_1^{p_3/m_1} e^{\alpha g^n(t) c_1^{1/m_2}} \right) \end{cases} \quad (16)$$

其中 $x \in \{x \in B_k \mid \phi_k(x) > c_1, \Delta \phi_k \geq -l/k^2\}$. 要验证式(15), 只需验证式(17)成立.

$$\begin{cases} n_1 \varepsilon g^{n_1-1}(0) c_1^{1/m_1} \leq g^{m_1 n_1 - r}(0) \sigma/k^2 \\ n_2 \varepsilon g^{n_2-1}(0) c_1^{1/m_2} \leq g^{m_2 n_2 - r}(0) \sigma/k^2 \\ n_3 \varepsilon g^{n_3-1}(0) c_1^{1/m_3} \leq g^{m_3 n_3 - r}(0) \sigma/k^2 \end{cases} \quad (17)$$

易见, 一旦 k 取定, 只要 ε 充分小, 那么式(17)总是可以成立的. 不妨令 $l/k^2 \leq 1/2 \min\{H_1 c_1^{p_1/m_2}, H_2 c_1^{p_2/m_3}, H_3 c_1^{p_3/m_1}\}$, 其中 H_1, H_2, H_3 满足: $H_1 \leq e^{\alpha x^{n_3} c_1^{1/m_3}}/x^{m_1 n_1 - p_1 n_2}, H_2 \leq e^{\beta x^{n_1} c_1^{1/m_1}}/x^{m_2 n_2 - p_2 n_3}, H_3 \leq e^{\gamma x^{n_2} c_1^{1/m_2}}/x^{m_3 n_3 - p_3 n_1}, x \geq g_0$, 则式(16)等价于

$$\begin{cases} n_1 \varepsilon g_0^{(n_1-1)} c_2^{1/m_1} \leq 1/\chi g_0^{(m_1 n_1 - r)} H_1 c_1^{p_1/m_2} \\ n_2 \varepsilon g_0^{(n_2-1)} c_2^{1/m_2} \leq 1/\chi g_0^{(m_2 n_2 - r)} H_2 c_1^{p_2/m_3} \\ n_3 \varepsilon g_0^{(n_3-1)} c_2^{1/m_3} \leq 1/\chi g_0^{(m_3 n_3 - r)} H_3 c_1^{p_3/m_1} \end{cases} \quad (18)$$

显然,当 k 满足上面条件后,令 ε 适当小,则式(18)可以成立,则由上知式(16)是成立的.因此式(14)是成立的.

由于 u_0, v_0, w_0 可以适当大,因此总有下式成立:

$$\underline{u}(x, 0) \leq u_0, \quad \underline{v}(x, 0) \leq v_0, \quad \underline{w}(x, 0) \leq w_0, \quad x \in \Omega$$

显然有 $\underline{u} = \underline{v} = \underline{w} = 0, x \in \partial\Omega$, 则由上所证及下解的定义知 $(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$ 是式(4)~(6)的爆破下解,由比较原理知式(4)~(6)的解有限爆破.

参考文献:

- [1] ESCOBEDO M, HERREO M A. Boundness and blow up for a semilinear reaction-diffusion system[J]. Journal Diffusion Equations, 1991, 89: 176—202.
- [2] HERREO M A. A semilinear parabolic system in a bounded domain[J]. Knnali di Mathematica Puraed Application, 1993, CLXV: 315—336.
- [3] WANG M X. Global existence and finite blow up for a reaction-diffusion system[J]. ZAMP, 2000, 51: 160—167.
- [4] ESCOBEDO M, LEVINE H A. Critical blow up and global existence numbers for a weakly coupled system of reaction-diffusion equation [J]. Arch Rat Mech Analysis, 1995, 129: 47—100.
- [5] JULIO D R, NOEMI W. Blow up and global existence for a semilinear reaction-diffusion system in a bounded domain[J]. Partial Diffusion Equations, 1995, 20(11, 12): 1991—2004.
- [6] PAO C V. Nonlinear parabolic and elliptic equations[M]. New York: Plenum Press, 1992. 47—92.

Global existence and finite blow up for a kind of semilinear reaction-diffusion system

XIU Zong-hu, CHEN Cai-sheng

(College of Sciences, Hohai Univ., Nanjing 210098, China)

Abstract :By use of the upper and lower solution method, the sufficient condition was given for the global existence and finite blow up of non-negative solutions to the homogeneous boundary problem of the semilinear reaction-diffusion system consisting of three equations under the condition of $p_1 p_2 p_3 < m_1 m_2 m_3$ and $p_1 p_2 p_3 > m_1 m_2 m_3$, with the parameters α , β , and γ and the shape of the bounded domain taken into account. The results obtained can be extended to the system consisting of n equations.

Key words :semilinear reaction-diffusion system; global existence; finite blow-up; homogeneous boundary