

水利水电施工中应用 PERT 的完工概率问题

王卓甫¹ 杨高升¹ 杨建基¹ 沈祖诒²

(1. 河海大学国际工商学院, 江苏 南京 210098; 2. 河海大学水利水电工程学院, 江苏 南京 210098)

摘要 分析了施工进度计划中当出现多条(期望)关键路线及次关键路线和关键路线相接近时应用 PERT 存在的一些问题, 指出了在计算完工概率时应用 PERT 的局限性; 将多条(期望)关键路线及次关键路线和关键路线相接近的情况分为相关和非相关两种情形分别讨论, 提出相应的完工概率的计算方法。

关键词 施工 进度计划 关键路线

中图分类号 F224.33 **文献标识码** A **文章编号** 1000-198X(2002)01-0044-05

在大中型水利水电工程施工进度计划中, 经常出现的情况是, 施工活动的逻辑关系是确定的, 但由于气象、水文、地质等因素的影响, 使得施工活动的持续时间是不确定的。对于这一类进度计划问题, 常用 PERT 去解决。PERT 假定每一活动的持续时间是一个随机变量, 且服从 β 分布, 给每个施工活动以 3 种估计时间, 即乐观估计时间 a 、悲观估计时间 b 和最可能估计时间 m , 然后, 分别计算得到每项活动持续时间的均值 $D_{ij} = (a + 4m + b)/6$ 和方差 $\sigma_{ij}^2 = (b - a)^2/36$ 。最后, 将不确定型网络计划问题转化为确定型网络计划问题来处理, 并用 CPM 法去计算期望工期和相应的时间参数, 以及相应于期望工期的完工概率。事实上, PERT 假设^[1] (a) 活动时间是相互独立的随机变量 (b) 网络计划图中路线的持续时间服从正态分布 (c) 网络计划图中只有一条路线(期望关键路线, 简称关键路线)占支配地位, 其它路线成为关键路线的概率可以忽略不计。于是, 可由每项活动持续时间的均值, 用 CPM 法计算期望工期 T_e , 并可通过下式计算完工概率 P 。

$$P(t \leq T_s) = \int_{-\infty}^{T_s} \frac{1}{\sigma_T \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t - T_e}{\sigma_T}\right)^2\right] dt \quad (1)$$

式中: T_s ——计划工期(或规定工期); σ_T ——关键线路上的标准差。对式(1)进行变换, 可得到式(2), 其中 λ 称难度系数^[2]。根据式(2)中的 λ 值, 由标准正态分布表可得到完工概率 P 。

$$\lambda = \frac{T_s - T_e}{\sigma_T} \quad (2)$$

实际上, 在上述 3 种假设中, 最后一种假设往往难以满足, 经常会出现两种情况: 一是有两条以上期望关键路线; 二是次关键路线和关键路线比较接近, 对整个进度计划的完工概率影响也比较大, 即期望关键路线并不占支配地位。因此, 对这两种情况, PERT 就受到挑战, 完工概率的计算问题值得进一步探讨。

MC(Monte Carlo)方法使上述可能会出现的问题得以解决, 并在小型工程中求期望工期和完工概率方面取得了成功^[3]。但也有其局限性, 表现在:

a. MC 方法只能得到期望工期 T_e 、总工期的概率分布, 并求出完工概率, 而不能描述网络计划内部的关键路线和关键活动的分布情况。因此, 无法详细指导具体施工活动的安排和对这类网络计划的调整。

b. 对于大型水利水电施工网络计划, 特别是当活动分得较细时, 活动的个数可能有成千上万, 此时若用 MC 方法分析计算, 对计算机的内存和速度的要求就比较高。因此, 探讨施工过程中逻辑关系确定、活动持续时间不确定的施工网络计划的完工概率的解析算法, 具有现实意义。

1 多条关键路线时 PERT 的完工概率

在不确定型网络计划中,当出现两条以上关键路线时,可分下列两种情况讨论.

a. 关键路线之间是独立的.把这种情况定义为:关键路线间既无共有的活动,也无共有的节点(或称事件)起始和终节点除外.

b. 关键路线之间是相关的.把这种情况定义为:有一些活动或节点被 1 条以上关键路线所共有,起始和终节点例外.

1.1 关键路线独立时 PERT 完工概率的计算

设有 $1, 2, 3, \dots, n$ 条关键路线,其完工概率可用式(1)计算,分别记为 $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$.由概率统计理论可知,多个相互独立随机事件,其同时发生的概率为他们独立发生的概率之积^[4],因而有整个进度计划的完工概率 $P(T \leq T_s)$ 为

$$P(T \leq T_s) = \prod_{i=1}^n p_i$$

(3)

1.2 关键路线相关时 PERT 完工概率的估算

对如图 1 所示的施工网络计划,若存在两条相关的关键路线,典型的有两种基本情况.

情况 1:在图 1 中,设有两条关键路线,分别为 0—1—2—4—5—7—8 和 0—1—3—4—5—7—8.

情况 2:在图 1 中,设有两条关键路线,分别是 0—1—2—⑩—①—③—4—5—7—8 和 0—1—2—4—5—7—8.

对情况 1,活动(0,1),(4,5)和(7,8)是两条关键路线所共有的.而这两条关键路线中,仅是活动(1,2)和(2,4),以及(1,3)和(3,4)分属于不同的路线,此时,可将网络图中的路线 1—2—4 或 1—3—4 进行修正.可用 1—2—4 修正 1—3—4,也可用 1—3—4 修正 1—2—4.这种修正主要取决于哪条路线的方差较大.考虑到计算结果的可靠性,应将方差较大的路线作为被修正者.

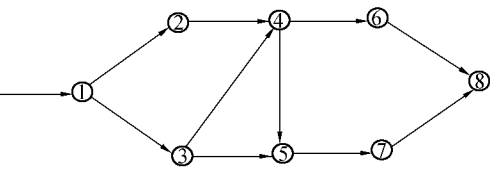


图 1 两条相关关键路线网络

Fig.1 A network for two correlative critical paths

对关键路线修正的办法是:在图 1 中取子网络,如图 2 所示.

显然,在图 1 的子网络图 2 中,路线 1—2—4 和路线 1—3—4 的期望持续时间同长,在节点 4 处,按期望最早开始时间 T_4 可能完工的概率 $P(T \leq T_4) = 0.25$.

假设在图 2 中节点 4 后,有唯一的紧后活动(4,4') (虚活动,持续时间非零),如图 2,而节点 4' 的紧后活动为原节点 4 后的所有紧后活动,则原网络计划的逻辑关系不变.设活动(4,4')的持续时间为 ΔT ,其方差为 0 . ΔT 用下列方法确定.

设路线 1—2—4—4' 和路线 1—2—4 有相同的分布,并使路线 1—2—4—4' (T_4') 实现路线 1—2—4 (T_4) 的概率为 P_4 ($P_4 = 0.25$),如图 3 所示.

此时 ΔT 可用下式计算:

$$\Delta T = \lambda \sigma_m$$

(4)

其中 λ 可由 $(1 - P_m)$ 的值经查标准正态分布表而得, m 为节点编号.此处 $m = 4$, σ_4 为路线 1—2—4 的标准差.

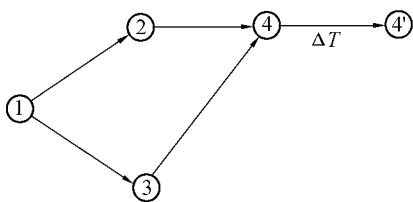


图 2 修正后的子网络

Fig.2 Modified sub-network

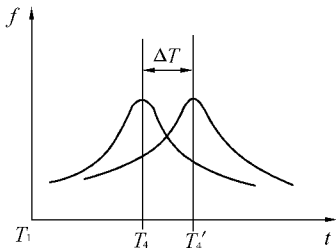


图 3 修正后的概率分布

Fig.3 Modified probability distribution

对于如图2所示的情形,从节点1到节点4若多条,如 n 条,等长路线时,其概率密度分布曲线平移量 ΔT 仍可用式(4)估算,不过此时查 λ 所用的 P_m 值应用式(3)计算.

求得 ΔT 后,只需将活动(4,4')加入到原网络计划图(图1)中,使原节点4后的紧后活动成为节点4'后的紧后活动.然后用式(1)或式(2)去求实现计划工期的完工概率.

在网络计划图中,若多处出现如图2所示子网络时,处理方法和上述相同.

对情况2,在图1中,显然活动(0,1)、(1,2)和(2,4)是共有的.对这种情况,同样可从图1中取出子网络,如图4.设路线4—6—8方差较大,则用路线4—5—7—8来修正路线4—6—8.

修正方法同前,设节点后有一紧后活动(8,8')虚活动,持续时间非零,如图4),使原节点8'成为终节点,并设(8,8')的持续时间为 ΔT ,方差为0.同样利用式(4)计算 ΔT ,原期望工期 T_e 加上 ΔT 后,得修正后的期望工期 T_e' ,将 T_e' 代入式(1)或式(2)计算整个进度计划的完工概率.

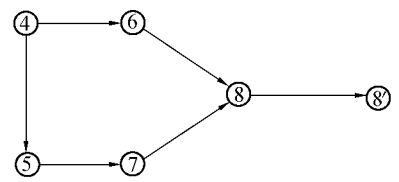


图4 修正后的子网络

Fig.4 Modified sub-network

2 考虑次关键路线时进度计划的完工概率

当次(期望)关键路线的持续时间和(期望)关键路线的持续时间比较接近时,次关键路线对整个进度计划完工概率的影响是不可忽视的.此处也有必要分两种情况讨论.

a. 关键路线和次关键路线相互独立,即关键路线和次关键路线上无共有活动或共有节点,起始和终节点除外.

b. 关键路线和次关键路线相关,即关键路线和次关键路线有共有活动或共有节点,起始和终节点例外.

2.1 次关键路线和关键路线相互独立时 PERT 完工概率的计算

由式(1)或式(2)可分别计算关键路线和次关键路线的完工概率,分别用 P_{cp} 和 P_{subcp} 表示.则由概率统计理论可知,多个相互独立的随机事件,其同时发生的概率为它们独立发生的概率之积.因而整个进度计划的完工概率 $P(T \leq T_s)$ 为

$$P(T \leq T_s) = P_{cp} P_{subcp} \quad (5)$$

显然,当 P_{subcp} 接近1时,其对整个进度计划的完工概率的影响可以忽略不计.

2.2 次关键路线和关键路线相关时 PERT 完工概率的估算

次关键路线和关键路线相关的典型情况仍有两种,如图1.

情况1:在图1中,设路线0—1—2—4—5—7—8为关键路线,0—1—3—4—5—7—8为次关键路线.

情况2:在图1中,设路线0—1—2—4—6—8为关键路线,0—1—2—4—5—7—8为次关键路线.

对情况1,可采用与处理多条关键路线相同的方法,在图1中取子网络,如图2所示.假设在图2中节点4后有唯一的紧后活动(4,4'),并使原节点4后的所有紧后活动成为节点4'的紧后活动,则原网络计划的逻辑关系不变.设活动(4,4')的持续时间为 ΔT ,其方差为0,但对节点4,按期望最早开始时间 T_4 可能完工的概率 $P_4(T \leq T_4)$ 应按式(6)计算.

$$P_m(T \leq T_m) = \frac{1}{2} P_{subcp}^{cp} \quad (6)$$

式中: m ——节点编号; P_{subcp}^{cp} ——次关键路线在节点 m 处转为关键路线的概率.由 P_m ,借助于式(4)计算 ΔT .将活动(4,4')加入原进度网络后,对情况1的处理即告结束.采用常规的CPM法即可计算时间参数的期望值.

对情况2,可取出子网络,如图4,在节点8后加入紧后活动(8,8'),用与情况1相同的处理方法,求(8,8')的持续时间 ΔT .采用常规的CPM法即可计算时间参数的期望值,并可借助于式(1)或式(2)计算网络计划的完工概率.

3 算 例

某水利水电工程施工网络计划如图1所示.活动 (i, j) 持续时间的估计值 (a, m, b) ,活动期望持续时间

D_{ij} 和标准差 σ_{ij} ,以及关键路线和次关键路线的情况见表 1 ,时间单位为月.本工程计划工期为 18 个月.

经分析计算 ,路线 0—1—2—4—6—8 是关键路线 ,其期望工期为 17.533 ,方差为 0.504 ,标准差为 0.710 .

路线 0—1—3—4—5—7—8 是次关键路线 ,其期望持续时间为 17.266 ,方差为 0.449 ,标准差为 0.670 .

表 1 活动期望持续时间 D_{ij} 和标准差 σ_{ij}

Table 1 Expected work duration D_{ij} and standard deviation σ_{ij}

(i,j)	a,m,b	D_{ij}	σ_{ij}^2	σ_{ij}	关键路线	次关键路线
0,1	1.0 2.0 2.9	1.983	0.090	0.317	✓	✓
1,2	2.0 3.0 4.0	3.000	0.111	0.333	✓	
1,3	2.5 3.0 3.5	3.000	0.028	0.167		✓
2,4	3.1 4.0 4.8	3.983	0.080	0.283	✓	
3,4	2.7 3.8 4.8	3.783	0.123	0.350		✓
3,5	1.5 2.0 2.6	2.017	0.034	0.183		
4,5	1.1 2.0 3.0	2.017	0.100	0.317		✓
4,6	3.0 4.0 5.1	4.017	0.123	0.350	✓	
5,7	2.1 3.0 3.8	2.983	0.080	0.283		✓
6,8	3.7 4.5 5.6	4.550	0.100	0.317	✓	
7,8	3.0 3.5 4.0	3.500	0.028	0.167		✓

当不考虑次关键路线对完工概率的影响时 ,直接用式(2)可计算 $\lambda = (18.0 - 17.533) / 0.710 = 0.6577$,查正态分布表 ,得完工概率 $P = 74.4\%$.

当不考虑关键路线影响时 ,同样可计算次关键路线的完工概率为 86.3% .显然 ,次关键路线对关键路线的影响不可不计.对图 1 ,用次关键路线对关键路线进行修正 ,需分两段进行.

第 1 段 :从图 1 中取出子网络 ,如图 2 ,用次关键路线 1—3—4 修正 1—2—4.

在图 2 中 ,路线 1—2—4 的期望持续时间为 6.983 ,方差为 0.191 ,标准差为 0.437 .路线 1—3—4 的期望持续时间为 6.783 ,方差为 0.151 ,标准差为 0.389 .由式(2)可计算路线 1—3—4 的 $\lambda = (6.983 - 6.783) / 0.389 = 0.514$,由正态分布表可查得次关键路线转为关键路线的概率为 69.6% .由式(6)得 P_4 ,并由 $1 - P_4 = 1 - 0.5 \times 69.6\% = 65.2\%$.查正态分布表 ,得 $\lambda = 0.390$.因此可得对 1—2—4 期望持续时间的修正值为 $\Delta T_1 = 0.390 \times 0.437 = 0.170$.

第 2 段 :从图 1 中取出子网络 ,如图 4 ,用次关键路线 4—5—7—8 修正关键路线 4—6—8.

在图 4 中 ,路线 4—6—8 的期望持续时间为 8.567 ,方差为 0.223 ,标准差为 0.472 .路线 4—5—7—8 的期望持续时间为 8.500 ,方差为 0.208 ,标准差为 0.456 .由式(2)可计算路线 4—5—7—8 的 $\lambda = (8.567 - 8.500) / 0.456 = 0.1469$,由正态分布表可查得次关键路线转为关键路线的概率为 55.8% .由式(6)得 $P_8 = 0.5 \times 55.8\% = 27.9\%$, $1 - P_8 = 72.1\%$,查正态分布表 ,得 $\lambda = 0.585$.因此可得对 1—2—4 期望持续时间的修正值为 $\Delta T_2 = 0.585 \times 0.472 = 0.276$.最后可得修正后的网络计划图 ,如图 5.

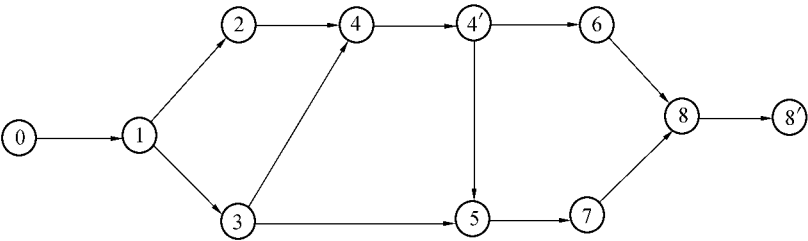


图 5 修正后的网络计划

Fig.5 Modified network schedule

通过计算 ,可得到修正后的关键路线的期望工期为 17.979 个月.由式(2)计算 $\lambda = (18.0 - 17.979) / 0.710 = 0.021$,查正态分布表 ,得工程施工计划的完工概率为 50.8% .

4 结 论

a. PERT 适用于施工活动逻辑关系确定、施工活动的持续时间不确定这类网络计划中某一条期望关键路线占支配地位的情况. 当出现多条期望关键路线或次期望关键路线与期望关键路线比较接近时, 这种方法就不适用. MC 方法能比较精确地计算期望关键路线的持续时间和完工概率, 但不能用于描述施工进度网络计划的细节.

b. 在水利水电工程施工进度计划或控制中, 人们不仅关心总施工进度计划的完工概率有多大, 同时也希望知道关键路线的分布以及有关施工活动的时间参数情况. 本文所介绍的方法能较好地满足这种需要.

c. 本文采用等效概率的方法对期望关键路线(工期)进行修正. 该方法的思路同样可用于讨论水利水电施工进度风险的解析计算.

参考文献:

- [1] 曹光明, 白思俊. 国外 PERT/CPM 网络计划技术发展的三个方面[J]. 系统工程理论与实践, 1993(3): 1~10.
- [2] 聂相田. 建设项目进度控制(第2版)[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 1998. 110~115.
- [3] 王卓甫, 陈登星. 水利水电施工进度计划的风险分析[J]. 河海大学学报, 1999, 27(4): 84~87.
- [4] 魏宗舒. 概率论与数理统计教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 1983. 129~145.

Study on Completion Probability with PERT for Hydropower Construction

WANG Zhuo-fu¹, YANG Gao-sheng¹, YANG Jian-ji¹, SHEN Zu-yi²

(1. College of International Industry and Commerce, Hohai Univ., Nanjing 210098, China;

2. College of Water Conservancy and Hydropower Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098, China)

Abstract: The limitation of the PERT in the planning of construction schedule is studied for two cases, where there are several critical paths, or the sub-critical path is close to the critical path. The relativity and non-relativity of the two cases are discussed respectively, and corresponding methods for calculation of completion probability are also proposed.

Key words: construction; schedule; critical path