Hamming 距离下的最短路逆问题

张斌武[1],王　勤[2]

(1.河海大学数理部,江苏 常州　213022;2.中国计量学院理学院,浙江 杭州　310018)

摘要:针对 Hamming 距离下的最短路逆问题,分析了最优解的性质,给出并证明了问题存在可行解的充分必要条件.利用把背包问题的实例多项式归约到该问题的实例,证明了该问题为 NP 困难的,为设计该类问题的近似算法提供了理论依据.

关键词:Hamming 距离;最短路;NP 困难;多项式归约;3-SAT 问题

中图分类号:O221　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1000-1980(2008)04-0571-04

由于网络优化逆问题不仅有很重要的理论研究价值,而且有较大的实际应用价值,因此该问题的研究最近受到许多学者的重视.文献[1]研究了 l_2 范数下的最短路逆问题,通过转化为二次规划问题而求解该问题.文献[2]考虑了 l_1 范数下的最短路逆问题,应用线性规划及给出的一个列生成算法解决了该问题.其他有关文献参看逆优化问题综述文献[3].

Hamming 距离下的网络逆问题是由文献[4]首先提出的.该文献研究了 Hamming 距离下最小支撑树逆问题,并给出了一个解决该问题的强多项式时间算法.文献[5]研究了 Hamming 距离下的最短路改进问题,证明了该问题是强 NP 困难的.文献[6]研究了 Hamming 距离下的中心改进问题.文献[7]研究了一些 Hamming 距离下的逆问题.本文研究 Hamming 距离下的最短路逆问题.

1　问 题 概 述

Hamming 距离下的最短路逆问题可以描述为:设 $G=(V,E)$ 是一个无向网络,$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 是顶点集,$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$ 是边集.$\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_m)$ 是边长度向量,其中 $w_i\geqslant 0$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 为边 e_i 的长度.$\boldsymbol{l}=(l_1,l_2,\cdots,l_m)$ 和 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_m)$ 分别为边长度的下界向量与上界向量,即边 e_i 的长度只能在 l_i $(\geqslant 0)$ 与 u_i $(\geqslant 0)$ 之间变化.$\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,\cdots,c_m)$ 为边的改变费用向量,即如果边 e_i 的长度改变了,则该边的改变费用为 c_i $(c_i>0)$.设 (s_i,t_i) $(i=1,2,\cdots,k)$ 是 k 个点对,$\bar{P}_i$ 为给定的从顶点 s_i 到 t_i 的路径.如果 $k=1$,称该网络为单发点、单收点网络.Hamming 距离下的最短路逆问题可以表示为:要求改变边长度向量 $\boldsymbol{w}$,使得改变后的长度向量 $\bar{\boldsymbol{w}}=(\bar{w}_1,\bar{w}_2,\cdots,\bar{w}_m)$ 满足(a)对所有 $i=1,2,\cdots,k$,在长度向量 $\bar{\boldsymbol{w}}$ 下,$\bar{P}_i$ 为从顶点 s_i 到 t_i 的最短路径;(b) $l_i\leqslant\bar{w}_i\leqslant u_i$ 对所有 $i=1,2,\cdots,m$ 成立;(c) $\sum\limits_{i=1}^{m}c_iH(\bar{w}_i,w_i)$ 最小.这里 Hamming 距离 $H(\bar{w}_i,w_i)$ 的定义为:$H(\bar{w}_i,w_i)=\begin{cases}1 & 若\ \bar{w}_i\neq w_i\\ 0 & 若\ \bar{w}_i=w_i\end{cases}$.

对 Hamming 距离下的最短路改造问题的研究有一定的实际应用价值.例如:有一个交通网络 $G=(V,E)$,V 中的顶点表示村庄或城镇,E 中的边表示道路,w 为车辆通过道路所需要的时间向量.如今已在一些给定的地点(顶点) s_i $(i=1,2,\cdots,k)$ 处建造了一些为该网络中所有村庄或城镇提供服务的公共设施(如医院和消防站等),要求改变车辆通过某些道路所需要的时间,使得在所有从 s_i 到 t_i 的路径中,从 s_i 经过某些特定的道路到城镇或村庄 t_i 所需要的时间最少.然而,在实际交通管理中,要缩短车辆通过某道路所需要的时间经常是通过加宽道路来实现的.但往往只是在道路的某几处比较狭窄(而不是道路处处都需要加宽),而且这些地方道路两旁都有一些建筑或住户,要加宽道路必须对这些建筑和住户进行拆迁安置,此时改造此道

收稿日期:2007-10-19
基金项目:国家自然科学基金(10601051)
作者简介:张斌武(1969—),男,新疆托里人,副教授,博士,主要从事运筹学研究.

路的费用主要是拆迁安置费,该费用可以看成一个固定值.要求在满足一定条件下,总的拆迁安置费尽可能少.因此,研究 Hamming 距离下的最短路逆问题有一定的实际意义.

2 Hamming 距离下的最短路逆问题的性质及复杂性分析

令 $d_w(u,v)$ 表示在长度向量 w 下顶点 u 与顶点 v 之间的最短路的长度,$w(P)$ 表示在长度向量 w 下路径 P 的长度.本文研究的 Hamming 距离下的最短路逆问题可以表示为

$$\begin{cases}\min\sum_{j=1}^{m} c_j H(\bar{w}_j, w_j) & \\ \mathrm{s.t.}\ \bar{w}(\bar{P}_i) = d_{\bar{w}}(s_i, t_i) & (i = 1,2,\cdots,k) \\ l_j \leqslant \bar{w}_j \leqslant u_j & (j = 1,2,\cdots,m)\end{cases} \tag{1}$$

如果边 e 在路径 P 上,则称 $e\in P$.用 $[u,v]$ 表示以 u 与 v 为端点的边.下面先研究问题(1)的性质.

性质1 设 $\bar{w}$ 为问题(1)的最优解.如果存在边 $e_i\in E$,满足 $e_i\notin\bigcup_{j=1}^{k}\bar{P}_j$,则有 $w_i\leqslant\bar{w}_i\leqslant u_i$.

证明 反证法.如果存在边 $e_i\in E$,有 $e_i\notin\bigcup_{j=1}^{k}\bar{P}_j$,且满足 $\bar{w}_i < w_i$,则对 $q = 1,2,\cdots,m$,令 $\hat{w}_q = \begin{cases} w_i & 若\ q = i \\ \bar{w}_q & 若\ q \neq i\end{cases}$.下证 $\hat{w}$ 为问题(1)的可行解.一方面,对所有 $j = 1,2,\cdots,k$,$e_q\in\bar{P}_j$,有 $\hat{w}_q = \bar{w}_q$,因此 $\hat{w}(\bar{P}_j) = \bar{w}(\bar{P}_j)$;另一方面,设 P_j 为在 $\hat{w}$ 下 s_j 与 t_j 之间的最短路,则 $\hat{w}(P_j) = d_{\hat{w}}(s_j,t_j) \leqslant \hat{w}(\bar{P}_j)$.由于 $\hat{w}\geqslant\bar{w}$,故 $\hat{w}(P_j)\geqslant\bar{w}(P_j)$.由于 $\bar{w}$ 为问题(1)的可行解,故 $\bar{w}(P_j)\geqslant d_{\bar{w}}(s_j,t_j) = \bar{w}(\bar{P}_j)$,因此对所有 $j = 1,2,\cdots,k$,有 $\hat{w}(\bar{P}_j) = d_{\hat{w}}(s_j,t_j)$.由 $\hat{w}$ 的定义可知,对所有 $j = 1,2,\cdots,m$,有 $l_j\leqslant\hat{w}_j\leqslant u_j$.因此,$\hat{w}$ 为问题(1)的可行解,且 $\sum_{q=1}^{m} c_q H(\hat{w}_q, w_q) < \sum_{q=1}^{m} c_q H(\bar{w}_q, w_q)$.这与 $\bar{w}$ 为问题(1)的最优解矛盾.因此命题成立.证毕.

性质2 问题(1)有可行解的充分必要条件是:对任意固定的 $j(1\leqslant j\leqslant k)$ 及任意从顶点 s_j 到 t_j 的路径 P,有 $\sum_{e_q\in\bar{P}_j\setminus P} l_q \leqslant \sum_{e_q\in P\setminus\bar{P}_j} u_q$.

为了证明问题(1)是 NP 困难的,先介绍背包问题的判定问题.

背包问题 实例:物品集合 S,S 中的每个物品 u 的大小为 $s(u)\in Z^+$,价值为 $p(u)\in Z^+$,问题:是否存在物品子集 $S'\subseteq S$,使得 $\sum_{u\in S'} s(u)\leqslant B$ 且 $\sum_{u\in S'} p(u)\geqslant K$.其中 B 和 K 为正整数.

引理1[8] 背包问题是 NP 困难的.

下面利用引理1来证明本文的主要结果.

定理 即使在单发点、单收点网络下,Hamming 距离下的最短路逆问题也是 NP 困难的.

证明 首先构造一个从背包问题的任意实例到 Hamming 距离下最短路逆问题实例判定问题的一个多项式归约.任给一个背包问题的实例 I:有 $m-1$ 个物品 $1,2,\cdots,m-1(m>3)$,第 i 个物品的大小为 $s_i\in Z^+$,价值为 $p_i\in Z^+$,正整数 B 和 K.构造图 $G=(V,E)$ 如下:(a) $V=\{s,v_1,v_2,\cdots,v_{m-2},t\}$.(b) $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$.其中,$e_1=[s,v_1]$,$e_{m-1}=[v_{m-2},t]$,$e_m=[s,t]$.对 $i=2,3,\cdots,m-2$,令 $e_i=[v_{i-1},v_i]$.(c)对边 $e_i(i=1,2,\cdots,m-1)$,令 $w_i = s_i$,$l_i = 0$,$u_i = +\infty$,$c_i = p_i$;对边 e_m,令 $w_m = B$,$l_m = 0$,$u_m = +\infty$,$c_m = \begin{cases} M & 若边\ e_m\ 的长度增加 \\ 1 & 若边\ e_m\ 的长度减少\end{cases}$,这里 $M > \sum_{i=1}^{m-1} c_i - K$.

至此,本文得到了单起点、单收点的 Hamming 距离下的最短路逆问题的一个实例.为方便起见,令 P_1 为从 s 依次经过顶点 $v_1,v_2,\cdots,v_{m-2}$ 到 t 的路径,令 P_2 为只包含边 $[s,t]$ 的路径,并令 P_1 为指定的从 s 到 t 的最短路径.

下面证明问题(1)存在满足 $\sum_{j=1}^{m} c_j H(\bar{w}_j, w_j)\leqslant\sum_{i=1}^{m-1} c_i - K$ 的可行解的充分必要条件是:背包问题存在可行解 $j_1,j_2,\cdots,j_k$,使得 $\sum_{i=1}^{k} s_{j_i}\leqslant B$ 且 $\sum_{i=1}^{k} p_{j_i}\geqslant K$.

先证充分性. 设 $j_1, j_2, \cdots, j_k$ 是实例 I 的满足 $\sum_{i=1}^{k} s_{j_i} \leqslant B$ 且 $\sum_{i=1}^{k} p_{j_i} \geqslant K$ 的解,则当 $q \in \{1,2,\cdots,m-1\} \setminus \{j_1, j_2, \cdots, j_k\}$ 时,令 $\bar{w}_q = 0$,当 $q \in \{j_1, j_2, \cdots, j_k\} \cup \{m\}$ 时,令 $\bar{w}_q = w_q$. 由于当 $i = 1,2,\cdots,m$ 时,有 $l_i \leqslant \bar{w}_i \leqslant u_i$ 且 $\bar{w}(P_1) = \sum_{i=1}^{k} s_{j_i} \leqslant B = \bar{w}(P_2)$,因此 $\bar{w}$ 为问题(1) 的可行解且满足

$$\sum_{j=1}^{m} c_j H(\bar{w}_j, w_j) = \sum_{q \in \{1,2,\cdots,m-1\} \setminus \{j_1, j_2, \cdots, j_k\}} p_q = \sum_{q=1}^{m-1} p_q - \sum_{q \in \{j_1, j_2, \cdots, j_k\}} p_q \leqslant \sum_{q=1}^{m-1} p_q - K = \sum_{q=1}^{m-1} c_q - K$$

再证必要性. 设 $\bar{w} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2, \cdots, \bar{w}_m)$ 为问题(1) 的可行解且满足 $\sum_{i=1}^{m} c_i H(\bar{w}_i, w_i) \leqslant \sum_{i=1}^{m} c_i - K$,则:

a. 如果 $\bar{w}_m < w_m$,则令 $\hat{w}_q = \begin{cases} w_m & \text{若 } q = m \\ \bar{w}_q & \text{若 } q \neq m \end{cases}$,容易证明 $\hat{w}$ 依然为问题(1) 的可行解且满足 $\sum_{j=1}^{m} c_j H(\hat{w}_j, w_j) < \sum_{j=1}^{m} c_j H(\bar{w}_j, w_j)$,则可以以 $\hat{w}$ 代替 $\bar{w}$ 进行以下的讨论.

b. 如果 $\bar{w}_m > w_m$,则由于 $\sum_{j=1}^{m} c_j H(\bar{w}_j, w_j) \geqslant c_m H(\bar{w}_m, w_m) = c_m = M > \sum_{i=1}^{m-1} c_i - K$,这与假设矛盾.

c. 如果存在 $j = 1,2,\cdots,m-1$,满足 $w_j < \bar{w}_j \leqslant u_j$,则令 $\hat{w}_q = \begin{cases} w_j & \text{若 } q = j \\ \bar{w}_q & \text{若 } q \neq j \end{cases}$. 容易证明 $\hat{w}$ 依然为问题(1)的可行解且满足 $\sum_{j=1}^{m} c_j H(\hat{w}_j, w_j) < \sum_{j=1}^{m} c_j H(\bar{w}_j, w_j)$,则可以以 $\hat{w}$ 代替 $\bar{w}$ 进行以下的讨论.

假设 $\bar{w}$ 为满足(a) $\bar{w}_m = w_m$,(b)对任意 $j = 1,2,\cdots,m-1$,有 $l_j \leqslant \bar{w}_j \leqslant w_j$,(c) $\sum_{j=1}^{m} c_j H(\bar{w}_j, w_j) \leqslant \sum_{i=1}^{m-1} c_i - K$ 的问题(1) 的可行解.

令 $Q = \{j \mid \bar{w}_j = w_j, j = 1,2,\cdots,m-1\}$,结合 $\bar{w}(P_1) \leqslant \bar{w}(P_2) = B$,则有

$$\sum_{q \in Q} s_q = \sum_{q \in Q} w_q = \sum_{q \in Q} \bar{w}_q \leqslant \sum_{q=1}^{m-1} \bar{w}_q \leqslant \bar{w}(P_2) = B$$

且

$$\sum_{q \in Q} p_q = \sum_{q=1}^{m-1} p_q - \sum_{q \notin Q} p_q = \sum_{q=1}^{m-1} p_q - \sum_{q \notin Q} c_q \geqslant \sum_{q=1}^{m-1} p_q - \left(\sum_{q=1}^{m-1} c_q - K\right) = K$$

因此存在集合 $Q \subseteq \{1,2,\cdots,m-1\}$,满足 $\sum_{q \in Q} s_q \leqslant B$ 及 $\sum_{q \in Q} p_q \geqslant K$.

由以上证明及引理 1,可以得到单起点、单收点的 Hamming 距离下的最短路逆问题是 NP 困难的结论.
证毕

3 结　束　语

本文研究了 Hamming 距离下的最短路逆问题,分析了问题的最优解的性质,给出并证明了问题存在可行解的充分必要条件 利用把背包问题的实例多项式归约到该问题的实例,证明了单起点、单收点的 Hamming 距离下的最短路逆问题为 NP 困难的,从而为以后设计该问题的近似算法提供了可靠依据.

参考文献:

[1] BURTON D, TOINT P L. On the use of an inverse shortest paths problem[J]. Mathematical Programming, 1992, 53: 45-61.
[2] ZHANG Jian-zhong, MA Zhong-fan, YANG Chao. A column generation method for inverse shortest path problems[J]. ZOR-Math Methods Oper Res, 1995, 41: 347-358.
[3] HEUBERGER C. Inverse optimization: a survey on problems, methods, and results[J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2004, 8(3): 329-361.
[4] HE Yong, ZHANG Bin-wu, YAO En-yu. Weighted inverse minimum spanning tree problems under Hamming distance[J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2005, 9(1): 91-100.
[5] ZHANG Bin-wu, ZHANG Jian-zhong, QI Li-qun. The shortest path improvement problem under Hamming distance[J]. Journal of

Combinatorial Optimization,2006,12(4):351-361.

[6] ZHANG Bin-wu, ZHANG Jian-zhong, HE Yong. The center location improvement problem under Hamming distance[J]. Journal of Combinatorial Optimization,2005,9(2):187-198.

[7] LIU Long-cheng, ZHANG Jian-zhong. Inverse maximum flow problems under the weighted Hamming distance[J]. Journal of Combinatorial Optimization,2006,12(4):395-408.

[8] GAREY M R, JOHNSON D S. Computers and intractability: a guide to the theory of NP completeness[M]. San Francisco, CA: W. H. Freeman and Company,1979.

Inverse shortest path problems under Hamming distance

ZHANG Bin-wu[1], **WANG Qin**[2]

(1. *Department of Mathematics and Physics*, *Hohai University*, *Changzhou* 213022, *China*;
2. *College of Sciences*, *China Jiliang University*, *Hangzhou* 310018, *China*)

Abstract: In consideration of the inverse shortest path problem under the Hamming distance, a property of an optimal solution of the problem is discussed, and a sufficient and necessary condition for feasible solution of the problem is given and proved. The problem is proved to be NP-hard by an instance that the polynomial of the knapsack problem is reduced to this problem. The result can provide a theoretical basis for designing approximation algorithms for this kind of problem.

Key words: Hamming distance; shortest path; NP-hard; polynomial reduction; 3-SAT problem