# 一类非线性发展方程差分法的稳定性

胡庆云

(河海大学理学院,江苏 南京 210098)

**摘要**:研究了用差分法求解自治的发展方程时稳定性和收敛性这两个基本概念之间的联系,利用计算时间的有限性和紧致性,在可解集为开集的条件下,得出方程解的邻近也可解的结论.当近似方法同时具备收敛性和稳定性时,方程解必然具备逐点 Lipschitz 条件.方程解的邻近如果可解并具备逐点 Lipschitz 条件,则差分法收敛必有稳定界存在,从而差分格式收敛性保证其稳定性,因此可以放弃线性这一重要条件.

**关键词**:发展方程;非线性;收敛性;稳定性;逐点 Lipschitz 条件
**中图分类号**:O241.82 **文献标识码**:A **文章编号**:1000-1980(2007)05-0609-04

本文研究一类非线性发展方程差分法的稳定性,该方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L\left(x,\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\right)u \qquad (0 \leqslant t \leqslant T) \tag{1}$$

$$u(0) = u_0(x) \tag{2}$$

$L\left(x,\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\right)$是空间$[L_2(R_d)]^p$ 的某子集上的非线性算子,不显含时间 $t$,因此,称其是自治的非线性发展方程[1-2].

假定用差分法离散方程(1)时,得到步进式计算格式

$$U(n\tau,x) = C(\tau,x)U((n-1)\tau,x) \qquad (n = 1,2,\cdots) \tag{3}$$

其中 $U(n\tau,x)$是初值问题式(1),(2)在 $t = n\tau$ 时的差分解($0\leqslant n\tau \leqslant T$),$C(\tau,x)$表示从$(n-1)\tau$ 时刻到$n\tau$ 时刻之间的对应关系,是一个在 $\tau$ 时段内将网格向量函数映到网格向量函数的离散算子.由于方程(1)是自治的,所以 $C(\tau,x)$不明显依赖于 $t$.为叙述简洁起见,在不影响正确性的前提下,下面将省写空间变量 $x$.

对于一个差分格式,如果要求它同时具有稳定性和收敛性 2 个性质,只有在方程物理解变化比较平缓时才有可能.本文引入逐点 Lipschitz 条件来概括这一变化比较平缓的特征.对于线性问题,逐点 Lipschitz 条件是成立的,只是‘线性’要求太高.“逐点”正反映了非线性的特征,非线性问题很难像线性问题那样具有在大范围内成立的性质[3-6].本文的稳定性概念也具有这种局部性质.

## 1 定 义

**定义 1** 设 $u_0(x)\in[L_2(R_d)]^p$,存在唯一的满足初值问题(2)的 $u(t)\in D(L)$,使得当 $\tau\to 0$ 时,对于 $t\in[0,T]$,

$$\left\|\frac{u(t+\tau)-u(t)}{\tau} - L\left(x,\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\right)u(t)\right\|\to 0 \tag{4}$$

一致成立,则称 $u(t)$为初值问题(1),(2)的古典解,把古典解用算子延拓后得到的向量函数称为广义解.若对$\forall u_0\in S\subset[L_2(R_d)]^p$,存在唯一的满足式(2)的解 $u(t)$,则称初值问题(1),(2)在 $S$ 上可解.

在数学物理方法中,解的适定性定义为存在唯一性和解对初值的连续依赖性.称初值问题(1),(2)在 $S$ 上适定,如果(a)初值问题(1),(2)在 $S$ 上可解,(b)对$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,$\forall u_0,v_0\in S$,当$\|u_0-v_0\|<\delta$ 时,对应初值问题(1),(2)的解 $u(t)$,$v(t)$关于 $t$ 一致有

收稿日期:2006-10-13
作者简介:胡庆云(1958—),男,江苏南京人,副教授,硕士,主要从事计算数学研究.

$$\| u(t) - v(t) \| < \varepsilon$$

设初值问题(1),(2)在 $S \subset [L_2(R_d)]^p$ 上可解,则对 $\forall u_0 \in S$ 存在唯一解 $u(t) \in [L_2(R_d)]^p$,由此建立了 $u(0) = u_0$ 与 $u(t)$之间的对应关系

$$u(t) = E(t) u_0$$

其中 $E(t): S \to [L_2(R_d)]^p$ 称为解算子.根据解的唯一性,可知 $E(t)$具有如下半群性质:(a) $E(0) = I$(恒等算子);(b) $E(s+t) = E(s)E(t)\ (s, t \geqslant 0)$.由定义1可知,要求初值问题(1),(2)在 $S$ 上适定,就意味着要求解算子 $E(t)$关于 $t$ 是一致地等度连续.反之亦然.

称解算子 $E(t)$在 $S$ 上满足逐点 Lipschitz 条件,如果 $\forall u_0 \in S$, $u(t) = E(t)u_0$, $\exists \delta_0 = \delta(u_0) > 0$,记:管形邻域 $O(u_0, \delta_0) = \{\omega(x) \mid \| \omega - u(t) \| < \delta_0, 0 \leqslant t \leqslant T\} \subset [L_2(R_d)]^p$,则在 $O(u_0, \delta_0)$内,存在正常数 $L = L(u_0)$,使 $\forall v(t_1) \in O(u_0, \delta_0) \cap D(E(t))\ (\forall t_1 \geqslant 0)$,有

$$\| E(t) u(t_1) - E(t) v(t_1) \| \leqslant L \| u(t_1) - v(t_1) \| \tag{5}$$

**定义2** $\forall S \subset [L_2(R_d)]^p$,称差分格式(3)在 $S$ 上是稳定的,如果初值问题(1),(2)在 $S$ 上可解,$\forall u_0 \in S$, $\exists \tau_0 = \tau(u_0) > 0$, $\exists \delta_0 = \delta(u_0) > 0$, $u(t) = E(t) u_0\ (0 \leqslant t \leqslant T)$,则在管形邻域 $O(u_0, \delta_0)$内,存在稳定界 $K_0 > 0$, $\forall v(t) \in O(u_0, \delta_0) \cap D([C(\tau)]^n)$,当 $\tau \leqslant \tau_0$ 时,关于 $0 \leqslant n \leqslant \frac{T}{\tau}$ 一致有

$$\| [C(\tau)]^n u(t) - [C(\tau)]^n v(t) \| \leqslant K_0 \| u(t) - v(t) \| \tag{6}$$

称差分格式(3)在 $S$ 上是收敛的,设初值问题(1),(2)在 $S$ 上可解,$\forall u_0 \in S$, $u(t) = E(t) u_0$,记 $U(t_1 + n\tau)$是以 $u(t_1)$为初值条件的差分解($t_1 \geqslant 0$),如果对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$,使趋于0的时间步长序列 $\{\tau_j\}$ 及正整数序列$\{n_j\}$满足 $0 < \tau_j < \delta$, $| t - t_1 - n_j \tau_j | < \delta$ 时,有

$$\| U(t_1 + n_j \tau_j) - u(t) \| < \varepsilon \tag{7}$$

## 2 定理和证明

**定理1** $\forall S \subset [L_2(R_d)]^p$,设存在稠密子集 $G \subset S$,在 $G$ 上古典可解,若在 $G$ 上适定,则可解函数集可延拓到 $S$ 上,且在 $S$ 上适定.

**证** 因为在 $G$ 上古典可解,可在 $G$ 上定义解算子 $E(t)$,由于适定,解算子 $E(t)$关于 $t$ 是一致地等度连续,又 $G$ 稠于 $S$,据文献[1]引理5,可将 $E(t)$唯一地延拓到 $S$ 上,仍记为 $E(t)$,且也是关于 $t$ 一致地等度连续,故广义解在 $S$ 上适定.证毕.

若 $u(t)$对于初值问题(1),(2)可解,即 $u(t) \in D(E(t))$,当 $\tau$ 充分小时,总假定 $u(t) \in D([C(\tau)]^n)$, $\forall n \leqslant \frac{T}{\tau}$.若此假定不成立,据稳定性和收敛性的定义可知,在 $u(t)$上既不能定义稳定性也不能定义收敛性.

**定理2** 设初值问题(1),(2)在 $S$ 上可解,又若差分格式(3)在 $S$ 上稳定和收敛,则 $S$ 上解算子 $E(t)$满足逐点 Lipschitz 条件.

**证** $\forall u_0 \in S$, $u(t)$是对应初值问题(1),(2)的解,根据稳定性,存在 $O(u_0, \delta_0)$以及稳定界 $K_0 > 0$, $\forall v(t_1) \in O(u_0, \delta_0) \cap D(E(t))$,和 $u(t_1)\ (\forall t_1 \geqslant 0)$有

$$\| [C(\tau)]^n u(t_1) - [C(\tau)]^n v(t_1) \| \leqslant K_0 \| u(t_1) - v(t_1) \|$$

又设 $u(t) = E(t) u(t_1)$和 $v(t) = E(t) v(t_1)$,选择 $\tau \to 0$ 并令 $n = \left[\frac{t - t_1}{\tau}\right]$,则有 $n \to \infty$ 和 $t_1 + n\tau \to t$.根据收敛性,有 $[C(\tau)]^n u(t_1) \to u(t)$和$[C(\tau)]^n v(t_1) \to v(t)$.所以,令上式 $n \to \infty$,有

$$\| E(t) u(t_1) - E(t) v(t_1) \| \leqslant K_0 \| u(t_1) - v(t_1) \|$$

即满足逐点 Lipschitz 条件.证毕.

**引理1** $\forall G \subset [L_2(R_d)]^p$,若初值问题(1),(2)在 $G$ 上古典可解,$\forall u_0 \in G$,记 $u(t) = E(t) u_0$,则关于 $t$ 一致有

$$\lim_{\tau \to 0} (u(t + \tau) - u(t)) = 0$$

**证** $\forall u_0 \in G$, $u(t) = E(t) u_0$, $u(t)$是古典解,则

$$\| u(t+\tau)-u(t) \| \leqslant |\tau| \left\| \frac{u(t+\tau)-u(t)}{\tau} - L\left(x,\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\right)u(t) \right\| + |\tau| \left\| L\left(x,\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\right)u(t) \right\|$$

据古典解的定义式(4)

$$\| u(t+\tau)-u(t) \| \to 0(\tau \to 0)$$

由$[0,T]$ 的紧致性,这个收敛是一致地.证毕.

**引理 2**　$\forall S \subset [L_2(R_d)]^p$,若初值问题(1)在 $S$ 上适定,$\forall u_0 \in S$,记 $u(t)=E(t)u_0$,则关于 $t$ 一致有

$$\lim_{\tau\to 0}(u(t+\tau)-u(t)) = 0$$

**证**　$\forall u_0 \in S, u(t)=E(t)u_0$.若 $u(t)$是古典解,据引理 1,关于 $t$ 一致有

$$\| u(t+\tau)-u(t) \| \to 0(\tau \to 0)$$

若 $u(t)$是广义解,则存在古典解序列 $u_n(t)=E(t)u_n(0)$,$u_n(0)\to u_0$,由于 $E(t)$关于 $t$ 是一致地等度连续,$\forall \varepsilon>0$,当 $n$ 充分大时,有$\| E(t)u_n(0)-E(t)u_0 \| < \frac{\varepsilon}{3}$(关于 $t$ 一致),又 $u_n(t)$是古典解,$\exists \tau_0>0$,当 $\tau<\tau_0$ 时,有

$$\| E(t+\tau)u_n(0)-E(t)u_n(0) \| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

所以 $\| u(t+\tau)-u(t) \| \leqslant \| E(t+\tau)u_0 - E(t+\tau)u_n(0) \| + \| E(t+\tau)u_n(0)-E(t)u_n(0) \| +$
$\| E(t)u_n(0)-E(t)u_0 \| < \varepsilon$(关于 $t$ 一致)

证毕.

**引理 3**　设$\forall S \subset [L_2(R_d)]^p$ 是开集,若初值问题(1),(2)在 $S$ 上可解且适定,$E(t)S \subset S$,$\forall u_0\in S$,则:存在管形邻域 $O(u_0,\delta_0)$,使 $O(u_0,\delta_0)\subset S$.

**证**　$\forall u_0 \in S$,$\forall t_0 \in [0,T]$,$u(t_0)=E(t_0)u_0 \in E(t)S \subset S$,因为 $S$ 是开集,故存在含 $u(t_0)$的邻域被 $S$ 包含,由于各种形状邻域起的作用都是等价的,设此邻域是管状邻域 $V(u(t_0),\delta_{t0})$,即设

$$\exists \delta_{t0}>0 V(u(t_0),\delta_{t0}) = \{\omega(x) \mid \| \omega - u(t) \| < \delta_{t0} \quad |t-t_0| < \delta_{t0}\} \subset S$$

则$\{u(t),0\leqslant t\leqslant T\} \subset \bigcup_{t\in[0,T]} V(u(t),\delta_t) \subset S$.

证明能从$\bigcup_{t\in[0,T]} V(u(t),\delta_t)$中挑选出有限个覆盖$\{u(t),0\leqslant t\leqslant T\}$.反证,设不能从$\bigcup_{t\in[0,T]} V(u(t),\delta_t)$中挑选出有限个覆盖$\{u(t),0\leqslant t\leqslant T\}$,将$[0,T]$分为 2 个:$\left[0,\frac{T}{2}\right]$,$\left[\frac{T}{2},T\right]$,在这 2 个部分区间中,至少有 1 个部分区间,此区间上定义的解 $u(t)$不能从$\bigcup_{t\in[0,T]} V(u(t),\delta_t)$中挑选出有限个来覆盖,记此区间为 $\Delta_1$.同理,将 $\Delta_1$ 再平分为 2 个,其中 1 个是 $\Delta_2$,在 $\Delta_2$ 上定义的解 $u(t)$仍不能从$\bigcup_{t\in[0,T]} V(u(t),\delta_t)$中挑选出有限个来覆盖.依此下去,得到区间套$\{\Delta_n\}$:(a)$\Delta_n$ 上定义的解 $u(t)$不能从$\bigcup_{t\in[0,T]} V(u(t),\delta_t)$中挑选出有限个来覆盖;(b)$\Delta_n$ 收敛于一点,设为 $\xi$,且 $\xi\in[0,T]$.因为 $u(\xi)\in V(u(\xi),\delta_\xi)$,对 $\delta_\xi>0$,根据引理 2,$\exists \tau_0>0$,不妨设 $\tau_0\leqslant\delta_\xi$,当 $\tau<\tau_0$ 时有,$\| u(\xi+\tau)-u(\xi) \| < \delta_\xi$,选择 $n$ 充分大,使$\| \Delta_n \| < \tau_0$,则$\forall t\in\Delta_n$,有$|t-\xi|<\delta_\xi$ 和$\| u(t)-u(\xi) \| < \delta_\xi$,即 $\Delta_n$ 上定义的解 $u(t)$被一个 $V(u(\xi),\delta_\xi)$覆盖.此与(a)矛盾.

以上说明,存在有限个$\{t_i\}$, $i=1,2,\cdots,n$, $\{u(t),0\leqslant t\leqslant T\}\subset \bigcup_{1\leqslant i\leqslant n} V(u(t_i),\delta_{t_i}) \subset S$ 取 $\delta_0 = \min_{1\leqslant i\leqslant n}\{\delta_{t_i}\}$记:管形邻域 $O(u_0,\delta_0)=\{\omega(x) \mid \| \omega-u(t) \| < \delta_0, 0\leqslant t\leqslant T\}$,则

$$\{u(t),0\leqslant t\leqslant T\} \subset O(u_0,\delta_0) \subset \bigcup_{1\leqslant i\leqslant n} V(u(t_i),\delta_{t_i}) \subset S$$

证毕.

由于差分格式(3)多数是在计算机上实现的,所以网格必然是由有限个网格点组成,因而其上定义的范数有限.对充分小的 $\tau>0$ 而言,$C(\tau)u(t)$在每个网格点上也是连续的.

**引理 4**　设 $S\subset[L_2(R_d)]^p$ 是开集,若初值问题(1),(2)在 $S$ 上适定,$E(t)S\subset S$,又差分格式(3)在 $S$ 上收敛,$\forall u_0\in S$,则$\exists \tau_0=\tau(u_0)>0$ 和存在管形邻域 $O(u_0,\delta_0)$,$\forall u(t),v(t)\in O(u_0,\delta_0)$,$\exists K_0^*=K(u(t),v(t))>0$,使$\forall \tau\leqslant\tau_0$,关于 $0\leqslant n\tau\leqslant T$,一致有

$$\| [C(\tau)]^n u(t) - [C(\tau)]^n v(t) \| \leqslant K_0^* \| u(t)-v(t) \| \tag{8}$$

**证**　$\forall u_0 \in S$,据引理3存在管形邻域 $O(u_0,\delta_0)$,使 $O(u_0,\delta_0) \subset S$,$u(t)=E(t)u_0 \in S$,$v(t) \in O(u_0,\delta_0) \subset S$,因而可解,且当 $\tau$ 充分小时,有 $u(t)$,$v(t) \in D([C(\tau)]^n)$,以及 $C(\tau)u(t)$和 $C(\tau)v(t)$在$(0,\tau_0]$上连续.

$\exists K_0^*$.反证,设使式(8)成立的 $K_0^*$ 不存在,则$\exists \{K_n\}$,$\{\tau_n\}$,$K_n \to +\infty$,$0<\tau_n \leqslant \tau_0$和 $0 \leqslant n\tau_n \leqslant T$ 中$\exists i_n$有

$$\| [C(\tau_n)]^{i_n}u(t) - [C(\tau_n)]^{i_n}v(t) \| > K_n \| u(t) - v(t) \| \tag{9}$$

则式(9)左端有界.式(9)右端$=aK_n \to +\infty$,而式(9)左端>右端,矛盾.所以,$\exists K_0^*$.详证见文献[2]引理3的证明.证毕.

**定理3**　设 $S \subset [L_2(R_d)]^p$ 是开集,若初值问题(1),(2)在 $S$ 上适定,$E(t)S \subset S$,又差分格式(3)在 $S$ 上收敛,且 $S$ 上解算子$E(t)$满足逐点 Lipschitz 条件,则差分格式(3)在 $S$ 上稳定.

**证**　$\forall u_0 \in S$,$u(t)=E(t)u_0$,取管形邻域 $O(u_0,\delta_0)$,使 $O(u_0,\delta_0) \subset S$ 并在$O(u_0,\delta_0)$内,解算子 $E(t)$满足逐点 Lipschitz 条件.

据引理4,$\exists K_0^* = K(u(t_1),v(t_1))>0$,一致有

$$\| [C(\tau)]^n u(t_1) - [C(\tau)]^n v(t_1) \| \leqslant K_0^* \| u(t_1) - v(t_1) \| \tag{10}$$

设 $E_K$ 是满足式(10)的所有数 $K_0^*$ 全体,记 $K(u)=\sup\limits_{v(t) \in O(u_0,\delta_0)} \inf\limits_{K \in E_K} \{K(u(t),v(t))\}$,则 $K(u) \neq +\infty$.取$K(u)$为稳定界,所以稳定性成立.详证见文献[2]定理3的证明.证毕.

因此,对具有逐点 Lipschitz 条件的函数类来说,差分格式(3)的收敛性可保证计算格式的稳定性.

## 参考文献:

[1] 胡庆云.非线性发展方程初值问题差分法的收敛判定[J].河海大学学报,1993,21(3):53-58.
[2] 胡庆云.Lax 等价定理在非线性方面的推广[J].应用数学,2002,15(1):62-67.
[3] MORTON K W,MAYERS D F.偏微分方程数值解[M].北京:人民邮电出版社,2006:121-151.
[4] 徐长发,李红.偏微分方程数值解法[M].武汉:华中科技大学出版社,2000:2-48.
[5] 黄明游.发展方程数值计算方法[M].北京:科学出版社,2004:117-143.
[6] BRAMBLE J,STETTER H J.Stability of nonlinear discretization algorithms[C]//In Numerical Solutions of Partial Differential Equations.New York:Academic Press,1966:113-123.

# Stability study of difference method for solution of a kind of nonlinear evolution equations

**HU Qing-yun**
(*College of Sciences*, *Hohai University*, *Nanjing* 210098, *China*)

**Abstract**:The relationship between the stability and convergence of the solution in theory was studied when the difference method was applied to solving the autonomous evolution equation. Based on the limitation and tightness of computational time, it is concluded that the neighborhood of the equation solution is solvable under the condition of open solvable set. When the approximate method is of the characteristics of convergence and stability, the solution to the equation is certain to meet the point-by-point Lipschitz condition. If the neighborhood of equation solution is solvable and meets the point-by-point Lipschitz condition, stable boundary could be obtained as the convergence of the difference method is realized, and thus the stability is ensured. Therefore, the linearity as an important condition could be omitted.

**Key words**:evolution equation; nonlinearity; convergence; stability; point-by-point Lipschitz condition