

基于三角形网格的潮汐水域水流水质的一种计算模式

华祖林 褚克坚

(淮海大学水文水资源及环境学院 江苏 南京 210098)

摘要 基于无结构的三角形网格布置 ,以适应潮汐水域极不规则天然岸边界 .在此基础上以三角形网格离散基本方程 ,建立了交替方向隐式的有限差分计算模式 ,将其应用于长江南通河段的潮流场与浓度场模拟计算 ,验证表明实测与计算值对比令人满意 ,可以作为潮汐水域潮流场及浓度场预测的一种模式 .

关键词 三角形网格 潮汐水域 水流 水质 数值模式

中图分类号 TV131.4 **文献标识码** A **文章编号** 1000-1980(2001)04-0031-07

对于潮汐水域水流及物质输送模拟 ,以求解二维浅水方程为基础的数值模式已在实际工程中发挥着极为重要的作用 .由于潮汐水域岸边界具有极不规则性 ,从空气动力学计算中引进的拟合贴体技术的应用已成水流模拟的热点之一 ,如 :Thompson ,W. Rodi ,Wijbenga ,Hervouet ,Jothi Shankar ,Binliang 华祖林等 ,通过某一种数学变换(多属微分变换)实现将不规则平面变换成规则平面 ,虽然有较好的拟合边界精度 ,但曲线网格的实现工作量也相当大 .目前 ,采用任意三角形或四边形网格 ,已经应用于潮流水域水动力及物质输送的模拟中 ,如 刘智、龚希萍、徐宏明、K. Anastasiou 均做过该方面的研究工作 ,但模式以显式居多 ,稳定性与时步长受到较大限制 .本文在三角形网格基础上 ,建立了交替方向隐式差分格式的潮流及水质计算模式 ,提高了计算稳定性 ,经长江南通河段的数值模拟 ,取得了较满意的效果 .

1 基本方程及定解条件

1.1 基本方程

大范围开阔潮汐水域 ,其垂直方向的流速分量比水平方向的流速分量小得多 ,即 $w \ll u$, $w \ll v$,并且流动的垂向加速度比重力加速度小得多 ,从而可引入静压假定(或浅水假定) ,对三维雷诺方程沿水深积分 ,可得如下基本方程 :

连续方程

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial(Hu)}{\partial x} + \frac{\partial(Hv)}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

动量方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv = -g \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\tau_{sx} - \tau_{bx}}{\rho H} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \tag{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu = -g \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\tau_{sy} - \tau_{by}}{\rho H} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \tag{3}$$

物质输运方程

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{1}{H} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(HD_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(HD_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) \right] + Sc \tag{4}$$

式中 x, y, t ——空间及时间坐标系 ; u, v ——在 x, y 方向沿水深积分的平均流速分量 ; ξ ——潮位 ; H ——水深 ; f ——柯氏力系数 ; ρ ——水体密度 ; τ_{sx}, τ_{sy} ——沿 x, y 方向的风应力 ; τ_{bx}, τ_{by} ——沿 x, y 方向的河床底应力 ; C ——浓度 ; D_x, D_y —— x, y 方向沿水深平均扩散系数 ; Sc ——源汇项 ; ν —— x, y 方向沿水深平均的紊动粘性系数 .模型中有关参数的计算公式为 :

a. 风应力

收稿日期 2001-03-20
基金项目 江苏省自然科学基金资助项目(BK2000004)
作者简介 华祖林(1965—)男 ,江苏江阴人 ,博士 ,副研究员 ,主要从事水动力及水环境研究 .

$$\tau_{sx} = C_f \rho_a w_x \sqrt{w_x^2 + w_y^2} \quad \tau_{sy} = C_f \rho_a w_y \sqrt{w_x^2 + w_y^2} \quad (5)$$

式中: ρ_a ——空气密度; C_f ——水与气界面阻力系数, 与风速大小有关; w_x, w_y ——风矢量在 x, y 方向相对于流速的分量。

b. 河床底部应力

$$\tau_{bx} = \rho g u \sqrt{u^2 + v^2} / C_0^2 \quad \tau_{by} = \rho g v \sqrt{u^2 + v^2} / C_0^2 \quad (6)$$

其中 $C_0 = \frac{1}{n} H^{1/6}$, n 为曼宁系数。

1.2 边界条件

1.2.1 入流边界

对于入流边界 Γ_1 , 须给定水位(或流速)、浓度随时间的变化值:

$$\xi(x, y, t)|_{\Gamma_1} = \xi_1(x, y, t) \quad (7)$$

$$\text{或} \quad u(x, y, t)|_{\Gamma_1} = u_1(x, y, t) \quad v(x, y, t)|_{\Gamma_1} = v_1(x, y, t) \quad (8)$$

$$C(x, y, t)|_{\Gamma_1} = C_1(x, y, t) \quad (9)$$

1.2.2 出流边界

采用自由出流边界条件, 即

$$\xi(x, y, t)|_{\Gamma_2} = \xi_2(x, y, t) \quad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial C}{\partial s} = 0 \quad (11)$$

式中: s ——流线。

1.2.3 岸边界条件

对固壁岸边界, 采用固壁不可入条件及物质通量为零, 即

$$V_n = 0 \quad \frac{\partial C}{\partial n} = 0 \quad (12)$$

式中: n ——岸边界法线方向。

2 数值离散方法

2.1 三角形网格上一阶偏导数求解

将计算域分为若干个任意三角形, 在每个三角形单元内, 任一水量水质变量 $F(x, y)$ 可写成如下一阶近似形式:

$$F(x, y) = a + bx + cy \quad (13)$$

可得三角形单元内函数 $F(x, y)$ 的一阶偏导数的表达式:

$$F_x = b \quad F_y = c \quad (14)$$

这样, 对于一顶点为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 的三角形单元, 如图 1 所示, 其节点上任一函数 $F(x, y)$ 的值分别为 F_1, F_2, F_3 ,

$$F_1 = a + bx_1 + cy_1 \quad F_2 = a + bx_2 + cy_2 \quad F_3 = a + bx_3 + cy_3 \quad (15)$$

解此方程组, 可得

$$a = \frac{1}{2S_e} \begin{vmatrix} F_1 & x_1 & y_1 \\ F_2 & x_2 & y_2 \\ F_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad b = \frac{1}{2S_e} \begin{vmatrix} 1 & F_1 & y_1 \\ 1 & F_2 & y_2 \\ 1 & F_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad c = \frac{1}{2S_e} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & F_1 \\ 1 & x_2 & F_2 \\ 1 & x_3 & F_3 \end{vmatrix} \quad (16)$$

式中: S_e ——三角形面积, $S_e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$ 。

由此在每个三角形单元中, 变量 $F(x, y)$ 的一阶偏导数可用下式表达:

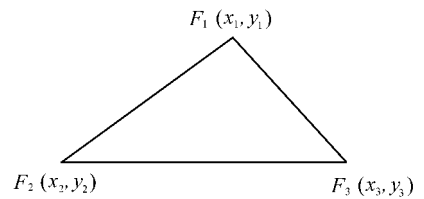


图 1 三角形网格示意图

Fig.1 Sketch of triangular grid

$$\mathbf{F}_x = \frac{1}{2S_e} \begin{vmatrix} 1 & F_1 & y_1 \\ 1 & F_2 & y_2 \\ 1 & F_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad \mathbf{F}_y = \frac{1}{2S_e} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & F_1 \\ 1 & x_2 & F_2 \\ 1 & x_3 & F_3 \end{vmatrix} \quad (17)$$

在计算区域中,若某一节点 $P(x, y)$ 同时为 m 个三角形单元的顶点,那么变量 $F(x, y)$ 的一阶偏导数可取这 m 个三角形单元在该点的一阶偏导数的加权平均,如下式所示:

$$(F_x)_m = \left(\sum_{i=1}^m b_i S_{e_i} \right) \left(\sum_{i=1}^m S_{e_i} \right) \quad (F_y)_m = \left(\sum_{i=1}^m c_i S_{e_i} \right) \left(\sum_{i=1}^m S_{e_i} \right) \quad (18)$$

2.2 三角形网格上二阶偏导数求解

紊动项的二阶偏导数分两步求解来实现. 第一步先以上述一阶偏导数求解方法求得全流场各节点变量的一阶偏导数值,第二步对于计算域中的任意一个三角形单元,对各变量的一阶偏导数值仍取一阶近似:

$$\mathbf{F}' = \mathbf{d} + \mathbf{e}x + \mathbf{f}y \quad (19)$$

式中 $\mathbf{F}'$ 为任一变量的一阶偏导数,则在三角形单元三顶点坐标及变量的一阶偏导数值已知的条件下, $\mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}$ 可唯一求出,且此时变量的二阶偏导数为

$$F'_x = \mathbf{e} \quad F'_y = \mathbf{f} \quad (20)$$

若采用与一阶偏导数相同的加权平均处理方式,则某点上的二阶偏导数可近似为

$$(F'_x)_m = \left(\sum_{i=1}^m e_i S_{e_i} \right) \left(\sum_{i=1}^m S_{e_i} \right) \quad (F'_y)_m = \left(\sum_{i=1}^m f_i S_{e_i} \right) \left(\sum_{i=1}^m S_{e_i} \right) \quad (21)$$

2.3 基本方程的离散

本文采用 Leendertse 交替方向隐式(ADI)格式的思路,对基本方程应用在三角形网格上离散,网格布置要求适应 ADI 计算格式,其过程可分两步进行.

a. 第一时步 $[K\Delta t \rightarrow (K+1/2)\Delta t]$:

$$u_i^{K+1/2} + \Delta t \frac{u_i^K}{M_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^{K+1/2} = G_i / M_i \quad (22)$$

$$v_i^{K+1/2} + \Delta t \frac{u_i^K}{M_i} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_i^{K+1/2} = G'_i / M_i \quad (23)$$

$$C_i^{K+1/2} + \frac{\Delta t}{2} u_i^{K+1/2} \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)_i^{K+1/2} = G''_i \quad (24)$$

其中

$$M_i = 2 + \Delta t g \left(\frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{HC_0^2} \right)_i^k \quad (25)$$

$$G_i = 2u_i^K - \Delta t \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right)_i^K + \Delta t (fv)_i^K + \Delta t \left(\frac{\tau_{sx}}{\rho H} \right)_i^K - \Delta t g \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_i^K + \Delta t \left[\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right]_i^K \quad (26)$$

$$G'_i = 2v_i^K - \Delta t \left(v \frac{\partial v}{\partial y} \right)_i^K - \Delta t (fu)_i^K + \Delta t \left(\frac{\tau_{sy}}{\rho H} \right)_i^K - \Delta t g \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)_i^K + \Delta t \left[\nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right]_i^K \quad (27)$$

$$G''_i = C_i^K - \frac{\Delta t}{2} v_i^{K+1/2} \left(\frac{\partial C}{\partial y} \right)_i^K + \frac{\Delta t}{2H_i^K} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[H_i^K \left(D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right)_i^K \right] + Sc_i^K + \frac{\partial}{\partial y} \left[H_i^K \left(D_y \frac{\partial C}{\partial y} \right)_i^K \right] \right\} \quad (28)$$

b. 第二时步 $[(K+1/2)\Delta t \rightarrow (K+1)\Delta t]$:

$$u_i^{K+1} + \Delta t \frac{v_i^K}{N_i} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_i^{K+1} = R_i / N_i \quad (29)$$

$$v_i^{K+1} + \Delta t \frac{v_i^K}{N_i} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_i^{K+1} = R'_i / N_i \quad (30)$$

$$\xi_i^{K+1} = \xi_i^K - \Delta t \left[\frac{\chi u_i^{K+1} H_i^K}{\partial x} + \frac{\chi v_i^{K+1} H_i^K}{\partial y} \right] \quad (31)$$

$$C_i^{K+1} + \frac{\Delta t}{2} v_i^{K+1} \left(\frac{\partial C}{\partial y} \right)_i^{K+1} = R''_i \quad (32)$$

其中

$$N_i = 2 + \Delta t g \left(\frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{HC_0^2} \right)_i^{K+1/2} \quad (33)$$

$$R_i = 2u_i^{K+\frac{1}{2}} - \Delta t u_i^K \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^{K+\frac{1}{2}} + \Delta t (fv)_i^{K+\frac{1}{2}} + \Delta t \left(\frac{\tau_{sx}}{\rho H} \right)_i^{K+\frac{1}{2}} - \Delta t g \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_i^K + \Delta t \left[\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right]_i^{K+\frac{1}{2}} \quad (34)$$

$$R'_i = 2v_i^{K+\frac{1}{2}} - \Delta t v_i^K \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_i^{K+\frac{1}{2}} - \Delta t (fu)_i^{K+\frac{1}{2}} + \Delta t \left(\frac{\tau_{sy}}{\rho H} \right)_i^{K+\frac{1}{2}} - \Delta t g \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)_i^K + \Delta t \left[\nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right]_i^{K+\frac{1}{2}} \quad (35)$$

$$R''_i = C_i^{K+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2} u_i^{K+1} \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)_i^{K+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2H_i^{K+1}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[H_i^{K+1} \left(D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right)_i^{K+\frac{1}{2}} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[H_i^{K+1} \left(D_y \frac{\partial C}{\partial y} \right)_i^{K+\frac{1}{2}} \right] + Sc_i^{K+\frac{1}{2}} \right\} \quad (36)$$

2.4 岸边界条件的处理

对于边界节点 i 取 n 为固壁岸边界法线方向, λ 为岸边界切线方向, θ 为固边界的法向与 x 轴的夹角, 如图 2 所示. 设 u' , v' 为边界节点 i 在迭代过程中的前一次流速计算值, 这样其切向流速分量 u_λ 与法向流速分量 u_n 分别为

$$u_\lambda = u' \sin \theta - v' \cos \theta \quad u_n = u' \cos \theta + v' \sin \theta \quad (37)$$

引入不可入条件 $u_n = 0$, 则下一次迭代的边界节点 i 的流速分量 u'' , v'' 采用

$$u'' = (u' \sin \theta - v' \cos \theta) \sin \theta \quad v'' = (u' \sin \theta - v' \cos \theta) \cos \theta \quad (38)$$

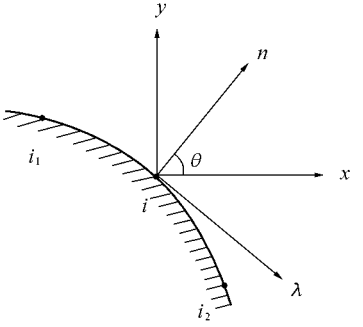


图 2 边界节点 i 流速在两种坐标系下的关系示意图
Fig.2 Velocity at land boundary node i under two different coordinates

3 实例计算

长江南通河段处在长江潮流界内, 受径流和潮汐双重影响, 水流呈不规则半日潮, 南通段水下地形起伏较大, 潜滩暗礁众多, 水下地形见图 3. 潮汐平均周期约 12.4 h, 涨潮历时约 4.15 h, 落潮历时约 8.25 h, 平均潮差 2.68 m, 多年平均最高潮位 5.66 m, 多年平均最低潮位 0.93 m, 落潮起主导作用.

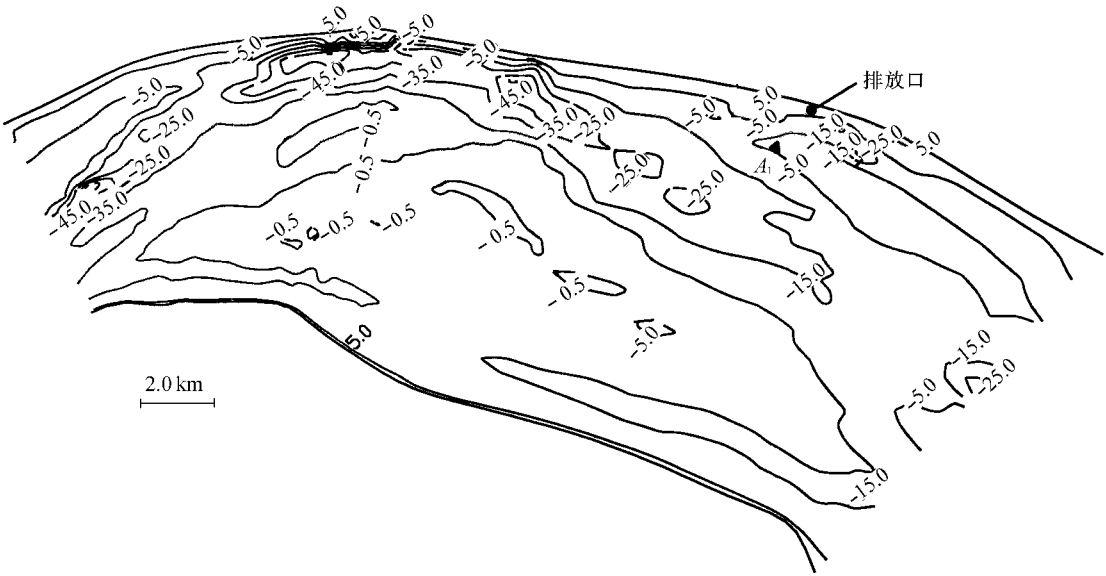


图 3 计算水域水下地形图
Fig.3 Underwater topography of Nantong reach

研究计算区域长约 26.80 km, 平均宽度约 9.60 km, 三角形网格布置见图 4, 三角形网格数共计 92 408 个, 其中地形变化较大及排污口附近的布置适当加密, 采用 1999 年 1 月份大、小实测资料对模式进行验证, 计算结果分述如下:

3.1 流速验证

图 5 为大、小潮测点 A_1 (位置见图 3) 流速 U 实测值与计算值对比, 图中两者总体趋势差异不大, 吻合良好, 计算大潮涨急、落急的流场分布分别见图 6、图 7.

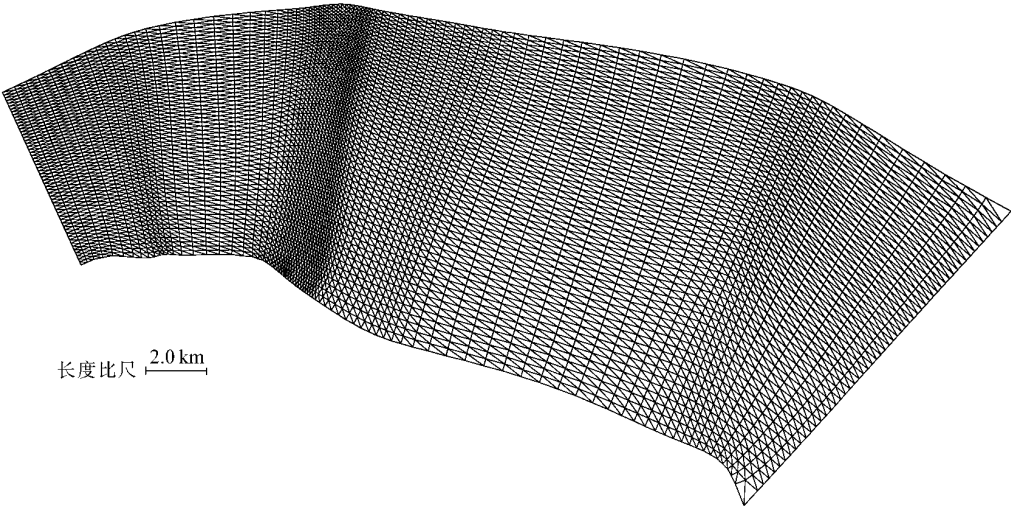


图 4 三角形网格布置

Fig.4 Arrangement of triangular meshes

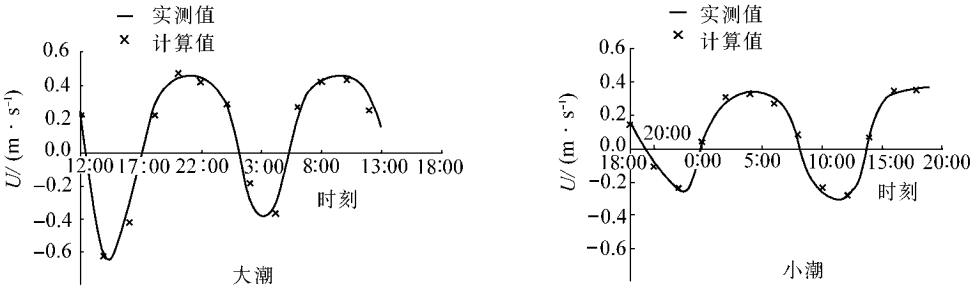


图 5 流速实测与计算值对比

Fig.5 Comparison of calculated velocity with observed data

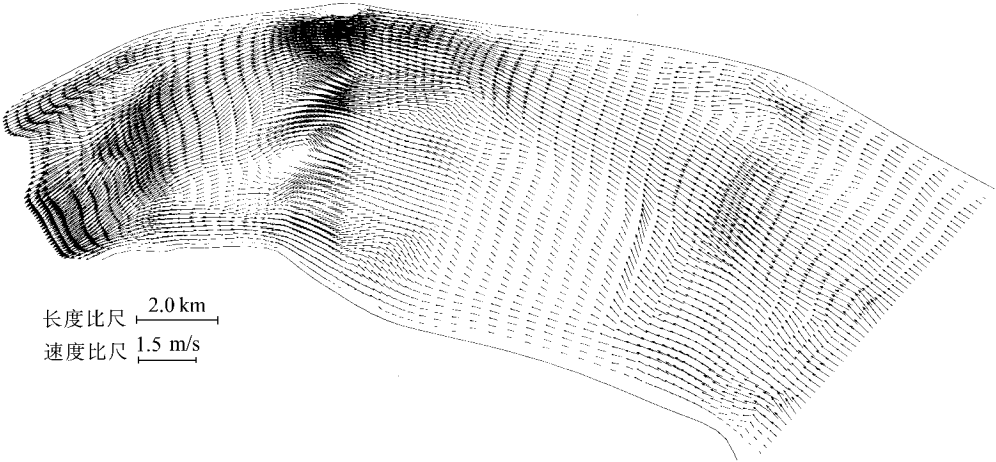


图 6 大潮涨急流场分布

Fig.6 Flow field of maximum flood (spring tide)

3.2 罗丹明 B 示踪验证

在计算区域内排污口附近落潮时投放 5 kg 罗丹明 B 然后实时跟踪罗丹明 B 扩散云 并测试其中的最大浓度 采用 1999 年 1 月 18 ~ 19 日两次落潮实测资料与计算值对比见图 8 总体吻合良好.

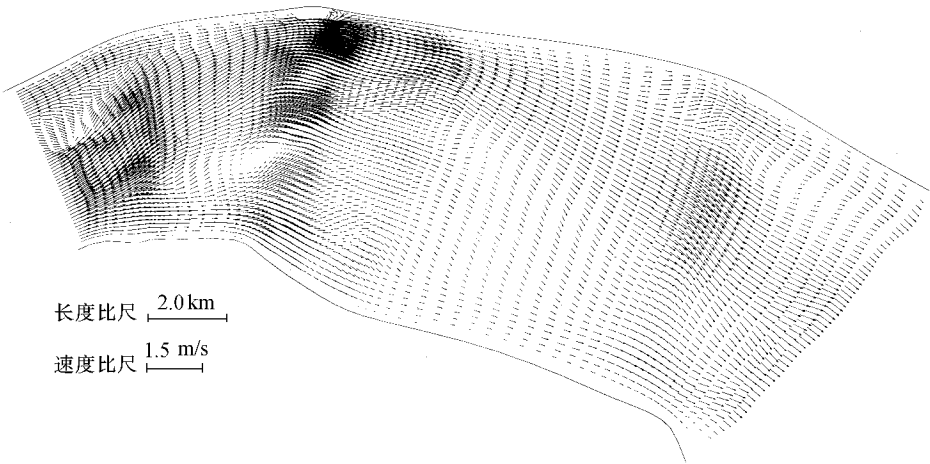


图 7 大潮落急流场分布
Fig.7 Flow field of maximum ebb(spring tide)

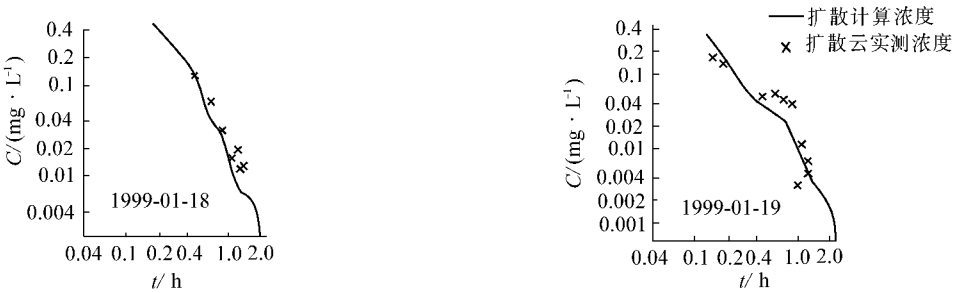


图 8 扩散云中心最大浓度随时间变化过程
Fig.8 Maximum concentration at diffusional cloud centre vs. time

3.3 岸边排放浓度场计算

图 9 是岸边排放落急时刻的浓度场分布 ,计算值与实测值吻合良好.

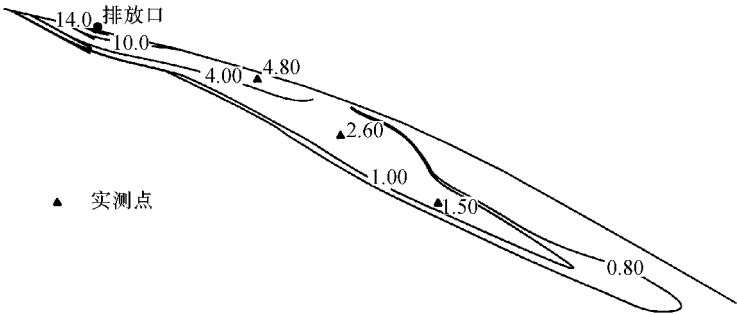


图 9 岸边排放落急时刻的浓度场分布
Fig.9 Concentration field of waste discharge(maximum ebb)

4 结 论

- a. 对潮汐地区水域复杂不规则边界情形 ,三角形网格布置具有良好的适应性 ,其布置方法较拟合坐标法更为简便 ,同时三角形网格的大小、疏密可根据实际问题要求灵活掌握.
- b. 在三角形网格基础上 ,本文建立了交替方向隐式的有限差分模式 ,模式吸取了有限元方法在网格布

置上的长处 ,同时保持了交替方向隐式差分法易于求解、计算工作量小、稳定性好、收敛速度快的优势 ,可作为解决复杂边界水流及物质输运计算中的一种预测模式.

c. 进行了长江南通段受潮汐、径流及水下多变地形等多因素影响下这一较为典型的潮汐水域流场及浓度场计算 ,计算值与实测值吻合良好 ,效果令人满意.

参考文献 :

[1] Leendertse J J. A water quality simulation model for well-mixed estuaries and coastal sea[R]. The Rand Corporation RM-6230 ,1970.

[2] Thompson J F. Body-fitted coordinate systems for numerical solution of partial differential equations[J]. J Comput Phys ,1982(47):1 ~ 108.

[3] Rodi W ,Majumdar S ,Schonung S. Finite volume methods for two-dimensional incompressible flows with complex boundaries[J]. Comput Methods Appl Mech Eng ,1989 ,75 369 ~ 392.

[4] Hervouet J-M. Penelope ,numerical generation of 2-D curvilinear meshes[A]. In :Hausser J ,Taylor C eds. Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics[C]. Swansea : Pineridge Press ,1986. 45 ~ 57.

[5] Wijbenga J H A. Determination of flow pattern in river with curvilinear coordinate[A]. In :Proceedings of 21st Congress IAHR[C]. Canberra :Highland Press ,1985 2 :132 ~ 139.

[6] Jothi Shankar N ,Hin-Fatt Cheong ,Chun-Tat Chan. Boundary fitted grid models for tidal motions in Singapore coastal waters[J]. J of Hydraulic Research ,1997 35(1) 3 ~ 19.

[7] Binliang Lin ,Simon N ,Chandler-Wilde. A depth-integrated 2D coastal and estuarine model with conformal boundary-fitted mesh generation [J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids ,1996 23 819 ~ 846.

[8] Anastasiou K ,Chan C T. Solution of the 2D shallow water equations using the finite volume method on unstructured triangular meshes[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids ,1997 24 :1225 ~ 1245.

[9] Sens A S ,Mortchelewicz G D. Implicit schemes for unsteady Euler equations on triangular meshes[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids ,1994 ,18 :647 ~ 668.

[10] HUA Zu-lin. Numerical simulation of flow field in tidal estuary using body-fitted coordinate system[J]. China Ocean Engineering ,1994 8 (4):447 ~ 455.

[11] 华祖林 ,卞华. 曲线网格生成调节因子选取研究[J]. 河海大学学报 ,1999 27(2) 40 ~ 44.

[12] 刘智 ,林秉南 ,何少苓. 三角形网格在二维不恒定流计算中的应用[J]. 水利学报 ,1987(9):25 ~ 33.

[13] 龚希萍 ,李 来. 三角形网格生成法在海洋工程潮流数学模型中的应用[J]. 水利水运科学研究 ,1995(3):65 ~ 69.

[14] 徐宏明. 一阶近似条件下求解二阶偏导数的方法及理论初探[J]. 水道港口 ,1995(2) 33 ~ 36.

A Numerical Model of Flow and Water Quality for Tidal Regions
Based on Triangular Meshes

HUA Zu-lin ,CHU Ke-jian

(College of Water Resources and Environment ,Hohai Univ. ,Nanjing 210098 ,China)

Abstract :The unstructured triangular grid arrangement is applied to suit irregular natural land boundaries of tidal area in this paper. Based on the triangular grid ,the basic equations are discretized ,and a finite difference method with an alternative directional implicit scheme is established and applied to the simulation of the flow and concentration fields of the Nantong reach of the Yangtze River. The good agreement in the comparison of calculated results with observed values shows that the method can be used to predict the flow and water quality fields in tidal area.

Key words :triangular mesh ;tidal region ;flow ;water quality ;numerical model