随机投入产出模型研究

吴和成, 郑垂勇

(1. 河海大学商学院, 江苏 南京 210098; 2. 河海大学东部资源环境与持续发展研究中心, 江苏 南京 210098)

摘要: 研究基于给定可靠性下产出量的控制方程. 在随机投入产出方程中, 当直接消耗系数和最终需求为指数型随机变量时, 方程中随机变量分布中参数间的关系有 3 种基本情况: 所有参数都相等、所有参数两两不相等、有部分相等而其余则两两不相等. 实际上, 前 2 种情况是第 3 种情况的特殊形式. 运用独立随机变量和的分布理论, 基于直接消耗系数和最终需求分布参数间的第 3 种关系, 导出了随机投入产出模型中产出量所满足的方程.

关键词: 投入产出模型; 随机变量; 指数分布; 确定性等价方程

中图分类号: F222.1 文献标识码: A 文章编号: 1000-1980(2005)03-0347-03

由于社会经济活动的复杂性, 用确定性的量来描述多变但又有一定规律性的现象是困难的. 因此, 研究随机投入产出模型是必要的. 随机投入产出模型可表示为

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \dots + A_{1n}x_n + Y_1 = x_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \dots + A_{2n}x_n + Y_2 = x_2 \\ \dots \\ A_{n1}x_1 + A_{n2}x_2 + \dots + A_{nn}x_n + Y_n = x_n \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

式中: A_{ij} ——直接消耗系数; Y_i ——对部门 i 产出的最终需求价值; x_i ——部门 i 的产出价值. 它们均为随机变量.

具有直观经济意义的随机投入产出模型的形式为

$$\begin{cases} P\{A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \dots + A_{1n}x_n + Y_1 \leq x_1\} = 1 - \alpha_1 \\ P\{A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \dots + A_{2n}x_n + Y_2 \leq x_2\} = 1 - \alpha_2 \\ \dots \\ P\{A_{n1}x_1 + A_{n2}x_2 + \dots + A_{nn}x_n + Y_n \leq x_n\} = 1 - \alpha_n \end{cases} \quad \alpha_i \in [0, 1] \quad (2)$$

式(2)的意义在于其第 i 个方程表示部门 i 的产出满足中间需求和最终需求的可能性为 $(1 - \alpha_i)\%$.

为讨论方便, 记 $Y_i = A_{in+1}x_{n+1}$, 这里 $x_{n+1} \equiv 1$. 对于直接消耗系数和最终需求的分布, 文献[1, 2]讨论了

指数型的情形. 设 A_{ij} 的分布密度函数为 $f_{A_{ij}}(u_{ij}) = \begin{cases} \lambda_{ij}e^{-\lambda_{ij}u_{ij}} & u_{ij} \geq 0 \\ 0 & u_{ij} < 0 \end{cases} (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n+1)$, 且对固

定的 i, A_{ij} 之间相互独立. 记 $B_{ij} = A_{ij}x_j$, 则 B_{ij} 服从参数为 λ_{ij}/x_j 的指数分布, 且相互独立. 记 $\mu_{ij} = \lambda_{ij}/x_j (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n+1)$. 文献[3~5]从不同角度研究了随机投入产出模型中的某些问题. 文献[2]针对 μ_{ij} 的两种特殊情形, 即在 μ_{ij} 之间要么全相等, 要么两两不相等的条件下, 导出了式(2)中每个 x_i 所满足的代数方程. 实际上, μ_{ij} 之间有部分相等, 而其余的两两不相等则更为符合实际, 且这种情况包含了文献[2]中讨论 μ_{ij} 的两种特殊情形. 本文将就此情形导出(2)中每个 x_i 所满足的代数方程.

1 主要结果

设 A_{ij} 服从参数为 $\lambda_{ij} (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n+1)$ 的指数分布, 对于 $1 \leq j, l \leq n-k+1 (1 \leq k \leq n)$, 若 $j \neq l$, 有 $\mu_{ij} \neq \mu_{il}$, 又设 $\mu_{in-k+2} = \mu_{in-k+3} = \dots = \mu_{in+1} = \mu_i, \alpha_i \in [0, 1]$, 则式(2)的第 i 个方程中 $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$

... , m)所满足的代数方程为

$$\mu_i^k \prod_{j=1}^{n+1-k} \mu_{ij} \left\{ \prod_{j=1}^{n+1-k} (\mu_{ij} - \mu_i)^{-1} \left[\sum_{r=1}^k (-1)^{k-r} \sum_{s_j \in \emptyset \cup N, \sum_{j=1}^{n+1-k} s_j} \prod_{j=1}^{n+1-k} (\mu_{ij} - \mu_i)^{s_j} \int_0^{x_i} \frac{y^{r-1}}{(r-1)!} dy \right] + (-1)^k \sum_{j=1}^{n+1-k} [\mu_{ij} (\mu_{ij} - \mu_i)^k]^{-1} \prod_{l=1, l \neq j}^{n+1-k} (\mu_{il} - \mu_{ij}) (1 - e^{-\mu_{ij} x_i}) \right\} = 1 - \alpha_i \tag{3}$$

易见 ,此结果包含了 $k = 0, k = n + 1$ 时的相应结果 ,即推广了文献 2 的结果.

2 结论的证明

式(3)的证明 ,需要下列引理.

引理 1^[2] 设 a_i 为实数 ,且 $a_i \neq a_j (i \neq j)$ 则

$$\sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=1, j \neq i}^{n-1} \frac{1}{a_j - a_i} \frac{1}{a_i - a_n} \right) = \prod_{j=1}^{n-1} \frac{1}{a_j - a_n} \tag{4}$$

引理 2^[2] 设 a_i 为非负实数 ,则 $\prod_{i=1}^n \frac{a_i}{s + a_i} = \sum_{i=1}^n c_i \frac{a_i}{s + a_i}$ 对于 $s \geq 0$ 其中 $c_i = \prod_{k=1, k \neq i}^n \frac{a_k}{a_k - a_i}$.

引理 3^[2] 设 X_i 为服从参数为 λ 的指数分布的随机变量 ,且 X_i 间相互独立 ,则 $Y_0 = \sum_{i=1}^n X_i$ 的分布密度为

$$p_{Y_0}(y) = \frac{\lambda^n y^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda y} \tag{5}$$

引理 4^[2] 设 X_i 为服从参数为 λ_i 的指数分布的随机变量 ,且 X_i 间相互独立 ,又设 $\lambda_i \neq \lambda_j (i \neq j)$,则 $Y_n =$

$$\sum_{i=1}^n X_i \text{ 的分布密度为 } p_{Y_n}(y) = \prod_{i=1}^n \lambda_i \left(\sum_{i=1}^n \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i} e^{-\lambda_j y} \right) \tag{6}$$

引理 5 设 X_i 是服从参数为 λ_i 的指数分布的随机变量 ,且 X_i 间相互独立 ,又设 $\lambda_i \neq \lambda_j (i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, m - k)$,

$\lambda_{n-k+1} = \lambda_{n-k+2} = \dots = \lambda_n = \lambda$,则 $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ 的分布密度为

$$p_Y(y) = \lambda^k \prod_{j=1}^{n-k} \lambda_j \left\{ \prod_{j=1}^{n-k} (\lambda_j - \lambda)^{-1} \left[\sum_{r=1}^k (-1)^{k-r} \sum_{s_j \in \emptyset \cup N, \sum_{j=1}^{n-k} s_j} \left(\prod_{j=1}^{n-k} (\lambda_j - \lambda_i)^{-s_j} \right) \frac{y^{r-1}}{(r-1)!} \right] + (-1)^k \sum_{j=1}^{n-k} [(\lambda_j - \lambda)^k \prod_{l=1, l \neq j}^{n-k} (\lambda_l - \lambda_j)^{-1}] e^{-\lambda_j y} \right\} \tag{7}$$

证明 由式(5) ,式(6)和卷积公式得 $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ 的分布密度为

$$p_Y(y) = \int_0^y \frac{\lambda^k u^{k-1} e^{-\lambda u}}{(k-1)!} \prod_{i=1}^{n-k} \lambda_i \left[\sum_{i=1}^{n-k} \left(\prod_{j=1, j \neq i}^{n-k} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i} \right) e^{-\lambda_i(y-u)} \right] du = \frac{\lambda^k \prod_{i=1}^{n-k} \lambda_i}{(k-1)!} \sum_{i=1}^{n-k} \left[e^{-\lambda y} \prod_{j=1, j \neq i}^{n-k} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i} \int_0^y u^{k-1} e^{(\lambda_i - \lambda)u} du \right] = \lambda^k \prod_{i=1}^{n-k} \lambda_i \left\{ \sum_{i=1}^{n-k} \frac{1}{\lambda_i - \lambda} \prod_{j=1, j \neq i}^{n-k} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i} [(-1)^{k-1} \frac{1}{(\lambda_i - \lambda)^{k-1}} + (-1)^{k-2} \frac{y}{(\lambda_i - \lambda)^{k-2}} + \dots + \frac{1}{(\lambda_i - \lambda)^2} \frac{y^{k-3}}{(k-3)!} - \frac{1}{(\lambda_i - \lambda)} \frac{y^{k-2}}{(k-2)!} + \frac{y^{k-1}}{(k-1)!}] e^{-\lambda y} + (-1)^k \sum_{i=1}^{n-k} \left[\frac{1}{(\lambda_i - \lambda)^k} \prod_{j=1, j \neq i}^{n-k} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i} \right] e^{-\lambda_j y} \right\} \tag{8}$$

要证明式(7)与式(8)等价 ,只需证明两式中的 y^{k-r} 的系数相等 ,即证明

$$\sum_{i=1}^{n-k} \left[\prod_{j=1, j \neq i}^{n-k} \frac{1}{(\lambda_j - \lambda_i)(\lambda_i - \lambda)^{k-r+1}} \right] = \prod_{i=1}^{n-k} \frac{1}{\lambda_i - \lambda} \sum_{s_i \in \emptyset \cup N, \sum_{i=1}^{n-k} s_i = k-r} \prod_{i=1}^{n-k} \frac{1}{(\lambda_i - \lambda)^{s_i}} \quad (r = 1, 2, \dots, k) \tag{9}$$

为此, 作无穷级数

$$\prod_{i=1}^{n-k} \left(1 + \frac{y}{\lambda_i - \lambda} + \frac{y^2}{(\lambda_i - \lambda)^2} + \dots + \frac{y^m}{(\lambda_i - \lambda)^m} + \dots \right)$$

即 $\prod_{i=1}^{n-k} \frac{1}{1 - \frac{y}{\lambda_i - \lambda}}$ 此级数中 y^{k-r} 的系数为 $\sum_{s_i \in \{0\} \cup N, \sum_{i=1}^{n-k} s_i = k-r} \prod_{i=1}^{n-k} \frac{1}{(\lambda_i - \lambda)^{s_i}}$. 由引理 2, 经过适当的运算, 级数

$$\prod_{i=1}^{n-k} \frac{1}{1 - \frac{y}{\lambda_i - \lambda}}$$

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n-k} \prod_{j=1, j \neq i}^{n-k} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i} (\lambda_i - \lambda)^{n-k-2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{y}{\lambda_i - \lambda} \right)^m \right\} \left\{ \prod_{i=1}^{n-k} \lambda_i - \lambda y^{-n+k+1} \right\}$$

其中 y^{k-r} 的系数为

$$\prod_{i=1}^{n-k} (\lambda_i - \lambda) \sum_{i=1}^{n-k} \prod_{j=1, j \neq i}^{n-k} \frac{1}{(\lambda_j - \lambda_i)} \frac{1}{(\lambda_i - \lambda)^{k-r+1}}$$

由此, 式(9)成立, 故式(7)得证.

将式(7)中 n 改为 $n+1$, 将 Y 的密度函数在区间 $[0, x_i]$ 上求积分, 即得式(4), 从而本文的结论得到证明.

3 结束语

本文就随机投入产出模型式(1), 在直接消耗系数和最终需求为指数型随机变量的条件下, 对于变量分布的参数间的一般假设, 获得了产出量所满足的代数方程, 所得结果是文献[2]的推广, 从理论上就随机投入产出模型式(1)的产出量的控制, 获得了较为完整的结果.

基于直接消耗系数和最终需求为指数型随机变量的随机投入产出模型式(1)的应用, 需要用样本资料对未知参数进行估计(即各随机变量所服从分布中的未知参数 λ_{ij}), 对各产出量所满足的代数方程进行求解, 这些问题有待进一步研究.

参考文献:

[1] HARRIS T R, GOICOECHEA A. An interindustry economic model with stochastic parameters: use of non-normal deterministic equivalents [J]. *Journal of Large Scale Systems*, 1986 (11): 177—191.

[2] 吴和成, 郑垂勇. 基于指数分布的投入产出模型[J]. *河海大学学报(自然科学版)*, 2004, 32(2): 233—235.

[3] THIJS T R, MARK F J S. Revised stochastic analysis of an input-output mode[J]. *Regional Science and Urban Economics*, 1994 (3): 361—371.

[4] 韩东, 胡锡健. 随机投入产出模型分析(I) [J]. *新疆大学学报(自然科学版)*, 1995, 12(2): 39—41.

[5] 陈木法. 经济最优化的随机模型(I) [J]. *应用概率统计*, 1992, 2(3): 289—294.

Study on stochastic input-output models

WU He-cheng¹, ZHENG Chui-yong²

(1. Business School, Hohai Univ., Nanjing 210098, China;

2. Research Center of Eastern Resource, Environment and Sustainable Development, Hohai Univ., Nanjing 210098, China)

Abstract :The aim of the study is to derive the control equation for the output of the stochastic input-output model under a given reliability. In the formulas of stochastic input and output, when the coefficient of direct consumption and final demand are exponentially distributed, the interrelationship between parameters of stochastic variables can be divided into three types: all the parameters are the same; parameters are inequivalent to each other; some of the parameters are the same, but the rest are inequivalent to each other. Based on the third relationship between the coefficient of direct consumption and distribution parameters of final demand, deterministic equivalent equations for the input-output model were derived.

Key words input-output model; random variable; exponential distribution; deterministic equivalent equation