

真空预压地基最终应力和位移的解析解

何良德¹, 宋少华², 熊国平², 陶东军², 刘全³

(1. 河海大学交通学院、海洋学院, 江苏 南京 210098 2. 苏州市高速公路建设指挥部, 江苏 苏州 215007;
3. 上海中交水运设计研究有限公司, 上海 200082)

摘要 基于非固结渗流问题的基本方程, 导出真空预压地基最终应力和位移的解析解, 分析地基在渗流体力和压差面力联合作用下的变形规律, 认为地基竖向与水平向渗透系数之比 ξ 对真空预压的效果有重要影响. ξ 值越大, 真空度、应力沿深度衰减得越慢, 竖向沉降和向内侧的水平位移越大, 因此设置竖向排水体可有效增加加固深度, 提高加固效果.

关键词 真空预压; 非固结渗流; 地表沉降; 渗透系数; 各向异性

中图分类号 :TU473 **文献标识码** :A **文章编号** :1000-1980(2005)02-0194-04

在分析真空预压的一维固结解析解后^[1], 认为真空预压处理的土体受到密封膜上下气压差面力和非固结瞬时稳定渗流体力的联合作用, 土体的孔压力可分为非固结渗流压力、渗流体力以及面力所引起的固结渗流压力等三部分. 对二维渗流固结问题用应力法求解时, 有效应力和孔压必须同时满足平衡微分方程、相容方程、连续方程等基本方程^[2,3]. 如果在连续方程中不计固结变形影响项, 则基本方程的解为固结问题的终值解^[4]. 本文基于非固结渗流基本方程导出了真空预压的终值解, 分析孔压、有效应力的分布规律, 研究渗透系数对加固效果的影响, 进一步探讨真空预压的加固机理和变形特征.

1 楔形体楔面受荷载或孔压作用的解析解

为简化问题, 设地基为饱和各向同性的半无限线弹性体, 采用楔形体极坐标系的基本方程以便于问题的求解. 设楔形体中心夹角为 2α , 下端为无限长, 取楔顶为坐标 O 点, 向下为正 z 轴向, 向左为正 x 轴向, 用应力函数半逆解法推导楔形体一面受匀布荷载 q 或匀布负孔压 $-u_a$ 作用的非固结渗流解析解. 根据因次分析可推知^[3], 楔形体内应力 σ 和孔压 u 不可能是极坐标 r 的函数. 根据应力 σ 与应力函数 φ 的微分关系可知, 应力函数必须取 $\varphi = r^2 f(\theta, \alpha, \xi)$ 的形式. 最后, 基本方程可以简化为

$$\sigma_r = \sigma'_r + u = 2f + \frac{d^2 f}{d\theta^2} \quad \sigma_\theta = \sigma'_\theta + u = 2f \quad \tau_{r\theta} = -\frac{df}{d\theta} \quad (1)$$

$$\frac{k_z}{\rho_w g \rho^2} \frac{d^2 u}{d\varphi^2} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{1}{r^2} \left(\frac{d^4 f}{d\theta^4} + 4 \frac{d^2 f}{d\theta^2} - \beta \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) = 0 \quad (3)$$

$$\beta = (1 - 2\nu)(1 - \nu) \quad r = \sqrt{z^2 + x^2} \quad \theta = \arctan(x/z)$$

$$\rho = \sqrt{z^2 + \xi^2 x^2} \quad \varphi = \arctan(\xi \cdot x/z) \quad \xi = \sqrt{\frac{k_z}{k_x}}$$

式中: $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ ——总应力; $\sigma'_r, \sigma'_\theta$ ——有效应力; u ——孔压; k_z, k_x ——渗透系数; ρ_w ——水的密度; g ——重力加速度; ν ——泊松比.

首先, 非固结渗流孔压必须满足连续方程式(2)以及孔压边界条件, 其通解是

$$u = 2M\varphi + 2N \quad (4)$$

再将式(4)代入式(3), 并利用常数变易法求得相容方程的通解为

$$f = A\cos 2\theta + B\sin 2\theta + C\theta + D + \frac{\beta M}{2} \left[\frac{2\xi\theta\cos 2\theta - (\xi^2 + 1)\varphi\cos 2\theta - \xi\ln(\xi^2\sin^2\theta + \cos^2\theta)\sin 2\theta}{\xi^2 - 1} + \varphi \right] \quad (5)$$

将式(5)代入式(1)得总应力分量,再减去式(4)后得极坐标的有效应力分量.最后根据应力分量的坐标变换式,得渗流各向异性时楔形体的直角坐标通解为

$$\begin{cases} \sigma'_z = -2A + C\sin 2\theta + 2C\theta + 2D + 2\beta M\xi \frac{\xi\varphi - \theta}{\xi^2 - 1} - 2M\varphi \\ \sigma'_x = 2A - C\sin 2\theta + 2C\theta + 2D + 2\beta M \frac{\xi\theta - \varphi}{\xi^2 - 1} - 2M\varphi \\ \tau_{zx} = -2B - C\cos 2\theta + \beta M\xi \frac{\ln(\xi^2\sin^2\theta + \cos^2\theta)}{\xi^2 - 1} \\ u = 2M\varphi + 2N \end{cases} \quad (6)$$

半平面体在 $-\pi/2$ 楔面受 q 和 $-u_a$ 联合作用时,由边界条件可得非常数项的待定系数为

$$\begin{cases} M = 2\bar{u}_a \\ B = \bar{u}_a - \bar{q} - \beta\bar{u}_a\xi \frac{1 - 2\ln\xi(\xi - 1)}{\xi + 1} \\ C = 2\bar{u}_a - 2\bar{q} - 2\beta\bar{u}_a\xi(\xi + 1) \\ \bar{u}_a = u_a/(4\pi) \quad \bar{q} = q/(4\pi) \end{cases} \quad (7)$$

如取 $u_a = 0$ 可得 q 单独作用的解,如取 $q = 0$ 可得 $-u_a$ 单独作用的解.可以看出,荷载 q 产生的最终应力与 ξ 无关,负孔压 $-u_a$ 产生的最终应力与 ξ 有关.

2 半平面地基真空预压处理的解析解

在半平面地基表面铺设宽 $2a$ 的密封膜,取膜中点为整体坐标 O 点,向下为正 z 轴向,向左为正 x 轴向,设以密封膜左、右边点为局部坐标 O 点的式(6)解分别为 σ'_{z1} 和 σ'_{z2} .根据线性叠加原理可知,真空预压的解析解应为 $\sigma'_z = \sigma'_{z1} - \sigma'_{z2}$.真空预压时膜下真空度为 u_a ,即相对孔压为 $-u_a$,同时在膜上下压差所形成的荷载强度 q 正好等于 u_a .将上述边界条件代入式(7)得待定系数,再代入式(6)并略去常数项,最后得渗透各向异性的解析解为

$$\begin{cases} \sigma'_{zi} = 2\bar{u}_a \left(-\beta\xi \frac{2\theta_i + \sin 2\theta_i}{\xi + 1} + 2\beta \frac{\xi\varphi_i - \theta_i}{\xi^2 - 1} - 2\varphi_i \right) \\ \sigma'_{xi} = 2\bar{u}_a \left(-\beta\xi \frac{2\theta_i - \sin 2\theta_i}{\xi + 1} + 2\beta \frac{\xi\theta_i - \varphi_i}{\xi^2 - 1} - 2\varphi_i \right) \\ \tau_{zxi} = 2\bar{u}_a \left(\beta\xi \frac{\cos 2\theta_i}{\xi + 1} + \beta\xi \ln \frac{\xi^2\sin^2\theta_i + \cos^2\theta_i}{\xi^2 - 1} \right) \\ u_i = 4\bar{u}_a\varphi_i \end{cases} \quad (8)$$

将应力分量(8)代入物理方程、几何方程,解得位移分量为

$$\begin{cases} w_{zi} = \beta\bar{u}_a^* \left[2\xi \frac{(1 - 2\nu)\theta_i z_i + \chi(1 - \nu)x_i \ln r_i}{\xi + 1} - \frac{\chi(\varphi_i - \xi\theta_i)z_i + \xi \ln(\xi^2\sin^2\theta_i + \cos^2\theta_i)x_i}{\xi^2 - 1} \right] \\ w_{xi} = \beta\bar{u}_a^* \left[2\xi \frac{(1 - 2\nu)\theta_i x_i - \chi(1 - \nu)z_i \ln r_i}{\xi + 1} + \frac{2\xi(\xi\varphi_i - \theta_i)x_i - \xi \ln(\xi^2\sin^2\theta_i + \cos^2\theta_i)z_i}{\xi^2 - 1} \right] \\ \bar{u}_a^* = u_a/(4\pi G) \end{cases} \quad (9)$$

式中, $i = 1, 2$, 分别表示以密封膜左、右边点为局部坐标的解,其中 w_{zi} 略去了刚体位移项, G 为剪切模量.

对式(8)、式(9)运用汝比达法则求极限,可得渗流各向同性即 $\xi = 1$ 及 $\varphi_i = \theta_i$ 时的解析解

$$\sigma'_{zi} = \sigma'_{xi} = -4\bar{u}_a\theta_i \quad \tau_{zxi} = 0 \quad u_i = 4\bar{u}_a\theta_i \quad (10)$$

$$w_{zi} = 2\bar{u}_a^*(1 - 2\nu)(\theta_i z_i + x_i \ln r_i) \quad w_{xi} = 2\bar{u}_a^*(1 - 2\nu)(\theta_i x_i - z_i \ln r_i) \quad (11)$$

式(8)、式(10)表明,只有 $\xi = 1$ 时地基处于球应力状态,剪应力为零,有效应力正好等于真空度^[5].

3 真空预压处理终值解的分析和结论

3.1 负孔压和压差荷载的联合作用

将 $\xi = 1$ 时真空预压解析解分解为 q 和 $-u_a$ 分别单独作用的解之和. 压差荷载 q 单独作用时, 有

$$\sigma'_{zi} = -2q(2\theta_i + \sin 2\theta_i) \quad \sigma'_{xi} = -2q(2\theta_i - \sin 2\theta_i) \quad \tau_{zxi} = 2q \cos 2\theta_i \quad (12)$$

$$w_{zi} = 2\bar{q}^* [(1 - 2\nu)\theta_i z_i + \alpha(1 - \nu)x_i \ln r_i] \quad w_{xi} = 2\bar{q}^* [(1 - 2\nu)\theta_i x_i - \alpha(1 - \nu)z_i \ln r_i] \quad (13)$$

$$\bar{q}^* = \frac{q}{4\pi G}$$

负孔压 $-u_a$ 单独作用时, 有

$$\sigma'_{zi} = -\sigma'_{xi} = 2\bar{u}_a \sin 2\theta_i \quad \tau_{zxi} = -2\bar{u}_a \cos 2\theta_i \quad u_i = 4\bar{u}_a \theta_i \quad (14)$$

$$w_{zi} = -2\bar{u}_a^* x_i \ln r_i \quad w_{xi} = 2\bar{u}_a^* z_i \ln r_i \quad (15)$$

式(13)中, 真空预压时 $q = u_a \bar{q} = \bar{u}_a \bar{q}^* = \bar{u}_a^*$. 从式(15)可知, $-u_a$ 单独作用时地表将产生负沉降, 说明真空预压实际上是负孔压 $-u_a$ 和压差荷载 q 两种边界条件联合作用的结果^[6], 揭示了柔性膜和刚性膜的区别.

3.2 ξ 值对加固效果的影响

在图1~4中, 取 $\nu = 0.35$, z/a 为相对深度, $-u/u_a$, σ'_z/u_a , σ'_x/u_a 分别为在地基中轴线的真空度系数、竖向应力系数和侧向应力系数, $w_x^* = w_x(a u_a/G)$ 为 $x = a$ 侧断面的水平位移系数. 图中给出了 $0.1 \leq \xi \leq 10$ 时真空预压效果的变化曲线, 以及等强度 $q = u_a$ 堆载预压时的变化曲线.

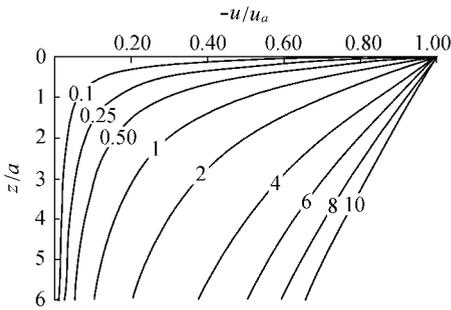


图1 真空度变化曲线 ($x = 0$)

Fig.1 Curve of vacuum degree ($x = 0$)

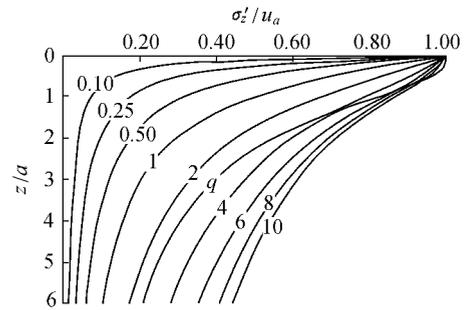


图2 竖向应力变化曲线 ($x = 0$)

Fig.2 Curve of vertical stress ($x = 0$)

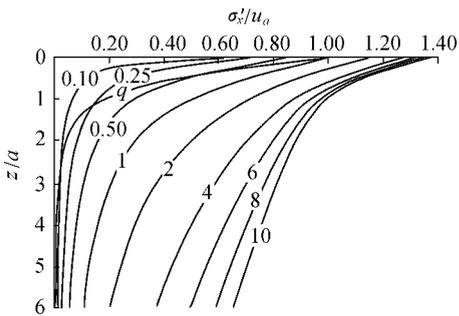


图3 侧向应力变化曲线 ($x = 0$)

Fig.3 Curve of lateral stress ($x = 0$)

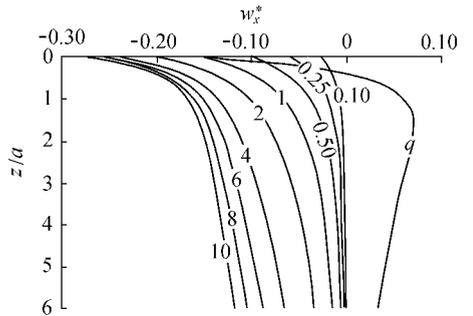


图4 水平位移变化曲线 ($x = a$)

Fig.4 Curve of horizontal displacement ($x = a$)

从图1~3可以看出, ξ 值对真空预压效果有重要影响. 真空预压地基设置竖向排水体后, 随着 ξ 值增加, $-u$, σ'_z , σ'_x 不断增大, 沿深度衰减得越慢, 加固深度越大, 加固效果越好, 产生的竖向沉降和向内侧水平位移越大. 如果竖向排水体未设或未设置好, $\xi < 1$ 时, $-u$, σ'_z , σ'_x 不断减小, 沿深度急剧衰减, 将严重影响加固效果, 甚至会导致真空预压处理失败. 当 $\xi = 1$ 时, $\sigma'_z = \sigma'_x = -u$, 地基处于球应力状态; 当 $\xi > 1$ 时, $\sigma'_x > -u > \sigma'_z$, 侧向应力大于竖向应力, 更有利于地基稳定; 当 $\xi < 1$ 时, $\sigma'_z > -u > \sigma'_x$, 地基浅表 $z/a \leq 0.2$ 内, 侧向应力略小于竖向应力, 其余部位接近相等.

3.3 地表沉降和水平位移

真空预压在地基内产生向内侧的水平位移和向下竖向位移, 且在地表的位移最大, 如图4所示, 因此在加固区周围出现收缩裂缝, 地面没有隆起现象^[7]. 在式(9)中取距离密封膜中点水平间距 s 处为地表沉降基

点,可得地表相对沉降和水平位移为

$$w_z = \frac{4(1-2\nu)\xi\bar{u}_a^* g(x)}{\xi+1} \quad w_x = \frac{-4\pi(1-2\nu)\xi\bar{u}_a^* h(x)}{\xi+1} \quad (16)$$

$$g(x) = x \ln \frac{x-a}{x+a} + a \ln \frac{s^2-a^2}{x^2-a^2} + s \ln \frac{s+a}{s-a} \quad h(x) = \min(a, x)$$

等强度 $q = u_a$ 堆载预压时,在地表向内侧的水平位移最大,然后沿深度开始不断减小,逐渐由向内侧改变为向外侧,并在取得极值后渐变为零,如图4所示。由于地表向内侧位移较小且分布深度浅,因此堆载预压现场一般不出现裂缝。由式(13)可得等强度堆载在地表的相对沉降和水平位移为

$$w_z = 4(1-\nu)\bar{u}_a^* g(x) \quad w_x = -2\pi(1-2\nu)\bar{u}_a^* h(x) \quad (17)$$

真空预压与等强度堆载预压产生的地表相对沉降之比 φ_z 、地表水平位移之比 φ_x 分别为

$$\varphi_z = (1-2\nu)\xi[(1-\nu)(\xi+1)] < 1 \quad \varphi_x = 2\xi(\xi+1) \quad (18)$$

由此可见,一般情况下真空预压 $\xi \geq 1$,其产生的地表沉降小于等强度堆载预压的地表沉降,但其体积应力大于堆载预压的体积应力。从土体孔隙压密或加固程度来看,真空预压的效果要好。

目前,有限元分析方法在真空预压法中的应用^[8]越来越多,但一般仍然沿用堆载的附加应力和分层总和法计算^[7],只是在取用沉降系数对计算沉降进行修正时考虑了真空预压的特点,这种计算方法在理论上是不完善的。在分层总和法中采用本文应力解析解来计算真空预压的沉降,可以提高计算精度,具有一定的理论和实用价值。

参考文献:

- [1] 何良德,刘全,洪波,等.真空预压法中渗流体力学和压差面力联合作用机理浅析[J].河海大学学报(自然科学版),2004,32(2):193—196.
- [2] 钱家欢,殷宗泽.土工原理与计算[M].第2版.北京:中国水利水电出版社,1996.213—221.
- [3] 陈国荣.弹性力学[M].南京:河海大学出版社,2002.66—69.
- [4] 纪多辙,石祥锋.横观各向同性圆柱土样轴对称 Biot 固结的解析解[J].岩土力学,2002,23(6):765—769.
- [5] 陈环,鲍秀清.负压条件下土的固结有效应力[J].岩土工程学报,1984,8(5):39—47.
- [6] 高志义,张美燕.真空预压加固的离心模型试验研究[J].港口工程,1988(1):18—24.
- [7] 姜炎.真空排水预压法加固软土技术[M].北京:人民交通出版社,2002.5—20.
- [8] 徐立新,陈云敏,吕庆雷,等.真空预压法加固高速公路软基的有限元分析[J].河海大学学报(自然科学版),2004,32(5):587—591.

Analytical solution to terminal stress and displacement of foundation under vacuum preloading

HE Liang-de¹, SONG Shao-hua², XIONG Guo-ping², TAO Dong-jun², LIU Quan³

(1. College of Traffic and Ocean Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098, China;

2. Suzhou Highway Construction Headquarters, Suzhou 215007, China;

3. China Communications Water Transportation Design and Research Co. Ltd., Shanghai 200082, China)

Abstract: Based on the equation for unconsolidated seepage, an analytical solution to the terminal stress and displacement of foundation under vacuum preloading was derived. The regularity of foundation displacement under co-action of seepage force and surface pressure difference was analyzed. It is considered that the ratio of vertical permeability coefficient to horizontal permeability coefficient (ξ) is of important influence on the effect of vacuum preloading. The greater the value of ξ is, the slower the attenuation of the vacuum degree and stress along the depth of foundation, and the greater the vertical settlement and the horizontal displacement toward the internal side. Therefore, setting of vertical drainage system can effectively deepen the solidification of foundation and improve the effect of solidification. Finally, the similarity of surface deformation under vacuum preloading and surcharge preloading was discussed.

Key words: vacuum preloading; unconsolidated seepage; surface settlement; permeability coefficient; anisotropy