DOI:10.3876/j.issn.1000-1980.2012.02.015

稳定渗流分析的局部间断伽辽金有限元法

何朝葵[1,2],速宝玉[1],盛金昌[1]

(1.河海大学水利水电学院,江苏 南京 210098;2.河海大学理学院,江苏 南京 210098)

摘要:针对稳定渗流分析问题的特征,依据局部间断伽辽金有限元法原理,推导出稳定渗流分析问题的局部间断迦辽金有限元法基本计算格式,并对该计算格式的有效性进行探讨.通过分析基本计算格式相应的变分形式,考虑变分形式中双线性算子的稳定性及有界性,利用Lax-Milgram定理论证这一基本计算格式解的存在性、唯一性,从而证明局部间断伽辽金有限元法可以用来处理稳定渗流分析问题.通过对该格式的解进行先验误差分析,证明其近似解具有 $p+1$ 阶的精度,表明相对于一般的有限元法来说,局部间断伽辽金有限元法是一种高精度的数值计算方法.

关键词:渗流;间断有限元;局部间断伽辽金有限元;误差分析

中图分类号:O357.3 **文献标志码**:A **文章编号**:1000-1980(2012)02-0206-05

Local discontinuous Galerkin finite element method for steady seepage analysis

HE Zhao-kui[1,2], SU Bao-yu[1], SHENG Jin-chang[1]

(1. *College of Water Conservancy and Hydropower Engineering*, *Hohai University*, *Nanjing* 210098, *China*;
2. *College of Sciences*, *Hohai University*, *Nanjing* 210098, *China*)

Abstract: Based on the characteristics of the steady seepage equation, a basic calculation formula of the local discontinuous Galerkin finite element method for steady seepage analysis was deduced according to the principle of the method, and the feasibility of the formula was studied. The variational formula of the basic formula was analyzed with consideration of the stability and boundedness of the bilinear operator in the variational formula. The Lax-Milgram theorem was used to verify the existence and uniqueness of the solution of the basic formula, in order to demonstrate that the local discontinuous Galerkin finite element method is applicable to steady seepage analysis. Through a priori error analysis, the formula was proved to have $p+1$-order accurate approximations, indicating that the local discontinuous Galerkin finite element method is a high-precision numerical method compared with commonly used finite element methods.

Key words: seepage; discontinuous finite element; local discontinuous Galerkin finite element method; error analysis

间断有限元法[1-3]是一种在有限元法、有限体积法和有限差分法基础上发展起来的数值计算方法,它的特点在于允许插值函数在剖分单元边界处不连续,使得其在处理大梯度问题上具有独特的优势,并使其在多个领域得到广泛的应用[2-4].国外部分学者对间断有限元法在椭圆问题上的应用进行了分析[5-6],国内则鲜见这方面的文献.局部间断伽辽金有限元法[2,7](the local discontinuous Galerkin methods,简称LDG法)是间断有限元法中最有效的方法之一,它具有良好的稳定性.笔者主要从理论上分析LDG法在稳定渗流分析问题中的应用.

1 渗流方程

稳定渗流方程及定解条件如下:

收稿日期:2011-06-10

基金项目:国家自然科学基金(50779012)

作者简介:何朝葵(1974—),男,湖南汝城人,讲师,博士研究生,主要从事渗流数值计算研究.E-mail:hzk@hhu.edu.cn

$$\begin{cases} \nabla \cdot (k \nabla H) = 0 & \text{在 } \Omega \text{ 中} \\ H_{\Gamma_D} = g_D \\ (\boldsymbol{n} \cdot k \nabla H)\Big|_{\Gamma_N} = g_N \end{cases} \tag{1}$$

式中:Ω——求解区域;H——水头函数;k——渗透系数(考虑各向同性,分片常数情形);Γ_D,Γ_N——第一类边界和第二类边界,且$\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$;$\boldsymbol{n}$——边界 Γ_N 上的外法线方向单位向量;g_D,g_N——常数.

2　LDG 法原理

把水力梯度 $\boldsymbol{\sigma} = k \nabla H$ 作为中间变量,则式(1)中的二阶方程化为一阶方程组:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \\ \boldsymbol{\sigma} = k \nabla H \end{cases} \tag{2}$$

假设 T_h 为 Ω 的 1 个剖分,E 表示其中的任意 1 个单元,$\boldsymbol{n}_E$ 表示 E 的单位外法线方向向量.用 $\boldsymbol{\sigma}_h$ 和 H_h 表示单元内插值函数,LDG 法允许插值函数在单元边界处不连续,故插值函数在单元边界上的值用数值流通量[1-3]替代.数值流通量定义如下:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_h\Big|_e = \begin{cases} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_h - \boldsymbol{\beta} \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_h - \alpha \widetilde{H}_h & e \in \Omega/\partial\Omega \\ \boldsymbol{\sigma}_h - \alpha (H_h - g_D)\boldsymbol{n} & e \in \Gamma_D \\ g_N \boldsymbol{n} & e \in \Gamma_N \end{cases} \qquad \hat{H}_h\Big|_e = \begin{cases} \bar{H}_h + \boldsymbol{\beta} \cdot \widetilde{H}_h & e \in \Omega/\partial\Omega \\ g_D & e \in \Gamma_D \\ H_h & e \in \Gamma_N \end{cases}$$

若 e 为单元 E 和单元 E′的公共边界,用 $\boldsymbol{n}_E$ 表示单元 E 在边界 e 上的外法线单位向量,$H_{h,E}$和 $\boldsymbol{\sigma}_{h,E}$分别表示 H_h 和 $\boldsymbol{\sigma}_h$ 在边界上单元 E 侧的值,则有

$$\bar{H}_h = \frac{H_{h,E} + H_{h,E'}}{2} \qquad \widetilde{H}_h = \boldsymbol{n}_E H_{h,E} + \boldsymbol{n}_{E'} H_{h,E'}$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_h = \frac{\boldsymbol{\sigma}_{h,E} + \boldsymbol{\sigma}_{h,E'}}{2} \qquad \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_h = \boldsymbol{n}_E \cdot \boldsymbol{\sigma}_{h,E} + \boldsymbol{n}_{E'} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{h,E'}$$

式中:α——边界 e 上的常数;$\boldsymbol{\beta}$——边界 e 上的常向量.

在式(2)中第 1 个方程两边分别乘以测试函数 v,在第 2 个方程两边分别乘以测试向量函数 $\boldsymbol{\tau}$,然后在每个单元上积分,得

$$\int_{\partial E} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_h \cdot \nabla_h v \mathrm{d}A + \int_{\partial E} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_h \cdot \boldsymbol{n}_E v \mathrm{d}s = 0 \tag{3}$$

$$\int_E \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{\tau} \mathrm{d}A + \int_E k_E H_h \nabla_h \cdot \boldsymbol{\tau} \mathrm{d}A - \int_{\partial E} \hat{k} \boldsymbol{\tau} \cdot \hat{H}_h \boldsymbol{n}_E \mathrm{d}s = 0 \tag{4}$$

$$\hat{k}\Big|_e = \begin{cases} \max(k_E, k_{E'}) & e \in \partial E \cap \partial E' \\ k_E & e \in \partial E \cap \partial\Omega \end{cases}$$

式中:∇_h——单元内梯度算子;k_E——单元 E 的渗透系数.

单元方程(式(3)和式(4))通过数值流通量建立联系,构成整体代数方程.

3　基本计算格式

相对于剖分 T_h,ε 表示剖分单元边界的集合,ε_0 表示区域内部的单元边界的集合,ε_D 表示在 Γ_D 上的单元边界的集合,ε_N 表示在 Γ_N 上的单元边界的集合,要求 $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_D + \varepsilon_N$.把式(3)和式(4)相对于剖分 T_h 在求解域 Ω 上对所有单元叠加,整理得

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \nabla_h v \mathrm{d}A = \int_{\varepsilon_0} (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_h - \boldsymbol{\beta} \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_h - \alpha \widetilde{H}_h) \cdot \tilde{v} \mathrm{d}s + \int_{\varepsilon_D} (\boldsymbol{\sigma}_h - \alpha (H_h - g_D)\boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{n} v \mathrm{d}s + \int_{\varepsilon_N} g_N v \mathrm{d}s \tag{5}$$

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{\tau} \mathrm{d}A = \int_\Omega k \nabla_h H_h \cdot \boldsymbol{\tau} \mathrm{d}A + \int_{\varepsilon_0} \hat{k} (\boldsymbol{\beta} \cdot \widetilde{H}_h \tilde{\boldsymbol{\tau}} - \widetilde{H}_h \bar{\boldsymbol{\tau}}) \mathrm{d}s + \int_{\varepsilon_D} \hat{k} (g_D - H_h) \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \mathrm{d}s \tag{6}$$

式(5)和式(6)就称为渗流问题的 LDG 法基本计算格式.

4 变分形式的稳定性和有界性

若引入3个算子 $\int_\Omega R(\boldsymbol{\varphi})\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}A=-\int_{\varepsilon_0}\boldsymbol{\varphi}\cdot\bar{\tau}\mathrm{d}s$,$\int_\Omega R_1(\phi)\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}A=-\int_{\varepsilon_D}\phi\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s$,$\int_\Omega L(\phi)\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}A=\int_{\varepsilon_0}\phi\tilde{\tau}\mathrm{d}s$,则由式(6)可得 $\boldsymbol{\sigma}_h$ 在有限元空间 $\sum_h$ 上的 L^2 投影:

$$\boldsymbol{\sigma}_h=\prod(k\nabla_h H_h+\hat{k}R(\widetilde{H}_h)+\hat{k}L(\boldsymbol{\beta}\cdot\widetilde{H}_h)+\hat{k}R_1(H_h-g_D)) \tag{7}$$

式中 $\prod$ 为投影算子.把式(7)代入式(5),整理得基本计算格式的变分形式为

$$B_h(H_h,v)=F_h(v) \tag{8}$$

其中

$$\begin{aligned}B_h(H_h,v)=&\int_\Omega(k^{\frac{1}{2}}\nabla_h v+\hat{k}^{\frac{1}{2}}R(\tilde{v})+\hat{k}^{\frac{1}{2}}L(\boldsymbol{\beta}\cdot\tilde{v})+\hat{k}^{1/2}R_1(v))\\&(k^{\frac{1}{2}}\nabla_h H_h+\hat{k}^{\frac{1}{2}}R(\widetilde{H}_h)+\hat{k}^{\frac{1}{2}}L(\boldsymbol{\beta}\cdot\widetilde{H}_h)+\hat{k}^{\frac{1}{2}}R_1(H_h))\mathrm{d}A+\\&\alpha\int_{\varepsilon_0}\widetilde{H}_h\cdot\tilde{v}\mathrm{d}s+\alpha\int_{\varepsilon_D}H_h v\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$F_h(v)=\int_\Omega\hat{k}R_1(g_D)(\nabla_h v+R(v)+L(\boldsymbol{\beta}\cdot\tilde{v}))\mathrm{d}A-\alpha\int_{\varepsilon_D}g_D v\mathrm{d}s+\int_{\varepsilon_N}g_N v\mathrm{d}s$$

显然 $B_h(H_h,v)$ 是对称双线性算子.为证明变分的稳定性和有界性,定义如下半范数和范数[8-10]:

$$|u|^2_{1,\Omega}=\sum_{E\in T_h}k_E|u|^2_{1,E}\qquad|u|^2_*=\|\hat{k}^{1/2}\tilde{u}\|^2_{0,\varepsilon_0}+\|\hat{k}^{1/2}u\|^2_{0,\varepsilon_D}\qquad|||u|||^2_\Omega=|u|^2_{1,\Omega}+|u|^2_*$$

式中 $\|u\|^2_{l,E}$ 和 $|u|^2_{l,E}$ 分别为单元E上的Sobolev范数和半范数.在证明之前,先看下面的引理[9].

引理

$$\|\hat{k}^{1/2}(R(\tilde{v})+L(\boldsymbol{\beta}\cdot\tilde{v})+R_1(v))\|^2_{0,\Omega}\leqslant C|v|^2_* \tag{9}$$

其中 C 是与h无关的常数.

证明

$$\begin{aligned}&\|\hat{k}^{1/2}(R(\tilde{v})+L(\boldsymbol{\beta}\cdot\tilde{v})+R_1(v))\|_{0,\Omega}=\\&\sup_{\tau\in(L^2(\Omega))^2}\frac{(\hat{k}^{1/2}(+R(\tilde{v})+L(\boldsymbol{\beta}\cdot\tilde{v})+R_1(v)),\boldsymbol{\tau})}{\|\boldsymbol{\tau}\|_{0,\Omega}}\leqslant\\&\sup_{\tau\in(L^2(\Omega))^2}\frac{\left(\sum_{E\in T_h}\sum_{e\in\partial E}\|h^{1/2}\hat{k}^{-1/2}\prod(\hat{k}^{1/2}\boldsymbol{\tau})\|^2_{0,e}\right)^{1/2}(\|\tilde{v}\|^2_{0,\varepsilon_0}+\|v\|^2_{0,\varepsilon_D})^{1/2}}{\|\boldsymbol{\tau}\|_{0,\Omega}}\end{aligned}$$

再由 L^2 投影的稳定性可得不等式(9).

利用引理可以得 $B_h(H_h,v)$ 的稳定性,即对 $\forall v\in V_h$ 有

$$\begin{aligned}B_h(v,v)=&\int_\Omega k\nabla_h v\cdot\nabla_h v\mathrm{d}A+2\int_\Omega\hat{k}\nabla_h v(R(\tilde{v})+L(\boldsymbol{\beta}\cdot\tilde{v})+R_1(v))\mathrm{d}A+\\&\int_\Omega\hat{k}(R(\tilde{v})+L(\boldsymbol{\beta}\cdot\tilde{v})+R_1(v))^2\mathrm{d}A+\int_{\varepsilon_0}\alpha\tilde{v}\cdot\tilde{v}\mathrm{d}s+\int_{\varepsilon_D}\alpha v^2\mathrm{d}s\geqslant\\&(1-\zeta)\int_\Omega k\nabla_h v\cdot\nabla_h v\mathrm{d}A+\left(1-\frac{1}{\zeta}\right)\int_\Omega\hat{k}(R(\tilde{v})+L(\boldsymbol{\beta}\cdot\tilde{v})+R_1(v))^2\mathrm{d}A+\\&\int_{\varepsilon_0}\alpha\tilde{v}\cdot\tilde{v}\mathrm{d}s+\int_{\varepsilon_D}\alpha v^2\mathrm{d}s\geqslant C_1|||v|||^2_\Omega\end{aligned} \tag{10}$$

同样利用引理亦可得到 $B_h(v,v)$ 的有界性,即对 $\forall v,w\in V_h$ 有

$$\begin{aligned}B_h(w,v)=&\int_\Omega k\nabla_h v\cdot\nabla_h w\mathrm{d}A+\int_\Omega\hat{k}\nabla_h v\cdot(R(\tilde{w})+L(\boldsymbol{\beta}\cdot\tilde{w})+R_1(w))\mathrm{d}A+\\&\int_\Omega\hat{k}(R(\tilde{v})+L(\boldsymbol{\beta}\cdot\tilde{v})+R_1(v))\nabla_h w\mathrm{d}A+\end{aligned}$$

$$\int_{\Omega}\hat{k}(R(\tilde{v})+L(\boldsymbol{\beta}\cdot\tilde{v})+R_1(v))(R(\tilde{w})+L(\boldsymbol{\beta}\cdot\tilde{w})+R_1(\omega))\mathrm{d}A+$$
$$\alpha\int_{\varepsilon_0}\tilde{w}\cdot\tilde{v}\mathrm{d}s+\alpha\int_{\varepsilon_D}wv\mathrm{d}s$$

结合引理有

$$\int_{\Omega}\hat{k}\nabla_h v\cdot(R(\tilde{w})+L(\boldsymbol{\beta}\cdot\tilde{w})+R_1(w))\mathrm{d}A=\sum_{e\in\varepsilon_0\cup\varepsilon_D}\int_e\hat{k}\nabla_h v\cdot(R(\tilde{w})+L(\boldsymbol{\beta}\cdot\tilde{w})+R_1(w))\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\left(\sum_{e\in\varepsilon_0}kh_e\int_e(\nabla_h v)^2\mathrm{d}s\right)^{1/2}\left(\sum_{e\in\varepsilon_0\cup\varepsilon_D}h_e^{-1}k\int_e(R(\tilde{w})+L(\boldsymbol{\beta}\cdot\tilde{w})+R_1(w))^2\mathrm{d}s\right)^{1/2}\leqslant$$
$$C\left(\sum_{E\in T_h}|v|_{1,E}^2\right)^{1/2}\left(\sum_{e\in\varepsilon_0\cup\varepsilon_D}h_e^{-1}\hat{k}\int_e(R(\tilde{w})+L(\boldsymbol{\beta}\cdot\tilde{w})+R_1(w))^2\mathrm{d}s\right)^{1/2}\leqslant C|||v|||_{\Omega}|w|_*$$

因而

$$|B_h(w,v)|\leqslant|v|_{1,\Omega}|w|_{1,\Omega}+C'|||v|||_{\Omega}|w|_*+C''|||w|||_{\Omega}|v|_*+$$
$$C'''|v|_*|w|_*\leqslant C_2|||v|||_{\Omega}|||w|||_{\Omega}\tag{11}$$

根据 Lax-Milgram 定理知变分问题 $B_h(H_h,v)=F_h(v)$ 存在唯一解.

5　误 差 估 计

设 H 为渗流问题(式(1))的解,H_I 为相对剖分 T_h 下的某一插值函数,则由插值函数局部估计有

$$|H-H_I|_{s,E}\leqslant Ch_E^{p+1-s}|H|_{p+1,E}\qquad(\forall E\in T_h,s=0,1,2)\tag{12}$$

其中的常数 C 仅与插值函数的次数 p 和单元 E 的最小角度有关.为了得到 LDG 法数值解误差的 L_2 估计,先看 2 个定理[11]：

定理 1　若 H 为式(1)的解,H_I 为 H 的某个插值函数,则存在正数 C 使得式(13)成立.

$$|||H-H_I|||_{\Omega}\leqslant C\sum_{E\in T_h}h_E^p|H|_{p+1,E}\tag{13}$$

证明

$$|||H-H_I|||_{\Omega}^2=|H-H_I|_{1,\Omega}^2+|H-H_I|_*^2=|H-H_I|_{1,\Omega}^2+$$
$$\|\hat{k}^{1/2}(\tilde{H}-\tilde{H}_I)\|_{0,\varepsilon_0}^2+\|\hat{k}^{1/2}(H-H_I)\|_{0,\varepsilon_D}^2=$$
$$|H-H_I|_{1,\Omega}^2+\sum_{E\in T_h}\sum_{e\in E}\hat{k}\|(H-H_I)\|_{0,e}^2$$

由迹不等式知存在常数 C,使得

$$|||H-H_I|||_{\Omega}\leqslant C\sum_{E\in T_h}h_E^p|H|_{p+1,E}\tag{14}$$

定理2　若 H 为式(1)的解,H_h 为式(8)的解,则存在正数 C 使得式(15)成立.

$$|||H-H_h|||_{\Omega}\leqslant C\sum_{E\in T_h}h_E^p|H|_{p+1,E}\tag{15}$$

证明　设 H_I 为 H 的分片插值函数,由式(11)和式(12)有

$$C_1|||H_I-H_h|||_{\Omega}^2\leqslant B_h(H_I-H_h,H_I-H_h)=B_h(H_I-H+H-H_h,H_I-H_h)=$$
$$B_h(H_I-H,H_I-H_h)\leqslant C_2|||H_I-H|||_{\Omega}|||H_I-H_h|||_{\Omega}$$

所以 $|||H_I-H_h|||_{\Omega}\leqslant\dfrac{C_2}{C_1}|||H_I-H|||_{\Omega}$,再由三角不等式 $|||H-H_h|||_{\Omega}=|||H-H_I+H_I-H_h|||_{\Omega}\leqslant|||H-H_I|||_{\Omega}+|||H_I-H_h|||_{\Omega}$,结合定理 1 得式(15).

由定理 1 和定理 2 可得到误差的 L_2 估计.

定理 3　若 H 为式(1)的解,H_h 为式(8)的解,则存在正数 C 使得式(16)成立.

$$\|H-H_h\|_{0,\Omega}\leqslant Ch^{p+1}|H|_{p+1,\Omega}\tag{16}$$

证明　由于 LDG 法的数值流通量是守恒的,因而变分格式(8)是自相容的,即对 $\forall v\in H^2(T_h)$ 有 $B_h(v,\psi)=\int_{\Omega}vg\mathrm{d}A$,其中 ψ 为方程 $-\Delta\psi=g,(x,y)\in\Omega$ 以及 $\psi=0,(x,y)\in\partial\Omega$ 的解[10].若取 $g=H-H_h$,则

有 $B_h(v,\psi)=(H-H_h,v),\forall v\in V_h$. 设 ψ_I 为 ψ 的线性插值,则

$$\|H-H_h\|_{0,\Omega}^2=B_h(H-H_h,\psi)=B_h(H-H_h,\psi-\psi_I)\leqslant$$
$$C_1 |||H-H_h|||_\Omega\cdot |||\psi-\psi_I|||_\Omega\leqslant C_1 h|\psi|_{2,\Omega}\cdot |||H-H_h|||_\Omega$$

根据椭圆边值问题的正则性,有 $|\psi|_{2,\Omega}\leqslant C_2\|H-H_h\|_{0,\Omega}$,其中常数 C_2 只与 Ω 有关. 结合式(15)即得 $\|H-H_h\|_{0,\Omega}\leqslant Ch^{p+1}|H|_{p+1,\Omega}$.

6 结 语

间断有限元法已推广到水动力、气动力学等多个领域. 笔者通过对稳定渗流分析的局部间断伽辽金有限元法的理论分析,给出其计算格式,并论证说明该格式具有良好的稳定性. 论证结果表明,运用局部间断伽辽金有限元法来处理稳定渗流分析是有效的. 在运用本文格式计算时,可以通过选取正交的基函数来简化整体代数方程组. 对这一方法的近似解进行的先验误差分析表明其具有 $p+1$ 阶精度,所以相对于一般的有限元法来说,局部间断伽辽金有限元法是一种具有较高精度的数值计算方法. 关于局部间断伽辽金有限元法在渗流问题上的一些具体计算及验证可见文献[12],其他一些结论笔者正在整理中.

参考文献:

[1] REED W H, HILL T R. Triangular mesh methods for the neutron transport equation[R]. Alamos: Los Alamos Scientific Laboratory, 1973.

[2] COCKBURN B, KAMIADAKIS G, SHU Chi-wang, et al. Discontinuous Galerkin Methods[M]. Berlin: Spring Verlag, 2000: 89-101.

[3] 刘儒勋, 舒其望. 计算流体力学的若干新方法[M]. 北京: 科学出版社, 2003: 159-179.

[4] FAGHERAZZI S, FURBISH D J, RASETARINERA P, et al. Application of the discontinuous spectral Galerkin method to groundwater flow[J]. Advances in Water Resources, 2004, 27: 129-140.

[5] ARNOLD D N, BREZZI F, COCKBURN B, et al. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems[J]. SIAM J Numer Anal, 2002, 39(5): 1749-1779.

[6] CASTILLO P. Performance of discontinuous Galerkin methods for elliptic pde's[J]. SIAM J Sci Comput, 2002, 24(2): 524-547.

[7] COCKBURN B, SHU Chi-wang. The local discontinuous Galerkin finite element method for convection-diffusion systems[J]. SIAM J Numer Anal, 1998, 35: 2440-2463.

[8] CASTILLO P, PERUGIA I, SCHOTZAU D. An a priori error analysis of the local discontinuous Galerkin method for elliptic problems[J]. SIAM J Numer Anal, 2000, 38: 1676-1706.

[9] PERUGIA I, SCHOTZAU D. An h^p-analysis of the local discontinuous Galerkin method for diffusion problems[J]. J Sci Comp, 2002, 17: 561-571.

[10] 肖捷, 刘韶鹏. 求解间断系数椭圆型问题的一种改进的 DG 方法[J]. 计算数学, 2007, 29(4): 377-390. (XIAO Jie, LIU Shao-peng. A modified DG method for elliptic problems with discontinuous coefficients[J]. Journal of Cumputational Mathematics, 2007, 29(4): 377-390. (in Chinese)).

[11] LEE M A, SHIN J Y. Error estimiates for a discontinuous Galerkin method for elliptic problems[J]. Appl Math & Computing, 2006, 21(1/2): 189-201.

[12] 何朝葵, 速宝玉, 盛金昌, 等. 用局部间断伽辽金有限元法分析渗流场[J]. 水利水电科技进展, 2010, 30(2): 21-23. (HE Zhao-kui, SU Bao-yu, SHENG Jin-chang, et al. Analysis of seepage field for aquifer problems by the local discontinuous Galerkin method[J]. Advances in Science and Technology of Water Resources, 2010, 30(2): 21-23. (in Chinese)).