第 30 卷第 1 期
2002 年 1 月

河 海 大 学 学 报
JOURNAL OF HOHAI UNIVERSITY

Vol.30 No.1
Jan. 2002

大江大河多断面水位实时预报的半自适应模型研究

李致家[1],尹开霞[1],杨　涛[1],何翠敏[2]

(1.河海大学水文水资源及环境学院,江苏 南京　210098;2.滁州市城西水库管理处,安徽 滁州　239000)

摘要:把河道水位计算公式线性化后的矩阵方程作为系统方程,建立了卡尔曼滤波的状态方程和量测方程.根据滤波方面的理论研究提出了适用于河道多断面水位实时预报的卡尔曼半自适应滤波模型.在该模型中量测误差系列的协方差矩阵可以通过信息更新系列实时地估计出来,只有模型误差系列的协方差矩阵需要预先给出.以淮河鲁台子—小柳巷河段为例对该模型进行检验,并与其它方法进行比较,验证结果说明了该模型的合理性.

关键词:动量方程;扩散波;河道水位预报;半自适应滤波

中图分类号:P338　　文献标识码:A　　文章编号:1000-1980(2002)01-0019-05

水位是河道防洪中的关键指标.在洪水预报中,水文学的水位预报方法常采用水位—流量转化或者上、下游水位相关方法,水力学方法采用一维非恒定流的数值解法.在水文测验中,水位是最容易得到而且也是误差最小的变量,相比之下,流量则是最难量测的.因此,在洪水预报中如何利用好水位这个变量就是一个重要的研究课题.在防洪中有时仅仅预报水位就够了,但涉及到分洪、蓄洪等问题时必须要预报流量,所以在实际洪水预报中要兼顾到流量与水位的预报.实时洪水预报中,水位上、下游相关方法有一定的预报精度,但缺陷是没有与流量联系起来.对于大江大河,水力学方法存在过多的断面要求和精度问题.针对这些问题,有些学者提出了水文学与水力学相结合的方法.我国在大江大河的河道洪水预报中马斯京根流量演算法是广为采用的方法,因此把马斯京根法与其它的水位预报方法结合起来就可以组成完整的预报方法.本文主要讨论将马斯京根法应用于河道进行流量预报之后如何进行实时的水位预报.

1　水 位 预 报

在河道流量已经实时预报出来之后,要进行水位预报可以采用圣维南方程组中的动量方程.在动量方程中,对于大江大河,一般惯性项与其它项相比要小两个数量级,可以忽略,摩阻项采用曼宁公式,经此简化有

$$\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{n^2 Q^2}{A^2 R^{4/3}} = 0 \tag{1}$$

式(1)即为扩散波方程中的动量方程.对该式采用四点隐式差分,以 i,j 分别表示空间(沿河道)和时间的离散,j 时段的水位已知,待求的是 $j+1$ 时段的水位.对于子河段[i,$i+1$]经过推导和整理有

$$Z_{i+1}^{j+1} - Z_i^{j+1} = P_i - D_i^{j+1} - D_{i+1}^{j+1} \tag{2}$$

其中

$$D_i^{j+1} = \frac{\Delta x_i}{2\theta}\left(\frac{n^2 Q^2}{A^2 R^{4/3}}\right)_i^{j+1} \tag{3}$$

$$D_{i+1}^{j+1} = \frac{\Delta x_i}{2\theta}\left(\frac{n^2 Q^2}{A^2 R^{4/3}}\right)_{i+1}^{j+1} \tag{4}$$

$$P_i = \frac{(1-\theta)}{\theta}(Z_{i+1}^j - Z_i^j) \tag{5}$$

式中:θ——权重,$\theta = 0.5 \sim 1.0$;P_i——已知数;D_i^{j+1}——Z_i^{j+1}的函数;D_{i+1}^{j+1}——Z_{i+1}^{j+1}的函数.对于一个河道,

收稿日期:2001-01-16
基金项目:高等学校骨干教师资助计划项目(2000506433)
作者简介:李致家(1962—),男,山西运城人,教授,博士生导师,主要从事水文模型与洪水预报研究.

如果离散化成 $n-1$ 个子河段,则有 $n-1$ 个方程、n 个未知变量. 显然,需要增加边界条件. 大江大河的洪水波一般属于缓流,需要已知下边界的水位. 下边界的水位可以采用水位–流量的单一线或者预先给定的绳套曲线求得.

采用式(2)推求各个断面的水位有两种方法. 其一是逐个断面推求[1]:假定下断面的水位 Z_{i+1}^{j+1} 已知,式(2)为

$$Z_i^{j+1} + \left(P_i - D_{i+1}^{j+1} - Z_{i+1}^{j+1}\right) - D_i^{j+1} = 0 \tag{6}$$

上式为 Z_i^{j+1} 单调函数,可以采用迭代法求解. 在实时洪水预报中,当水位求出之后,如果某个断面有实测的水位,就可以采用单站误差自回归的方法对该站进行实时校正. 上述方法的缺陷是在实时洪水预报中校正仅在有实测水位的断面进行,其它没有实测水位断面的预报值则无法校正. 为了克服这个缺陷,下面提出了河道洪水水位实时预报卡尔曼半自适应模型.

2 水位预报的系统方程和量测方程

采用卡尔曼滤波进行水位预报,首先要把式(6)写成滤波所需要的状态方程,对于非线性方程要线性化. 式(6)是水位的非线性函数,需要线性化. 为了与滤波中的记号一致,把表示时段的标记 j 改记为 k. 利用泰勒展开,对于子河段 $[i, i+1]$,可以得到

$$D_i^{k+1} = D_i^k + \frac{\partial D_i^k}{\partial Z_i}\left(Z_i^{k+1} - Z_i^k\right) \tag{7}$$

$$D_{i+1}^{k+1} = D_{i+1}^k + \frac{\partial D_{i+1}^k}{\partial Z_{i+1}}\left(Z_{i+1}^{k+1} - Z_{i+1}^k\right) \tag{8}$$

代入式(6),整理后有

$$\left(1 + \frac{\partial D_{i+1}}{\partial Z_{i+1}}\right) Z_{i+1}^{k+1} + \left(-1 + \frac{\partial D_i}{\partial Z_i}\right) Z_i^{k+1} = \left(-\frac{1-\theta}{\theta} + \frac{\partial D_{i+1}}{\partial Z_{i+1}}\right) Z_{j+1}^k + \left(\frac{1-\theta}{\theta} + \frac{\partial D_{i+1}}{\partial Z_i}\right) Z_i^k - D_i^k - D_{i+1}^k \tag{9}$$

对于最后一个子河段 $[n-1, n]$ 方程为

$$\left(-1 + \frac{\partial D_{n-1}}{\partial Z_{n-1}}\right) Z_{n-1}^{k+1} = \left(\frac{1-\theta}{\theta} + \frac{\partial D_{n-1}}{\partial Z_{n-1}}\right) Z_{n-1}^k - D_{n-1}^k - D_n^k - \frac{1-\theta}{\theta} Z_n^k - Z_n^{k+1} \tag{10}$$

式(9)与式(10)可以合成矩阵方程

$$\boldsymbol{X}^{k+1} = \boldsymbol{F}_{k+1,k} \boldsymbol{X}^k + \boldsymbol{E}_{k+1} \tag{11}$$

式中

$$F = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \qquad E = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 + \frac{\partial D_1}{\partial Z_1} & 1 + \frac{\partial D_2}{\partial Z_2} & & \cdots & 0 \\ 0 & -1 + \frac{\partial D_2}{\partial Z_2} & 1 + \frac{\partial D_3}{\partial Z_3} & \cdots & 0 \\ \square & \square & \square & \square & \square \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 + \frac{\partial D_n}{\partial Z_n} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \frac{1-\theta}{\theta} + \frac{\partial D_1}{\partial Z_1} & \frac{\theta-1}{\theta} + \frac{\partial D_2}{\partial Z_2} & & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1-\theta}{\theta} + \frac{\partial D_2}{\partial Z_2} & \frac{\theta-1}{\theta} + \frac{\partial D_3}{\partial Z_3} & \cdots & 0 \\ \square & \square & \square & \square & \square \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1-\theta}{\theta} + \frac{\partial D_n}{\partial Z_n} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \left(-D_1^k - D_2^k - \cdots - D_{n-2}^k - D_{n-1}^k, -\frac{1-\theta}{\theta} Z_n^k - Z_n^{k+1} - D_{n-1}^k - D_n^{k+1}\right)^{\mathrm{T}}$$

$$X^{k+1} = (Z_1^{k+1}, Z_2^{k+1}, \cdots, Z_{n-1}^{k+1})^{\mathrm{T}}$$

式(11)就是系统的状态方程，X 是状态变量.假定系统方程误差序列是独立的、服从正态分布的随机变量.量测方程比较简单，可以认为水位的测量误差系列服从独立的正态分布，设在整个河道中有 m 个实测的水位站.根据以上推导和假定，完整卡尔曼滤波的系统和量测方程如下：

$$\boldsymbol{X}^{k+1} = \boldsymbol{F}_{k+1,k}\boldsymbol{X}^k + \boldsymbol{E}_{k+1} + \boldsymbol{W}_{k+1} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{Y}^{k+1} = \boldsymbol{H}_{k+1}\boldsymbol{X}^{k+1} + \boldsymbol{V}_{k+1} \tag{13}$$

式中：Y^{k+1}——m 维的量测变量；$\boldsymbol{W}_{k+1}$——n 维的模型误差向量；$\boldsymbol{V}_{k+1}$——m 维的量测误差向量；$\boldsymbol{H}_{k+1}$——$m \times n$ 维的量测矩阵.

3　河道多断面水位实时预报的半自适应滤波模型

假定 $\boldsymbol{W}_K$ 和 $\boldsymbol{V}_K$ 是相互独立的白噪声，$E[\boldsymbol{W}_K]=0$，$E[\boldsymbol{W}_K\boldsymbol{W}_L]=\boldsymbol{Q}_K\delta_{KL}(\boldsymbol{Q}_K \geqslant 0)$，$E[\boldsymbol{V}_K]=0$，$E[\boldsymbol{V}_K\boldsymbol{V}_L]=\boldsymbol{R}_K\delta_{KL}(\boldsymbol{R}_K>0)$，$\boldsymbol{Q}_K$ 和 $\boldsymbol{R}_K$ 已知，可以采用一般的卡尔曼滤波递推方程进行实时预报[2].一般卡尔曼滤波递推模型用于实际的洪水预报存在几个问题：(a) $\boldsymbol{Q}_K$ 和 $\boldsymbol{R}_K$ 要预先已知；(b)如果 $\boldsymbol{Q}_K$ 和 $\boldsymbol{R}_K$ 估计的偏差较大，$E[\boldsymbol{W}_K] \neq 0$.由于增益矩阵 $\boldsymbol{G}_K$ 的估计完全依赖于 $\boldsymbol{Q}_K$ 和 $\boldsymbol{R}_K$，而实际上要比较精确地估计 $\boldsymbol{Q}_K$ 和 $\boldsymbol{R}_K$ 是很困难的.使用一般滤波递推模型于实时洪水预报容易引起预报值发散(或者偏离真值)，所以应当研究如何实时地估计 $\boldsymbol{Q}_K$ 和 $\boldsymbol{R}_K$，这就是自适应滤波模型.如果系统是定常的，系统噪声 $\boldsymbol{W}_K$ 和量测噪声 $\boldsymbol{V}_K$ 是平稳的随机过程，那么在系统的过渡过程结束之后，$\boldsymbol{P}_K$ 和 $\boldsymbol{G}_K$ 都将是常数.在这种情况下，可以推导出自适应的滤波模型①.而实际上：(a)由于河道水位是非平稳的随机过程，系统噪声 $\boldsymbol{W}_K$ 和量测噪声 $\boldsymbol{V}_K$ 一般也是非平稳的随机过程.(b)相对于其它的学科，洪水预报中的取样时间间隔 Δt 较大和样本容量较小，滤波系统在涨洪段很难达到平稳.即使要达到平稳也要到退水段.由于这些原因，在航天系统中行之有效的一些自适应滤波方法在实时洪水预报中无法直接使用.

关于如何估计 $\boldsymbol{W}_K$ 和 $\boldsymbol{V}_K$ 的统计特性有很多的研究[3]，其中有一个结论值得我们借鉴：如果状态变量的维数 n 大于量测变量的维数 m，$\boldsymbol{R}_K$的统计特性可以全部实时地估计出来，而 $\boldsymbol{Q}_K$ 的统计特性却不能全部估计出来；如果 n 等于 m，$\boldsymbol{R}_K$ 和 $\boldsymbol{Q}_K$ 的统计特性可以全部实时地估计出来.实际河道中要预报的断面总是多于有实测资料的断面，所以从理论上来讲无法把 $\boldsymbol{Q}_K$ 的统计特性全部估计出来.由于这样的原因滤波模型叫做半自适应滤波模型.

假定 $\boldsymbol{Q}_K$ 已知，半自适应滤波模型完整的递推公式如下：

$$\bar{\boldsymbol{V}}_K = \frac{K-1}{K}\bar{\boldsymbol{V}}_{K-1} + \frac{1}{K}(Z_K - \boldsymbol{H}_K\boldsymbol{X}_{K/(K-1)}) \tag{14}$$

$$\boldsymbol{v}_K = \boldsymbol{Y}_K - \boldsymbol{H}_K\boldsymbol{X}_{K/(K-1)} - \bar{\boldsymbol{V}}_K \tag{15}$$

$$\bar{\boldsymbol{R}}_K = \frac{\boldsymbol{K}-1}{K}\bar{\boldsymbol{R}}_{K-1} + \frac{1}{K}(\boldsymbol{v}_K\boldsymbol{v}_K^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{H}_K\boldsymbol{P}_{K/(K-1)}\boldsymbol{H}_K) \tag{16}$$

$$G_K = \boldsymbol{P}_{K/(K-1)}\boldsymbol{H}_K[\boldsymbol{H}_K\boldsymbol{P}_{K,K-1}\boldsymbol{H}_K + \boldsymbol{R}_K]^{-1} \tag{17}$$

$$\boldsymbol{X}_{K/K} = \boldsymbol{X}_{K/(K-1)} + \boldsymbol{G}_K\boldsymbol{v}_K \tag{18}$$

$$\boldsymbol{P}_{K/K} = (I - \boldsymbol{G}_K\boldsymbol{H}_K)\boldsymbol{P}_{K/(K-1)} \tag{19}$$

$$\bar{\boldsymbol{W}}_{(K+1)/K} = \frac{K-1}{K}\bar{\boldsymbol{W}}_{K/(K-1)} + \frac{1}{K}(\boldsymbol{G}_K\boldsymbol{v}_K + \bar{\boldsymbol{W}}_{K/(K-1)} \tag{20}$$

$$\boldsymbol{X}_{(K+1)/K} = \boldsymbol{F}_{K+1,K}\boldsymbol{X}_{K/K} + \boldsymbol{E}_K + \bar{\boldsymbol{W}}_{(K+1)/K} \tag{21}$$

$$\boldsymbol{P}_{(K+1)/K} = \boldsymbol{F}_{K+1,K}\boldsymbol{P}_{K/K}\boldsymbol{F}_{F+1,K} + \boldsymbol{Q}_{(K+1)/K} \tag{22}$$

4　模型的检验

4.1　河道水文及资料情况简介

淮河中下游正阳关—小柳巷河道长 245 km.河道中有鲁台子、吴家渡和小柳巷 3 个水文站，10 个水位站，

①O'connell P E，Todini E．Real-time hydrological forecasting and control．Proceedings of 1st International Workshop，1977.4～29.

区间有5条支流汇入.沿着河道两岸有13个行洪区,其中6个在北岸,7个在南岸.南岸有一个蓄洪区,在北岸涡河口有一条新开的怀洪新河分洪道.根据水文站,水位站,支流汇入,行、蓄洪区的分洪口和出洪口的位置及河道情况,整个河道分为32个子河段(33个断面).表1是河道的分段情况.

从1968年至1997年的资料中挑选了16次洪水资料,吴家渡的流量资料较全,小柳巷仅有1982,1983,1987年3次洪水的实测流量.

表1 河道分段特征

Table 1 Characteristics of each sub-channel

断面号	断面名称	距离/m	行洪区		断面号	断面名称	距离/m	行洪区	
			北岸	南岸				北岸	南岸
1	寿西湖上口门				18	上 桥	2825		
2	鲁台子	2169		寿	19	怀远(蒙城)	5891		
3	董峰湖上口门	8540	董	西	20	蚌埠闸上	5485		
4	寿西湖下口门	3273	峰	湖	21	蚌埠闸下	255		
5	董峰湖下口门	8561	湖		22	吴家渡	8958		
6	风台(峡山口)	717			23		7499		方丘湖
7	西肥闸	1397			24	潢河口	9556		
8	灯草窝	7644			25		3621	临北镂堤	
9	上六堤坊上口门	2565	上六		26	临淮关	9622		
10	下六堤坊上口门	6741	堤坊		27		7202		
11	石姚段上口门	14865		石姚段	28		20257		
12	汤渔湖上口门	7079	汤		29		6700		
13	淮 南	2750	渔		30	五 河	6105		香浮段
14	洛河洼上口门	7305	湖	洛河洼	31		21860		
15	汤渔湖下口门	6165			32	浮 山	2156		
16	荆山湖上口门	4355	荆山		33	小柳巷	6867		潘村洼
17	荆山湖下口门	20688	湖						

4.2 模型的建立与参数率定

由于本文研究水位问题,限于篇幅有关流量演算模型和参数参见文献[4].在每次洪水水位预报之前,采用流量演算模型预报出每个断面的流量过程.在水位预报中,下边界吴家渡站的水位预报采用单一的 $H \sim Q$ 关系,其它断面水位的预报采取两种方法:方法1为逐个断面预报;方法2为半自适应滤波模型.水位预报模型中,要率定的参数是各个河段的糙率,在模型中全部取0.021.

4.3 结果分析

由于方法1是比较成熟的,所以本文的研究集中在对方法2与方法1进行比较.表2是两次洪水采用两种水位预报方法进行水位模拟的结果比较.表3是两种方法对1982年7月17日至9月6日洪水水位在不同时段进行实时预报的结果比较,在计算中选择11个断面的水位进行特征值统计.可以看出,方法2(滤波方法)的精度要高一些.

表2 两种水位预报方法对两次洪水水位模拟的结果比较

Table 2 Comparison of simulated results by two different forecasting models

洪水年份	水位预报方法	平均确定性系数	平均洪峰水位误差/m
1982	方法1	0.83	0.25
	方法2	0.85	0.09
1987	方法1	0.67	0.14
	方法2	0.65	0.19

注:1983年洪水有两个站的实测水位有问题,故没有参加比较.

表3 两种水位预报方法对1982年7月17日至9月6日洪水预报的结果比较

Table 3 Comparison of simulated results of the flood forecasting for Jul.17 to Sep.6,1982

进行实时修正的开始时段	水位预报方法	平均确定性系数	平均洪峰水位误差/m
10	方法1	0.83	0.25
	方法2	0.87	0.15
50	方法1	0.82	0.32
	方法2	0.89	0.28
60	方法1	0.83	0.20
	方法2	0.90	0.18

5 结　　论

本文提出和讨论了河道洪水水位实时预报的半自适应滤波模型.通过验证和应用说明了该模型的合理性.但这仅是一个初步的研究工作,为了使模型完善还有许多工作要做,如自适应滤波的有效性、其它各个断面预报精度对于边界条件的依赖性、水位预报精度对于流量预报精度的依赖性、滤波的收敛性等问题还需进一步研究.

另外,应当指出的是:(a)淮河中游由于行蓄洪区的应用使得水文情况复杂,给预报带来一定的难度;(b)实时修正是建立在原来预报模型基础上的,首先应当率定好原来的水文与水力学模型.

参考文献:

[1] 李树英,吴捷.动态系统的滤波方法[M].广州:广东科技出版社,1983.100~132.
[2] 章燕申.最优估计与工程应用[M].北京:宇航出版社,1991.406~420.
[3] 李致家.具有行蓄洪区的河道洪水演算方法探讨[J].水科学进展,1997(3):65~70.
[4] 李致家.河道洪水实时预报的半自适应模型[J],水科学进展,1998(4):372~377.

A Semi-Adaptive Model of Real Time Channel Flood Stage Forecasting for Large Rivers

LI Zhi-jia[1], YIN Kai-xia[1], YANG Tao[1], HE Cui-min[2]

(1. *College of Water Resources and Environment*, *Hohai Univ.*, *Nanjing* 210098, *China*;
2. *Chuzhou Reservoir Management Bureau*, *Chuzhou* 239000, *China*)

Abstract: A Semi-adaptive Kalman filter updating model of real time channel flood stage forecasting for large rivers is developed. In the model, a state-space formula is established based on the linearization of the momentum equation in the Saint Venant equations. The covariance matrix of measurement errors can be estimated through real time information updating, while the covariance matrix of model errors needs to be preassigned. With the Lutaizi Xiaoliuxiang section of the Huaihe River as an example, the model is tested and compared with other methods, and the reasonability of the model is verified.

Key words: momentum equation; diffusive wave; channel stage forecasting; semi-adaptive filter