

单面边坡高程放大效应的射线理论解

石 崇,周家文,任 强,周先齐

(河海大学岩土工程科学研究所,江苏 南京 210098)

摘要 利用平面射线理论和方法,推导出单面边坡地震的高程放大效应理论解,可用于描述边坡临空面对地震波的反射,反映边坡的高程放大效应.边坡的高程放大效应是由于边坡自由面的反射作用形成的.动弹性模量、泊松比、坡度及入射波频率的综合作用导致高程放大系数稀疏相间、节律变化,入射频率越高,节律性越明显,极值点也越多;自然边坡由于受自由面反射、岩体界面的折反射作用,其值可能远大于坡脚的振动效应.

关键词 高程放大效应;单面边坡;射线理论;地震;反射

中图分类号:TU3113 文献标识码:A 文章编号:1000-1980(2008)02-0238-04

只有一个自由面的边坡称为单面边坡.1971 年美国 Davis 等在 San Fernando 地震的余震测量中发现山顶的地震加速度比山脚成倍地增长^[1],高野秀夫通过斜坡地震观测发现斜坡上的地震烈度相对于谷底约增加 1 度,角度超过 15°的圆锥状山体的上部点位移幅值与下部点相比,局部谱段位移增加 7 倍^[2].王存玉等^[3]通过室内试验,何蕴龙等^[4,6]等采用数值模拟研究了边坡性态对动力反应量的分布影响,均证明了边坡高程放大效应的存在.但迄今为止对边坡高程放大效应的研究仍然停留在工程经验与数值模拟上,并没有合适的理论解来描述^[7].

由于地震波的传播速度、走时、距离、射线路径及性态等反映了介质的动力学性质^[8-9],这些特性取决于边坡界面、岩体的分层构造及介质的性质.本文利用波动力学原理,采用射线理论计算动力响应,是刻画边坡动力放大系数的有效途径,从理论上对边坡的高程放大效应进行了系统分析.

1 单面边坡反射能量分配

在平面波入射条件下,如果弹性分界面为光滑平面,射线理论严格成立,存在精确的解析解形式.边坡动力响应分析一般采用水平向荷载,因此假设入射波为横波(S 波),其平面谐振波的位移场可写为

$$U^{(n)} = A_n d^{(n)} \exp(ik_n \eta_n) \quad (1)$$

其中 $k_n = \omega / C_n$ $\eta_n = \mathbf{x} \cdot \mathbf{p}^{(n)} - C_n t$

式中; $\mathbf{p}^{(n)}$ ——波的传播方向矢量; $d^{(n)}$ ——波的位移矢量; $n = 0, 1, 2$ ——入射 S 波、反射 P 波、反射 S 波; k_n ——波数; C_n ——第 n 波场的波速; A_n ——位移幅值; ω ——入射波圆频率; \mathbf{x} ——坐标矢量; t ——时间; $U^{(n)}$ ——各波场位移矢量.

如图 1 所示,假设 S 波以与自由面法线方向成 α 角入射,根据弹性波散射理论可知,入射波在界面点 A、B 处均产生波场分解现象,分解为同类型的反射 S 波和转换型反射 P 波.在突变界面处射线方向满足斯奈尔(Snell)定理^[8].若入射角为 α ,S 波反射角仍为 α ,P 波反射角 β 满足如下关系:

$$\sin \alpha / C_S = \sin \beta / C_P \quad (2)$$

式中 C_P, C_S 为纵波、横波传播速度.

由式(1)对于平面简谐 S 波,入射波振幅为 A_0 ,反射 P 波振幅为 A_P ,反射 S 波振幅为 A_S ,则自由面上 P 波和 S 波的位移反射系数可分别定义为 $R_d = A_P / A_0, B_d = A_S / A_0$.

根据射线理论,并考虑平面波在界面上的扩散效应,P 波和 S 波的位移反射系数 R_d 和 B_d 分别满足如下关系:

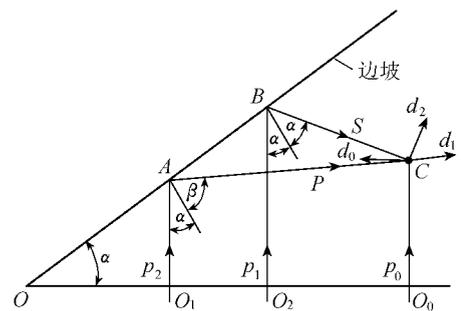


图 1 边坡波场叠加模型

Fig. 1 Model of superimposition slope wave fields

$$R_d = \frac{-K \sin 4\alpha}{K^2 \cos^2 2\alpha + \sin 2\beta \sin 2\alpha} \sqrt{\frac{\cos \beta}{\cos \alpha}} \quad B_d = \frac{\sin 2\alpha \sin 2\beta - K^2 \cos^2 2\alpha}{\sin 2\alpha \sin 2\beta + K^2 \cos^2 2\alpha} \quad (3)$$

其中

$$K = C_p / C_s$$

式中 K 为纵横波速比.

$$\text{若式(1)对时间项求导数得} \quad \mathbf{V}^{(n)} = -i\omega \mathbf{U}^{(n)} \quad \mathbf{G}^{(n)} = -i\omega^2 \mathbf{U}^{(n)} \quad (4)$$

式中: $\mathbf{V}^{(n)}$ ——各波场速度矢量; $\mathbf{G}^{(n)}$ ——各波场加速度矢量.

由于 $k_n C_n = \omega$ 为常数, 则速度、加速度反射系数满足:

$$R_v = R_a = R_d \quad B_v = B_a = B_d \quad (5)$$

式中下标 v, a, d 分别表示速度、加速度、位移.

根据式(3), 只有当 S 波入射角 α 小于临界角 $\arcsin(1/K)$ 时, 纵波反射角 β 方为实数, 研究中以坡角不超过临界角为限. 该式由平面谐波推导得出, 但是由于地震时函数可视为若干平面谐波的线性叠加, 所以对平面波场具有普适性.

2 边坡内质点振动的波场叠加

对于均质单斜边坡, 边坡地形对地震动波传播的影响主要体现在不同坡度的坡面对地震波产生不同程度和不同方向的反射, 各种类型的波相互叠加形成复杂的地震波场, 从而影响边坡的变形与破坏.

根据波传播的几何学原理, 图 1 所示经过质点 C 的射线有 3 条, 即自 O_1 点入射经坡面反射的 P 波 AC 、自 O_2 点入射经坡面反射的 S 波 BC 和自 O_0 点入射的 S 波 O_0C . 根据波场叠加原理, C 点的位移场为

$$u(t) = u_0(t) + u_1(t) + u_2(t) \quad (6)$$

不妨将式(1)中入射位移波波函数设为 $f(t)$, 则 C 点的各位移场可写为

$$u_0(t) = f(t - t_0) \quad u_1(t) = R_d f(t - t_1) \quad u_2(t) = B_d f(t - t_2) \quad (7)$$

式中: t_0 ——入射 S 波从 O_0 点直接到达 C 点的时间; t_1 —— O_1 点入射 S 波经坡面反射后转化为 P 波到达 C 点的时间; t_2 —— O_2 点入射 S 波经坡面反射后同类 S 波到达 C 点的时间; $u_0(t), u_1(t), u_2(t)$ ——3 类波场的位移矢量, 其方向如图 1 中 d_0, d_1, d_2 所示.

设坐标系原点位于 O 点, C 点坐标为 (x, y) , 则各波场的延时时间分别为

$$\begin{cases} t_0 = \frac{y}{C_s} \\ t_1 = \frac{|x \tan \alpha - y| \cos \alpha}{C_p \cos \beta} \left[1 + \cos(\alpha + \beta) \frac{C_p}{C_s} \right] + \frac{y}{C_s} \\ t_2 = \frac{|x \tan \alpha - y|}{C_s} [1 + \cos(2\alpha)] + \frac{y}{C_s} \end{cases} \quad (8)$$

根据射线的几何关系, C 点水平及垂直位移分别为

$$u_{\text{水平}} = -u_0 + u_1 \sin(\alpha + \beta) + u_2 \cos(2\alpha) \quad u_{\text{垂直}} = -u_1 \cos(\alpha + \beta) + u_2 \sin(2\alpha) \quad (9)$$

则边坡内 C 点的位移高程放大系数为

$$\eta_d = \frac{\sqrt{\max |[-u_0 + u_1 \sin(\alpha + \beta) + u_2 \cos 2\alpha]| + \max |[-u_1 \cos(\alpha + \beta) + u_2 \sin 2\alpha]|}}{\max |u_0|} \quad (10)$$

式中: η ——放大系数; $\max |u_0|$ ——输入波幅值.

当入射波为单一谐波时可得速度放大系数, 加速度放大系数为 $\eta_v = \eta_a = \eta_d$. 这就是边坡高程放大效应的理论解. 在不考虑系统阻尼的情况下, 边坡内质点位移、速度、加速度的放大系数是一致的, 这与数值模拟的结果有所不同. 当入射波为不平稳地震波时, 由于受数值微积分的影响, 位移、速度、加速度主频依次增大, 放大系数并不相等.

3 高程放大效应参数分析

为了描述地震波传播引起的边坡高程放大效应, 采用位移波函数 $f(t) = A_0 \sin(2\pi ft)$ 作为入射波, 频率 $f = 10 \text{ Hz}$, 入射波振幅 $A_0 = 1$. 根据式(10)即可求出边坡内各质点的边坡高程放大效应.

由式(11)及弹性波理论, 纵波、横波波速可由弹性模量与泊松比得到. 当边坡倾角确定时, 根据斯奈尔定

律,由岩体的波速可求出纵波反射角,因此根据式(2)式(8)~(10)可以得出,坡角确定条件下的边坡高程放大效应是由边坡岩体的弹性模量与泊松比决定的。

$$C_P = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)}} \quad C_S = \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho}} \quad (11)$$

图2为分别采用不同弹性模量、泊松比、倾角下的位移高程放大效应等值线,其计算参数见表1。图2均表现为节律变化、疏密相间的特征。这是由于反射纵波、横波与入射波相互叠加造成的。当某一范围内反射纵波、横波的影响达到极大值时,边坡的高程放大效应也达到极大值。如图2(a)与图2(b)所示,当边坡岩体的弹性模量下降为原来的一半时,高程放大效应的极值位置基本保持不变,但节律变化的等值线变得更加致密,边坡上部值有所减小。如图2(c)与图2(a)所示,泊松比下降20%时,等值线的疏密程度变化不大,但高程放大效应出现的极值位置上移,在边坡内形成一条带状区域,在该区域内高程放大效应基本相同。如图2(d)与图2(a)所示,当边坡倾角由30°下降至20°时,高程放大效应自边坡内部向外逐渐增大,极值区域接近边坡面,此时边坡面上的振动效应最为明显。可以预见,随着边坡高度的升高,边坡内质点的高程放大效应呈现节律性的多条带状分布。

表1 高程放大效应计算参数

Table 1 Parameters of elevation amplification effect

方案	动弹性模量 E/GPa	动泊松比 ν	岩体密度 ρ/(t·m ⁻³)	边坡倾角 α/(°)	入射频率/ Hz
A	20	0.25	2.65	30	10
B	10	0.25	2.65	30	10
C	20	0.20	2.65	30	10
D	20	0.20	2.65	20	10
E	20	0.25	2.65	30	50

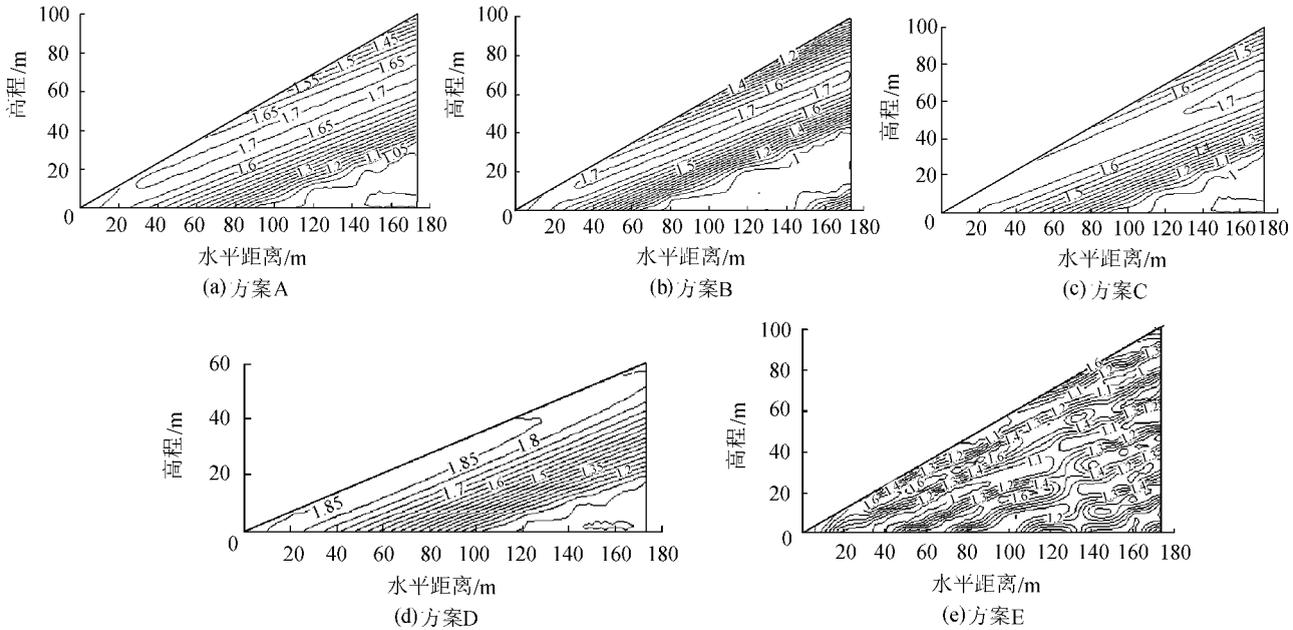


图2 边坡高程放大效应

Fig.2 Elevation amplification effect on the slope

高频入射波的振幅变化比低频波更迅速,引起的高程放大效应更加复杂。与入射频率10 Hz相比,入射频率50 Hz的波在边坡内产生的高程放大效应数值偏小,出现的律动位置更多。这与工程实践中低频波破坏效应更大的事实相符。

高程放大效应中的极值点分布除与岩体力学参数及坡角有关外,根据图2(a)~(c)中的节律现象判断,还应受输入波频率的影响。其出现的位置,可由偏导数原理解:

$$\frac{\partial \eta_d}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial \eta_d}{\partial y} = 0 \quad (12)$$

对(12)进行化简可得式(13)(14):

$$KRu'_1|_{t_1} \frac{\sin \alpha}{C_P \cos \beta} [1 + \cos(\alpha + \beta)] - u_0 \sin(\alpha + \beta) + u_1 + u_2 \sin(\beta - \alpha) + Bu'_2|_{t_2} \frac{-\tan \alpha}{C_S} (1 + \cos 2\alpha) - u_0 \cos 2\alpha + u_1 \sin(\beta - \alpha) + u_2 = 0 \quad (13)$$

$$\frac{u'_0|_{t_0}}{C_S} [u_0 - u_1 \sin(\alpha + \beta) + u_2 \cos 2\alpha] + u'_1|_{t_1} \frac{\cos \alpha [1 + K \cos(\alpha + \beta) + K \cos \beta]}{\cos \beta} [- u_0 \sin(\alpha + \beta) + u_1 + u_2 \sin(\beta - \alpha)] + u'_2|_{t_2} \frac{2 + \cos 2\alpha}{C_S} [- u_0 \cos 2\alpha + u_1 \sin(\beta - \alpha) + u_2] = 0 \quad (14)$$

式(13)(14)并不包含边坡坐标分量,因此当坡角和波的传播速度确定时高程放大效应的极值点取决于各波场的位移与速度波形.当坡内质点同时满足式(13)(14)时,该点恰好为一个极值点.但由于边坡面一般是非常复杂的,由此计算出的节律点公式非常复杂,不仅涉及岩体力学参数,与入射波的频率也密切相关.综合以上因素可知,边坡内的律动现象与波长有关,这与文献[5]中数值模拟及量纲分析结果非常接近.

4 结 论

边坡高程放大效应是由于坡面反射叠加形成的.地震波的传播速度、走时、距离、射线路径及性态等反映了介质的动力学性质,可以用来计算边坡质点的位移高程放大效应,与数值模拟的结果^[1]一致,证明了该理论解的正确性.

a. 根据射线理论解, S 波入射条件下边坡内任意质点的位移(速度、加速度)波由入射 S 波、反射 P 波和反射 S 波叠加而成;不同波场到达质点的延时不同,导致边坡内高程放大效应呈现节律性变化.低频波作用下高程放大系数稀疏相间、节律变化,入射频率越高,节律性越明显,极值点也越多.

b. 岩体参数和边坡倾角是影响边坡高程放大效应的主要因素,尤其在低频波作用下,不仅会影响高程放大效应的数值,也影响其极大值的分布.

c. 由于不考虑阻尼影响,射线理论解比文献[1]中数值模拟的结果偏高.由于自然边坡的坡面并非平面,边坡质点的高程放大效应受坡面散射、断层折反射的影响要复杂得多,受这些自由面与接触面的影响,自然边坡内的高程放大效应可能比单面边坡要高得多,这在工程实践中已经得到了证实^[1-5,10].

参考文献:

- [1] 祁生文. 边坡动力响应分析及应用研究[D]. 北京: 中国科学院地质与地球物理研究所, 2002.
- [2] 丁彦慧. 中国西部地区地震滑坡预测方法研究[D]. 北京: 中国地质大学, 1997.
- [3] 王存玉. 地震条件下二滩水库岸坡稳定性研究[C]//岩体工程地质力学问题(七). 北京: 科学出版社, 1987.
- [4] 何蕴龙, 陆述远. 岩石边坡地震作用近似计算方法[J]. 岩土工程学报, 1998, 20(2): 66-68.
- [5] 祁生文. 单面边坡的两种动力反应形式及其临界高度[J]. 地球物理学报, 2006, 49(2): 518-523.
- [6] 祁生文, 伍法权, 刘春玲, 等. 地震边坡稳定性的工程地质分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(16): 2792-2797.
- [7] 洪海春, 徐卫亚. 地震作用下岩质边坡稳定性分析综述[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(增1): 4827-4836.
- [8] 范留明, 闫娜, 李宁. 薄弹性软弱夹层的动力响应模型[J]. 岩石力学与工程学报, 2006, 25(1): 88-92.
- [9] 黎在良, 刘殿魁. 固体中的波[M]. 北京: 科学出版, 1995.
- [10] 许名标, 彭德红. 小湾水电站边坡开挖爆破震动监测成果分析[J]. 人民长江, 2007, 38(2): 135-138.

Ray theory solution of the elevation amplification effect on a single-free-face slope

SHI Chong, ZHOU Jia-wen, REN Qiang, ZHOU Xian-qi

(Research Institute of Geotechnical Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: Planar ray theory is used to deduce the analytic solution of the elevation amplification effect on a single-free-face slope in seismic engineering. It is proved that the solution can describe the reflection effect of seismic waves on the free face of the slope and reflect the elevation amplification effect. It is shown that the surface reflection induces the amplification effect. Dynamic Young's modulus, Poisson's ratio, gradient and incident wave frequency are all contributing factors of the elevation amplification coefficient, which has intervals of rough and fine contour and rhythmic variation. Rhythmicity and the number of extreme points increases with the increase of the incident frequency. A natural slope is under reflection of free faces, refraction and reflection of rock interfaces, and the elevation amplification effect may be greater in single-free-face slope than at the foot of the slope.

Key words: elevation amplification effect; single-free-face slope; ray theory; seism; reflection