基于柔度法的一次超静定刚架加载全过程分析

樊友景[1],李大望[2],李会知[1]

(1.郑州大学土木工程学院,河南 郑州　450002;2.深圳大学土木工程学院,广东 深圳　518060)

摘要:为了研究超静定结构的弹塑性性能,用柔度法的基本原理,对一次超静定刚架在集中荷载作用下的加载全过程进行了弹塑性分析.分析结果表明,受力变形过程可分为 3 个阶段:弹性阶段;固定端处截面附近产生塑性变形到形成塑性铰阶段;固定端处截面附近弹塑性区卸载到刚结点处截面形成塑性流动阶段.给出了塑性铰处的相对转角及其引起的位移的计算方法,推导了加载各阶段的荷载、弯矩和位移计算公式.

关键词:超静定刚架;柔度法;弹塑性;塑性铰;极限状态

中图分类号:TU323.3　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1000-1980(2007)05-0529-05

超静定刚架在工程结构中应用广泛.一些学者曾对单跨梁进行了弹塑性分析,但多是利用数值方法[1-4],或是在分析时疏忽了已形成塑性铰处的相对转动对位移的影响[5].目前,对超静定刚架加载的全过程分析一般采用增量变刚度法[6-9],不考虑弹塑性区的影响,将非线性问题转化为分阶段的线性问题处理,没有进行超静定刚架在各阶段的受力变形特点分析及位移计算.

本文利用柔度法的基本原理对图 1 所示超静定刚架在集中荷载作用下的加载全过程进行弹塑性分析,推出加载各阶段的荷载、弯矩和位移的计算公式,给出塑性铰处的相对转角及其引起位移的计算方法,为超静定刚架的强度和刚度计算提供参考.

柔度法的基本体系如图 2 所示.由平衡条件得到适用于各个阶段的弯矩表达式为

$$\begin{cases} M(x_1) = Rx_1 & (0 \leqslant x_1 \leqslant l) \\ M(x_2) = Rl - Px_2 & (0 \leqslant x_2 \leqslant l) \end{cases} \tag{1}$$

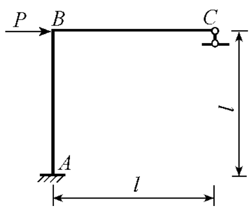

图 1　超静定刚架结构

Fig.1　Statically indeterminate frame structure

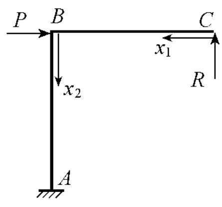

图 2　柔度法基本体系

Fig.2　Basic system for flexibility method

弯矩里侧受拉取正.式中的多余未知力 R 由位移条件(柔度法方程)式(2)确定:

$$\Delta_1 = 0 \tag{2}$$

式中 Δ_1 是柔度法基本体系中 C 点的竖向位移.

由于在结构受力变形的不同阶段建立位移条件的方法不同,因此,多余未知力 R 与荷载 P 的关系也不同.在确定各个变形阶段的 R 与 P 的关系后,可进一步分析结构的受力和变形.

1　弹性阶段(阶段 1)

假设各构件均是理想弹塑性材料的矩形截面构件;b, h, σ_s 分别为构件的宽、高和材料屈服极限;M_e =

收稿日期:2007-03-02

基金项目:国家自然科学基金资助项目(50478050)

作者简介:樊友景(1954—),男,河南中牟人,副教授,主要从事力学及结构非线性分析研究.

$\frac{bh^2}{6}\sigma_s$,$M_u=\frac{bh^2}{4}\sigma_s$ 分别为截面的弹性极限弯矩和塑性极限弯矩.

当荷载 P 足够小时,整个结构处于弹性阶段,由叠加法得到柔度方程为

$$\Delta_1 = \delta_{11}R + \Delta_{1P} = 0 \tag{3}$$

由结构力学解得弹性解答为

$$R = \frac{3P}{8} \qquad M_B = \frac{3Pl}{8} \qquad M_A = -\frac{5Pl}{8}$$

本阶段结束时,$M_A=-M_e$,则

$$P_e = \frac{8M_e}{5l} \qquad M_B = \frac{3M_e}{5} \qquad R = \frac{3M_e}{5l} \qquad \Delta_e = \frac{7M_el^2}{30EI}$$

式中 EI 是各杆的弹性抗弯刚度.

2 A 截面出现塑性变形到形成塑性铰阶段(阶段 2)

本阶段结构属于弹塑性超静定结构,柔度方程(2)不能再由叠加法建立.

随着荷载增大,首先在 A 截面附近区段外缘产生塑性变形,内核仍处于弹性状态,称这种区段为弹塑性区段,其他区段为弹性区段.在弹性阶段结束时,虽然 $M_A/M_u=2/3$ 略大于 $M_B/M_e=3/5$,但是,当 A 截面附近出现塑性区后,M_A 增长放慢.因此,M_B 首先达到 M_e,然后 M_A 达到 M_u.本阶段曲率 K 和弯矩 M 的关系如下[7]:

$$K = \begin{cases} M/EI & \text{(弹塑区段)} \\ \dfrac{K_e}{\sqrt{3-2|M|/M_e}}\operatorname{sign}M & \text{(弹塑性区段)} \end{cases} \tag{4}$$

2.1 A 截面附近区域出现塑性变形到 B 处达到弹性极限状态阶段(阶段 2.1)

基本体系在 P 和 R 共同作用下的弹塑性阶段的弯矩函数仍为式(1),弯矩如图 3 所示,弹塑性区域边界 D 截面的坐标 a_1 由 $M_D=-M_e$ 得

$$a_1 = \frac{Rl + M_e}{P} \tag{5}$$

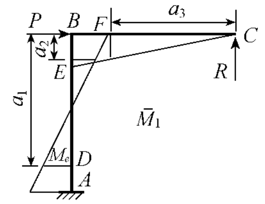

图 3 弹塑性阶段弯矩

Fig.3 Bending moment diagram at elastoplastic stage

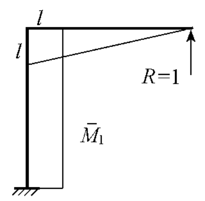

图 4 单位荷载弯矩 $\bar{M}_1$

Fig.4 Unit-load bending moment diagram $\bar{M}_1$

为了由柔度方程(2)求出这一阶段的多余未知力 R,利用单位荷载法,由单位弯矩图 $\bar{M}_1$(图 4)和弹塑性阶段的弯矩(图 3)及式(4)求得多余未知力 R 方向的位移为

$$\Delta_1 = \sum\int \bar{M}_1 K\mathrm{d}x = \int_0^l \frac{Rx_1^2}{EI}\mathrm{d}x_1 + \int_0^{a_1} l\,\frac{Rl - Px_2}{EI}\mathrm{d}x_2 - \int_{a_1}^{l} \frac{lK_e\mathrm{d}x_2}{\sqrt{3-2(Px_2-R_Al)/M_e}} \tag{6}$$

将式(5)及 $K_e=M_e/EI$ 代入式(6)积分,整理后代入柔度方程式(2),得

$$2RPl^2 + 3R^2l^2 - 9M_e^2 + 6M_e^{3/2}\sqrt{3M_e - 2Pl + 2Rl} = 0 \tag{7}$$

式(7)为图 1 超静定刚架在本阶段 R 与 P 的关系,可见 R 与 P 是非线性关系.给定荷载 P,就可由式(7)求出多余未知力 R,也就能由式(1)求出梁的弯矩,再进一步求出梁上任意点的位移.

设本阶段结束时 P 和 R 分别为 P_1 和 R_1.由 $M_B=M_e$ 得

$$R_1 = M_e/l \tag{8}$$

联立求解方程(7),(8)得

$$R_1=\frac{M_e}{l}\qquad P_1=2.4853\,\frac{M_e}{l}\tag{9}$$

将式(9)代入式(1)和式(5)得

$$\begin{cases}M(x_1)=\dfrac{M_e}{l}x_1 & (0\leqslant x_1\leqslant l)\\ M(x_2)=M_e\left(1-2.4853\,\dfrac{x_2}{l}\right) & (0\leqslant x_2\leqslant l)\end{cases}\tag{10}$$

$$M_A=-1.4853M_e\qquad a_1=0.8136l$$

画出虚拟的单位荷载弯矩图 $\bar{M}_2$ 如图 5 所示，得到本阶段结束时刚架的侧移 Δ_{B1} 为

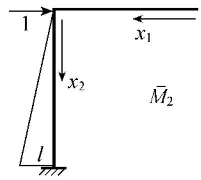

图 5　单位荷载弯矩 $\bar{M}_2$

Fig.5　Unit-load bending moment diagram $\bar{M}_2$

$$\Delta_{B1}=\sum\int\bar{M}_2K\mathrm{d}x=-\left(\int_0^{a_1}x_2\left(1-2.4853\,\frac{x_2}{l}\right)\mathrm{d}x_2+\right.$$

$$\left.\int_{a_2}^{l}\left(\frac{x_2\mathrm{d}x_1}{\sqrt{3-2(2.4853x_2/l-1)}}\mathrm{d}x_1\right)\frac{M_e}{EI}\right)=0.4164\,\frac{M_el^2}{EI}\tag{11}$$

2.2　B 截面出现弹塑性变形到 A 截面形成塑性铰阶段(阶段 2.2)

本阶段 A 截面和 B 截面附近均形成弹塑性区域，基本体系在 P 和 R 共同作用下的弯矩如图 3 所示.弹塑性区边界截面 D，E 和 F 的弯矩达到 M_e. D 截面的坐标由式(5)确定，E，F 截面的坐标 a_2，a_3 可由 $M_E=M_F=M_e$ 得

$$a_2=\frac{R_Al-M_e}{P}\qquad a_3=\frac{M_e}{R}\tag{12}$$

类似式(6)求得多余未知力 R 方向的位移为

$$\Delta_1=\sum\int\bar{M}_1K\mathrm{d}x=\int_0^{a_3}\frac{Rx_1^2}{EI}\mathrm{d}x_1+\int_{a_3}^{l}\frac{x_1K_e\mathrm{d}x_1}{\sqrt{3-2Rx_1/M_e}}+\int_0^{a_2}\frac{lK_e\mathrm{d}x_2}{\sqrt{3-2(Rl-Px_2)/M_e}}+$$

$$\int_{a_2}^{a_1}l\,\frac{Rl-Px_2}{EI}\mathrm{d}x_2-\int_{a_1}^{l}\frac{lK_e\mathrm{d}x_2}{\sqrt{3-2(Px_2-R_Al)/M_e}}\tag{13}$$

将式(5)和式(12)及 $K_e=M_e/EI$ 代入式(13)积分，整理后代入式(2)，得到本阶段 R 与 P 的关系式：

$$\sqrt{3M_e-2Rl}\,(3M_e^{3/2}P+\sqrt{M_e}PRl+3\sqrt{M_e}R^2l)-3\sqrt{M_e}R^2l\sqrt{3M_e-2Pl+2Rl}-5M_e^2P=0\tag{14}$$

设本阶段结束时 P 和 R 分别为 P_2 和 R_2.由 $M_A=-M_u$ 得

$$R_2=P_2-1.5M_e/l\tag{15}$$

联立求解方程(14)和(15)得

$$R_2=1.0745\,\frac{M_e}{l}\qquad P_2=2.5745\,\frac{M_e}{l}\tag{16}$$

再将式(16)代入式(1)，(5)，(12)，得

$$\begin{cases}M(x_1)=\dfrac{1.0745M_e}{l}x_1 & (0\leqslant x_1\leqslant l)\\ M(x_2)=M_e\left(1.0745-2.5745\,\dfrac{x_2}{l}\right) & (0\leqslant x_2\leqslant l)\end{cases}\tag{17}$$

$$M_B=1.0745M_ea_1=0.8058l\qquad a_2=0.0289l\qquad a_3=0.9307l$$

由图 5 得到本阶段结束时刚架的侧移 Δ_{B2} 为

$$\Delta_{B2}=\sum\int\bar{M}_2K\mathrm{d}x=-\int_0^{a_2}\frac{x_2K_e\mathrm{d}x_2}{\sqrt{3-2M(x_2)/M_e}}-\int_{a_2}^{a_1}\frac{x_2M(x_2)}{EI}\mathrm{d}x_2+$$

$$\int_{a_1}^{l}\left(\frac{x_2K_e\mathrm{d}x_2}{\sqrt{3-2|M(x_2)|/M_e}}=0.4635\,\frac{M_el^2}{EI}\right.\tag{18}$$

3　A 截面为塑性铰到 B 截面形成塑性铰阶段(阶段 3)

A 截面为塑性铰，结构变为弹塑性静定结构，反力 R 由 $M_A=-M_u$ 得到

$$R = P - 1.5M_e/l$$

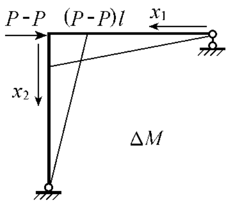

图6 增量弯矩

Fig.6 Incremental bending moment diagram

代入式(1)即得本阶段的弯矩分布规律:

$$\begin{cases} M(x_1) = \left(P - 1.5\dfrac{M_e}{l}\right)x_1 & (0 \leqslant x_1 \leqslant l) \\ M(x_2) = P(l - x_2) - 1.5M_e & (0 \leqslant x_2 \leqslant l) \end{cases} \tag{19}$$

在本阶段,由于结构成为静定,荷载增量产生的弯矩增量如图6所示.

$$\begin{cases} \Delta M(x_1) = (P - P_2)x_1 & (0 \leqslant x_1 \leqslant l) \\ \Delta M(x_2) = (P - P_2)(l - x_2) & (0 \leqslant x_2 \leqslant l) \end{cases} \tag{20}$$

弯矩增量使在阶段2产生的弹塑性区段(AD区段)发生卸载,该区段的曲率为

$$K = (K)_{P=P_2} - \frac{\Delta M}{EI} \tag{21}$$

本阶段结束时,B截面弯矩达到极限弯矩M_u,形成第2个塑性铰,结构成为破坏机构,极限荷载P_u可由$M_B = M_u = 1.5M_e$得

$$P_u = \frac{3M_e}{l} \tag{22}$$

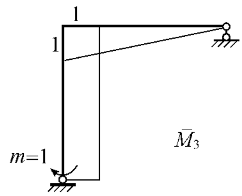

图7 单位荷载弯矩$\bar{M}_3$

Fig.7 Unit-load bending moment diagram $\bar{M}_3$

再将式(22)代入式(15),(12),(1)得

$$R_u = \frac{1.5M_e}{l} \qquad a_2 = l/6 \qquad a_3 = l/3$$

$$\begin{cases} M(x_1) = \dfrac{1.5M_e}{l}x_1 & (0 \leqslant x_1 \leqslant l) \\ M(x_2) = 1.5M_e\left(1 - 2\dfrac{x_2}{l}\right) & (0 \leqslant x_2 \leqslant l) \end{cases} \tag{23}$$

将$P = P_u$代入式(21)得到本阶段结束时卸载区段AD的曲率,再利用单位荷载法由图7的单位弯矩$\bar{M}_3$得到塑性铰处的相对转角θ_A为

$$\theta_A = \sum\int \bar{M}_3 K\mathrm{d}x = \frac{M_e}{EI}\left[\int_0^{l/3}\frac{1.5x_1^2}{l^2}\mathrm{d}x_1 + \int_{l/3}^{l}\frac{x_1\mathrm{d}x_1}{l\sqrt{3 - 3x_1/l}} + \int_0^{l/6}\frac{\mathrm{d}x_2}{\sqrt{3 - 3(1 - 2x_2/l)}} + \right.$$
$$\left.\int_{l/6}^{0.8058l}1.5\left(1 - 2\frac{x_2}{l}\right)\mathrm{d}x_2 - \int_{0.8058l}^{l}\left(\frac{1}{\sqrt{5.149(1 - x_2/l)}} - \frac{0.4255}{l}(l - x_2)\right)\mathrm{d}x_2\right] = 0.7312\frac{M_e l}{EI} \tag{24}$$

计算位移时要考虑塑性铰A处的相对转角引起的位移.本阶段结束时刚架的侧移Δ_{Bu}为

$$\Delta_{Bu} = \sum\int \bar{M}_2 K\mathrm{d}x + \bar{M}_{2d}\theta_A = 0.3902\frac{M_e}{EI}l^2 + 0.7312\frac{M_e}{EI}l^2 = 1.1214\frac{M_e}{EI}l^2 \tag{25}$$

为了说明在结构破坏前已形成的塑性铰A处的相对转角对位移的影响,求侧移时,在图5所示的静定结构上加单位荷载.如在图6所示的静定结构上加单位荷载,可使单位弯矩图在塑性铰A处的弯矩值为0,这样求侧移就不必计算塑性铰A处的相对转角,所得结果与上述结果完全一致.

各阶段结束时的主要结果见表1.

表1 各状态结果比较

Table 1 Comparison of results at different states

阶段	Pl/M_e	Rl/M_e	侧移$\Delta_B(\times M_e l^2/EI)$		
			变形引起的	θ_A引起的	总侧移
1	1.6000	1.6000	0.2333	0	0.2333
2.1	2.4853	1.0000	0.4164	0	0.4164
2.2	2.5745	1.0745	0.4635	0	0.4635
3	3.0000	1.5000	0.3902	0.7312	1.1214

4 结 论

a. 本文用柔度法的思想研究了一次超静定刚架在集中力作用下的加载全过程.分析时将受力变形过程分为3个阶段.阶段1,结构是超静定弹性体系,可由叠加原理建立柔度法方程;阶段2,结构是超静定弹塑性体系,要根据荷载和多余未知力同时作用下的弯矩求出位移来建立柔度法方程,不能再用叠加原理;阶段3,结构是静定弹塑性体系,弯矩与荷载虽是线性关系,但不是比例关系.同样的思路和原理也可用于多次超静定结构.

b．在阶段 1，零弯矩截面位置不变．而后 2 个阶段零弯矩截面位置随荷载 P 的增加不断地发生变化．

c．第一个塑性铰附近的弹塑性区域随着荷载的进一步增加出现卸载现象．此时随着荷载的增大，梁的变形引起的位移反而会减小(如表 1 所示)．因此在结构破坏前已形成的塑性铰处的相对转角对位移的影响不能忽略．本文给出了塑性铰处的相对转角及其引起的位移的计算方法和计算公式．

参考文献：

[1] PARATHAP J，VARADAN T K. The inelastic large deformation of beams[J]. J Appl Mech Trans ASME，1976，43：689-699.

[2] LOC C，GUPTA S D. Bending of a non—linear rectangular beam in large deflection[J]. J Appl Mech Trans ASME，1978，45：213-225.

[3] 干洪．梁的弹塑性大挠度数值分析[J]．应用数学和力学，2000，21(6)：633-639.

[4] 曹天捷，杜蓬娟．一次超静定理想弹塑性梁的全过程分析[J]．工程力学，1999，16(3)：105-112.

[5] 李会知．超静定梁的弹塑性分析[J]．力学与实践，2004，26(4)：80-82.

[6] 包世华．结构力学[M]．武汉：武汉工业大学出版社，2001：244-264.

[7] 熊祝华．结构塑性分析[M]．北京：人民交通出版社，1987：111-112

[8] 夏志皋．塑性力学[M]．上海：同济大学出版社，2002.

[9] AKHTAR S K，SUJIAN H. Continuum theory of plasticity[M]. New York：Wiley，1995：355-386.

Whole process analysis of loading on statically indeterminate frame with one redundant based on flexibility method

FAN You-jing[1]，LI Da-wang[2]，LI Hui-zhi[1]

(1. *College of Civil Engineering*，*Zhengzhou University*，*Zhengzhou* 450002，*China*；
2. *College of Civil Engineering*，*Shenzhen University*，*Shenzhen* 518060，*China*)

Abstract：For research of the elastoplastic performance of the statically indeterminate structure，the whole elastoplastic loading and deformation process of the statically indeterminate frame with one redundant under concentrated loads was analyzed by use of the flexibility method. The result shows that the deformation process can be divided into three stages：the stage of elastic deformation of the whole structure，the stage of plastic deformation occurring in the region close to fixed end till the formation of plastic hinge，and the stage of plastic deformation occurring in the region near the rigid joint till the formation of plastic flow state. Then，the calculation methods for relative rotational angle at the plastic hinge as well as its induced displacement were obtained，and the formulas for load，bending moment，and displacement at different loading stages were derived.

Key words：statically indeterminate frame；flexibility method；elastoplasticity；plastic hinge；limit state