

PERT 网络计算分析之补充

胡肇枢, 王卓甫

(河海大学国际工商学院, 江苏 南京 210098)

摘要:为解决 PERT 网络中可能有多于一条关键线路或次关键线路时,在特定计划工期下对工程完工概率的影响问题,从分析进度网络结构入手,在分清这些线路是相关的还是相互独立线路的基础上,针对各种情况,给出分析计算方法与算例.此外,为了修订工程工期,对活动持续时间的压缩提出一种简便的方案.

关键词:PERT 网络;关键线路;计划工期;完工概率

中图分类号: F224.33 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-198X(2002)01-0029-06

PERT(计划评审技术)对分析计算活动的持续时间具有非肯定的性质,或者说活动的持续时间带有随机性的网络进度计划是很适用的.对于某些新的研制项目或受众多干涉因素影响而难以精确地确定活动的持续时间的项目常采用 PERT 网络.

在 PERT 中,对活动持续时间随机分析,通常是首先凭借经验估计出三种持续时间(乐观持续时间、悲观持续时间、最可能持续时间),并假设活动持续时间服从 β 分布或正态分布,然后求出各活动的平均持续时间与不确定性指标(方差与标准差),并假定当线路(构成线路的活动)个数足够多时,线路持续时间的概率分布作为正态分布,用于对整个网络计划能否按预定计划工期完成作出概率评价.采用 PERT 编制进度计划并不着眼于计划绝对地准确,而是在承认具有偏差的前提下,用概率论的观点与数理统计的方法来衡量或预测网络中某些特定的节点或整个工程,按某一特定的计划时间实现的可能性和可靠性的规律.在众多涉及 PERT 的著作与文献中,通常仅用该方法分析两种情况^[1~4]:其一为网络中某一节点或整个网络按某一计划工期完成的概率;其二为网络中某一节点或整个网络按某一完成概率求得计划工期.笔者认为这是不完整的,尚缺少其它可能发生的较为复杂情况的分析与计算,现以此文进行补充.

1 多于一条关键线路的情况

当活动的持续时间是随机的,多于一条线路的持续时间完全相等的概率几乎为零.随着工期压缩,多于一条关键线路的情况是难以避免的.当遇到多于一条关键线路的情况时,要对下列两种情况进行分析.

1.1 整个网络中有相对独立的多条关键线路存在的情况

随着工程项目规模与技术复杂性的增加,通常存在多个相对独立的单项工程(或子系统)并行施工的情况,以及随着 PERT 网络的期望工程进行压缩,存在着多于一条关键线路的情况.

众所周知,关键线路条数愈多,进度控制的难度愈大,按期完工概率也愈低.如果这些活动线路没有内部横向联系,而是彼此独立的,按概率论基本理论,多个随机事件同时发生的概率等于各个随机事件独自发生概率之积,那么整个工程(或计划对象)的完工概率可由下式求得:

$$P(T \leq T_s) = \prod_{i=1}^n P_i(T \leq T_s) \quad (1)$$

式中: $P_i(T \leq T_s)$ ——第 i 条线路在 $T \leq T_s$ 时的完工概率; T_s ——计划工期.

1.2 关键线路内部之间有横向联系的情况

所谓关键线路内部之间有横向联系,是指存在同属于这些线路的公共活动或这些线路之间有虚活动或

实活动联接的情况.这时对应于计划工期而言,应按安全性的原则,按进度控制难度最大的线路来确定其完工概率.其计算分析如下:对如图1所示的进度网络,存在两条相关的关键路线,分别为1—2—3—5—6—8—9和1—2—4—5—6—8—9.

图1中,活动(1,2)(5,6)(6,8)和(8,9)是两条关键路线所共有的.而这两条关键路线中,仅是活动(2,3)和(3,5),以及(2,4)和(4,5)分属于不同的路线,此时,可将网络图中的路段2—3—5或2—4—5进行修正,可用2—3—5修正2—4—5,也可用2—4—5修正2—3—5,这种修正主要取决于哪条路段的方差较大.考虑到计算结果的安全性,应将方差较大的路段作为被修正者.对关键路段修正的办法是在图1中取子网络,如图2所示.

显然,在图2中,路段2—3—5和路段2—4—5的期望持续时间同长,在节点5处,按期望最早开始时间 T_5 可能完工的概率 $P_5(T \leq T_5) = 0.25$.

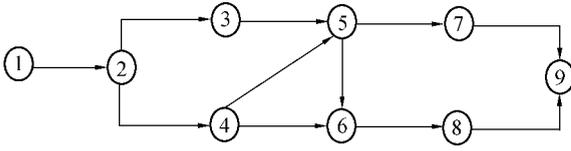


图1 进度网络

Fig.1 Activity network

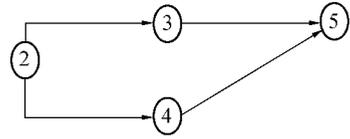


图2 图1的子网络

Fig.2 Activity subnetwork for fig.1

假设在图2中有一新路线,它是在原路段2—3—5(设路段2—3—5的方差较大)持续时间的基础上延长了 ΔT ,加 ΔT 后,即可不考虑路段2—4—5的影响.由于 ΔT 的存在,使得原路段2—3—5在节点5的完工概率 $P_5(T \leq T_5) = 0.25$.从概率密度分布曲线角度看,同样假设存在一新的概率密度分布曲线,它是在原路段2—3—5密度分布曲线的基础上,向右平移 ΔT ,并使新的概率密度分布曲线在 T_5 处的完工概率 $P_5(T \leq T_5) = 0.25$.如图3所示.

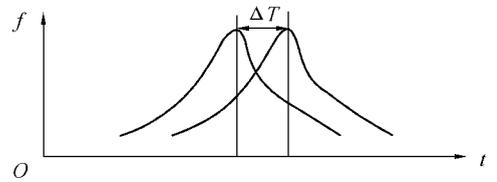


图3 概率密度曲线前移 ΔT 示意图

Fig.3 Probability density curve for ΔT

此时 ΔT 可用下式计算:

$$\Delta T = \lambda \sigma_m \tag{2}$$

其中 λ 可由 $(1 - P_5)$ 的值查标准正态分布表而得, m 为节点编号.此处 $m = 5$, σ_5 为路段2—3—5的标准差.在后续节点完工概率的计算中,只需将路线2—3—5的期望持续时间中加入 ΔT 即可,其它不变,见算例2.

求得 ΔT 后,只需将其加入到原网络中的期望工期 T_e 中,即用式(3)求得 λ 后,查表得计划工期的完工概率.

$$\lambda = \frac{T_s - (T_e + \Delta T)}{\sigma_T} \tag{3}$$

对于如图2所示的情形,从节点2到节点5若有多条(如 n 条)等长的路线时,其概率密度分布曲线平移量 ΔT 仍可用式(2)估算,不过此时的 P_5 应用式(4)计算.

$$P(T \leq T_s) = \prod_{i=1}^n P_i = 0.5^n \tag{4}$$

在进度网络图中,若多处出现如图2所示的子网络时,处理方法与上述相同.

2 次关键线路对如期实现进度目标的影响

2.1 关键线路与次关键线路不相关

a. 当网络中存在相对独立的关键线路与次关键线路时,很有可能在计划实施时由于种种原因使次关键线路转化成关键线路的情况,使控制工期的难度有所加大,应当事先予以估计.当次关键线路与关键线路长度(线路期望工期)是两个独立的正态分布曲线时,按统计理论,次关键线路转化成关键线路的概率,是其均值为此两者均值之差、其方差等于两者方差之和的正态分布曲线在 $T \leq 0$ 时的概率,由下式求得:

$$P(T \leq 0) = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-\Delta T}{\sigma})^2} dt \tag{5}$$

式中: σ ——两者方差之和; ΔT ——两者线路期望工期之差.

在具体分析计算时可利用标准正态概率函数表进行, 见算例 3.

这时, 按期望计算工期实现的完工概率为

$$P(T \leq T_e) = 0.5(1 - P_{\text{subcp}}^{\text{top}}) \quad (6)$$

式中: $P_{\text{subcp}}^{\text{top}}$ ——非关键线路变成关键线路的概率. 当 $P_{\text{subcp}}^{\text{top}} \leq 0.05$ 时, 为了方便计算, 可以忽略其对期望工期完工概率的影响.

b. 如果一个事件有更多条活动线路的端点, 而且其线路的长度均与关键线路接近, 确定其中任何一条活动线路成为关键线路的概率是一个很复杂的问题. 如果这些活动线路没有内部横向联系, 而彼此之间是相对独立的, 则问题要简单一些. 在这种情况下, 可用期望关键线路作控制, 用它分别与其它线路作比较, 每次均按上述方法比较其中的一条, 这样可以得到一个近似解, 以满足分析的需要.

这时, 按计算期望工期实现的完工概率为

$$P(T \leq T_e) = 0.5(1 - P_{\text{subcp1}}^{\text{top}})(1 - P_{\text{subcp2}}^{\text{top}}) \dots (1 - P_{\text{subcpm}}^{\text{top}}) \quad (7)$$

式中: $P_{\text{subcp}i}^{\text{top}}$ ——第 i 条非关键线路变成关键线路的概率.

c. 当计划工期 $T_s \neq T_e$ 时, 随着 T_s 值的减小, 次关键线路变成关键线路的概率将增加; 反之, 随着 T_s 值的增大, 次关键线路变成关键线路的概率将减少. 这时须分别求出各条线路在 T_s 之前完成的概率, 然后将其连乘, 即得到在该计划工期下总的完工概率. 其计算公式如下:

$$P_{TS} = \prod_{i=1}^n P_{\text{cp}i}(T \leq T_s) \times \prod_{j=1}^m P_{\text{subcp}j}(T \leq T_s) \quad (8)$$

式中: $P_{\text{cp}i}(T \leq T_s)$, $P_{\text{subcp}j}(T \leq T_s)$ ——无横向联系的第 i 条关键线路与无横向联系的第 j 条非关键线路在 T_s 内的完工概率.

2.2 关键线路与次关键线路相关

当关键线路与次关键线路有横向联系, 两者线路期望工期非常接近, 而次关键线路的方差又大于关键线路的方差时, 次关键线路转变成关键线路的概率会增加, 在分析整个计划对象的完工概率时, 必须考虑次关键线路的影响.

对如图 1 所示的进度网络中, 设有一条关键路线 1—2—3—5—6—8—9 和一条次关键线路 1—2—4—5—6—8—9. 先不考虑两条路线所共有的活动, 仅对路段 2—3—5 或 2—4—5 进行修正. 其办法是: 取包含修正路段的子网络图 2, 设路段 2—3—5 和路段 2—4—5 的期望持续时间相差 ΔT , 该路段按期望持续时间完工的概率为 $P_5(T \leq T_e) = 0.5(1 - P_{\text{subcp}}^{\text{top}})$; 假设在图 2 中有一条新路线, 它是在原关键路段 2—3—5 持续时间的基础上延长了 ΔT (加 ΔT 后即可不考虑路段 2—4—5 的影响), 为安全起见, 如果次关键路段的方差值大于关键路段的方差值时, 还须计算次关键路段 2—4—5 持续时间的基础上延长的时间 ΔT 值 (加 ΔT 后即可不考虑路段 2—3—5 的影响).

ΔT 的估算方法如下 (a) 求该子网络次关键路段的 $P_{\text{subcp}i}^{\text{top}}$ 值 (b) 求该子网络的 $P_5(T \leq T_e) = 0.5(1 - P_{\text{subcp}}^{\text{top}})$ (c) 由 P_5 查标准正态分布表得 λ 值 (d) 由该子网络关键路段的 σ_i , 用式 $\Delta T = \lambda\sigma_i$ 求 ΔT 并取大;

求得 ΔT 后, 在后续节点完工概率的估算中, 只需将其加入到原网络节点期望工期 T_e 中, 即用式 (3) 去求该节点按计划工期的实现概率, 以及整个计划对象按计划工期的完工概率, 见算例 4.

对于如图 2 所示情形, 从节点 2 到节点 5 如有多条次关键路段时, 其概率密度分布曲线平移量 ΔT , 可用式 (7) 估算, 处理方法和上述相同. 在进度网络图中, 若多处出现如图 2 所示的子网络, 则处理方法与上述相同, 并把各段 ΔT 值相加即可.

3 关键线路与次关键线路不相关和相关同时存在的情况

当关键线路与次关键线路不相关和相关同时存在时, 通常采用基于蒙特卡罗 (Monte Carlo) 方法, 用计算机模拟实际概率分布, 进行数以万计次数的仿真, 最终用统计方法得到总工期的概率分布规律, 以满足分析的要求. 此法对活动数量较大的大型工程项目而言, 可综合地解决包括上述各种复杂情况下所求解的问题, 可谓是一种较好的方法, 但对计算机的配置与计算速度的要求较高.

4 PERT网络的期望工期的压缩

PERT网络的主要功能是用于项目计划工期与该工期下完工概率的分析研究,常根据项目的重要性,先确定其完工概率,并要求在既定的计划工期内完工.正常活动平均期望持续时间已不能满足其要求,这就得给活动增加有效资源量,以缩短活动的平均期望持续时间来修订网络计划.活动平均期望持续时间的压缩,与肯定型网络中的活动持续时间一样有一最大限度.按活动期望持续时间压缩程度不同,有活动正常期望持续时间、活动部分压缩期望持续时间、活动充分压缩期望持续时间之分,分别记以 t_e^n, t_e^{pc}, t_e^c .

一个活动在不同的资源量水平下,其活动持续时间的概率密度分布曲线形态是不一样的.随着活动期望持续时间的缩短,该持续时间的离差值会减小.通常采用能为人们所接受的一种假设是:活动持续时间各估计值几何相似^[2,5].即各不同压缩程度下的活动乐观持续时间(或悲观持续时间)与其各不同压缩程度下的活动期望持续时间之比,分别等于活动正常情况下活动乐观持续时间(或悲观持续时间)与其活动期望持续时间之比,得出两个比值常数,可用下式表示:

$$\frac{t_a^n}{t_e^n} = \frac{t_a^{pc}}{t_e^{pc}} = \frac{t_a^c}{t_e^c} = \varphi_1 \quad \frac{t_b^n}{t_e^n} = \frac{t_b^{pc}}{t_e^{pc}} = \frac{t_b^c}{t_e^c} = \varphi_2 \quad (9)$$

式中: t_a^n, t_a^{pc}, t_a^c ——活动正常、部分压缩、充分压缩情况下的乐观持续时间; t_b^n, t_b^{pc}, t_b^c ——活动正常、部分压缩、充分压缩情况下的悲观持续时间; φ_1, φ_2 ——比值常数.

如果由于上述原因,要求在 T_s 内达到既定的完工概率而压缩某些关键活动期望持续时间,则该活动的相关参数可由以下公式得出:

$$\left. \begin{aligned} t_a^s &= \varphi_1 t_e^s & t_b^s &= \varphi_2 t_e^s & t_m^s &= \left(\frac{6 - \varphi_1 - \varphi_2}{4} \right) t_e^s \\ \sigma_{t_e^s} &= \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{6} \right) t_e^s & V_{t_e^s} &= \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{6} \right) \chi(t_e^s) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

在网络中活动的参数用上式计算出后,其它分析计算同常规计算方法,不再赘述.

5 算例

图4为数字位置约定,在算例中已知 λ 求 P 以及已知 P 求 λ 计算时,均应用‘标准正态分布计算表’查表计算.

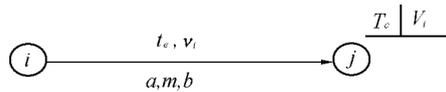


图4 数字位置约定

Fig.4 Predetermined position of original data

t_e —活动期望持续时间; v_i —活动方差值; a —活动乐观持续时间; m —活动最可能持续时间; b —活动悲观持续时间; T_e —节点期望最早可能发生时间; V_i —节点或线路方差值

算例1 如图2网络,求 $T_s = 35$ d时的完工概率.

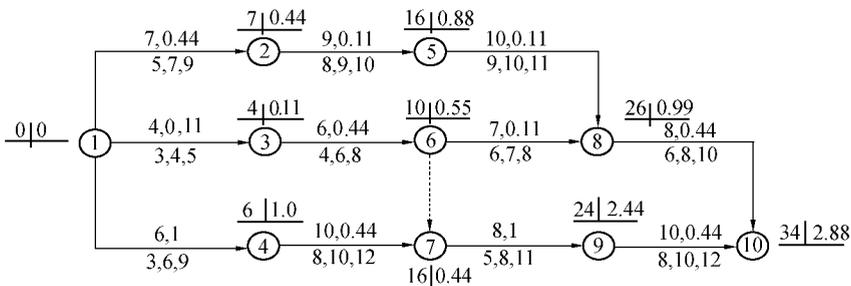


图5 算例1进度网络

Fig.5 Activity network for example 1

表 1 算例 1 的计算过程与计算结果

Table 1 Calculation process and results for example 1

线 路	T_e /d	V_i	σ_i	T_s /d	λ	P_i	P
1—2—5—8—10	34	1.43	1.2	35	0.833	0.7974	0.5755
1—4—7—9—10	34	2.88	1.7	35	0.588	0.7217	

算例 2 如图 6 网络, 求 $T_s = 70$ d 时的完工概率.

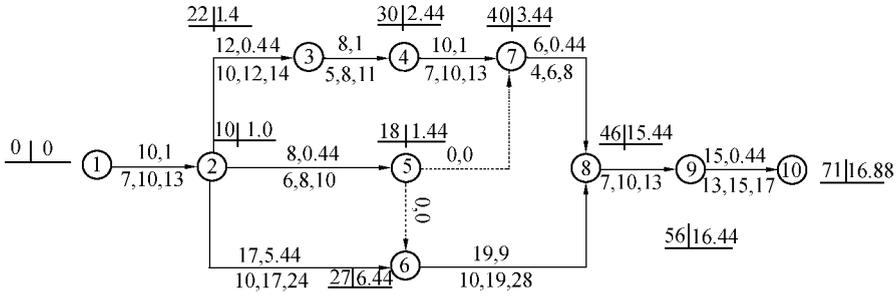


图 6 算例 2 进度网络

Fig.6 Activity network for example 2

表 2 算例 2 的计算过程与计算结果

Table 2 Calculation process and results for example 2

线 路			路 段			整个网络						
经过节点	T_e /d	V_i	σ_i	经过节点	T_e /d	V_i	σ_i	λ	ΔT	T_s /d	λ	P
1—2—3—4—7—8—9—10	71	5.32	2.30	2—3—4—7—8	36	2.88	1.7			70	-0.854	0.20
1—2—6—8—9—10	71	16.88	4.10	2—6—8	36	14.44	3.8	0.675	2.5			

算例 3 如图 7 网络, 求 $T_s = 54$ d 时的完工概率.

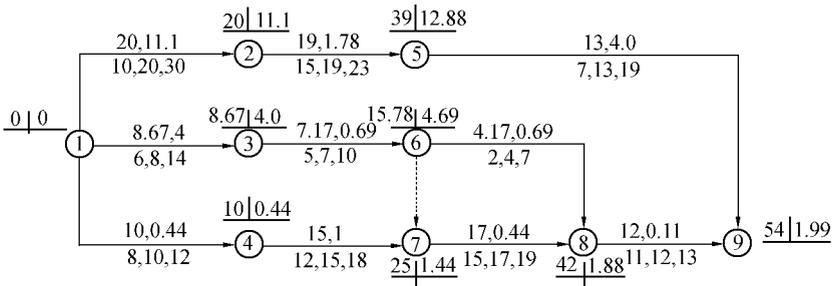


图 7 算例 3 进度网络

Fig.7 Activity network for example 3

表 3 算例 3 的计算过程与计算结果

Table 3 Calculation process and results for example 3

线路	T_e /d	V_i	σ_i	$\sum V_i$	$\Delta T'$ /d	P_{subep}^{cp}	P
1—4—7—8—9	54	1.99	1.41			0.5	0.3386
1—2—5—9	52	16.88	4.34	18.87	2	0.3228	

算例4 如图8网络,求 $T_s = 92$ d 与 $T_s = 90$ d 时的完工概率.

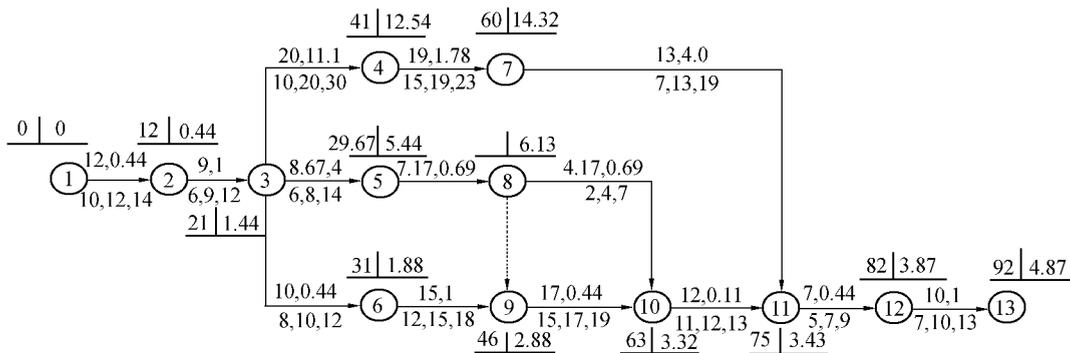


图 8 算例 4 进度网络

Fig.8 Activity network for example 4

表 4 算例 4 的计算过程与计算结果

Table 4 Calculation process and results for example 4

线 路			路 段										整个计划对象				
经过节点	T_c	σ_t	经过节点	T_c	σ_t	$\sum V_i$	σ_i'	$\Delta T'$ /d	P	λ	ΔT /d	取大	σ_t	$T_s = 92$ d		$T_s = 90$ d	
														λ	P	λ	P
1-2-6-8-10-11-12-13	92	2.21	3-6-9-10-11	54	1.41	18.87	4.34	2	0.3386	0.414	0.584	✓	2.21	-0.2643	0.3969	-1.1690	0.1212
1-2-4-7-11-12-13	90	7.33	3-4-7-11	52	4.11						-0.3	✗					

参考文献 :

[1] 浦在明. 网络法基本原理及其应用 [M]. 北京 : 金盾出版社 , 1985. 252 ~ 274.
 [2] 李开运. 水电基建管理系统分析方法 [M]. 南京 : 河海大学出版社 , 1993. 155 ~ 165.
 [3] 聂相田. 建设项目进度控制 [M]. 北京 : 水利水电出版社 , 1998. 107 ~ 117.
 [4] 王众托, 张军. 网络计划技术 [M]. 沈阳 : 辽宁人民出版社 , 1984. 139 ~ 150.
 [5] James M Antill, Ronald W Woodhead. Critical path methods in construction practice [M]. New York : A Wiley-interscience Publication , 1982. 121 ~ 180.

Supplement to Analysis of PERT Network Calculation

HU Zhao-shu , WANG Zuo-fu

(College of International Industry and Commerce , Hohai Univ. , Nanjing 210098 , China)

Abstract : There may be more than one critical path and sub-critical paths in a PERT network. The factors affecting project completion probability under specified planned schedules are analyzed. Based on the analysis of the network structure and discrimination of correlation and non-correlation in paths , calculation methods and examples are presented for each case. In addition , a simple way for shortening the construction period is proposed for modification of the time of completion of projects.

Key words : PERT network ; critical path ; construction schedule ; project completion probability