

一类二元三时滞神经网络的 Hopf 分支

王小卉^{1,2}, 唐清干^{1*}, 李绪孟²

(1. 桂林电子科技大学 数学与计算科学学院, 广西 桂林 541004; 2. 湖南农业大学 理学院, 湖南 长沙 410128)

摘 要:通过对两个或三个神经网络动力学性质的研究加深对大规模神经网络的了解是当前神经网络动力学性质研究的一个热点. 本文考虑了一类二元三时滞神经网络模型的动力学性质. 通过线性化方法, 分析了神经网络微分系统的线性稳定性和 Hopf 分支, 并利用 Hassard 的标准型方法和中心流形理论得到了 Hopf 分支的方向. 本文的结果是已有文献结果的扩展和补充.

关键词:Hopf 分支; 神经网络; 时滞; 线性稳定性

中图分类号:O175.1 **文献标识码:**A

Hopf Bifurcation Analysis for a Two – neuron Network with Three Delays

WANG Xiao-hui^{1,2}, TANG Qing-gan^{1*}, LI Xu-meng²

(1. School of Mathematics & Computational Science, Guilin University of Electronic Technology, Guilin, Guangxi 541004, China; 2. College of Science, Hunan Agricultural University, Changsha, Hunan 410128, China)

Abstract: The investigation of neural networks with two or three neurons has been the hot subject of recent study, for which can obtain a deep and clear understanding of the dynamics of large – scale neural networks. In this paper, the dynamics of a class of two – neuron networks with three delays is investigated. The linear stability and Hopf bifurcation are analyzed by linearization method, and the direction of Hopf bifurcation is obtained by the normal form method and the center manifold theory introduced by Hassard. The results extend and complement some earlier publication.

Key words: Hopf bifurcation; Neural network; Delay; Linear stability

1 模型的引入

自从 Hopfield 通过电子元件实现神经网络模

型^[1]以来, 神经网络动力学性质的研究已成为当今十分活跃的课题, 在这方面也取得了十分丰富的研究成果^[2-4]. 正如吴在^[5]中指出, 神经网络是

收稿日期: 2008-09-08

基金项目: 湖南农业大学青年科学基金项目(08QN13).

作者简介: 王小卉(1980-), 女, 湖南益阳人, 桂林电子科技大学讲师, 硕士. 主要研究方向: 应用数学. * 通讯作者.

复杂的大规模的非线性的微分动力系统,具有时滞的神经网络的动力学行为更为丰富、更加复杂,对两个或三个神经元网络的研究是对深入清晰了解神经网络动力学行为的常用方法,同时我们希望通过两个或三个神经元网络的研究能够加深对大规模神经网络的了解.关于小规模神经网络研究的文献可参考^[6-7].

在这篇文章中,我们将研究如下—类具有时滞的二元神经网络模型

$$\begin{cases} \dot{x} = -x(t) + b_{11}f(x(t - \tau_1)) + b_{12}f(y(t - \tau_2)) \\ \dot{y} = -y(t) + b_{21}f(x(t - \tau_3)) + b_{22}f(y(t - \tau_4)) \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\dot{x} = \frac{dx(t)}{dt}$, $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别表示两个神经元的状态, $\tau_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 表示触突传输信号的时滞, $b_{ij} (i, j = 1, 2)$ 表示触突间的连接权, $f: R \rightarrow R$ 是连续的激励函数.

由于上述系统存在多个时滞,研究其稳定性和 Hopf 分支时,我们会面对来自处理指数不同的超越方程的麻烦,所以这是一项十分困难的工作. Mahaffy 指出企图找出所有使两个时滞的二阶超越方程只有负实部复根的参数是不可能的^[8]. 这里我们总假设 $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4 > 0, \tau_1 = \tau_4 = \tau, \tau_2 + \tau_3 = 2\tau, \tau_2 \geq \tau_3$, $f: R \rightarrow R$ 是三次光滑单调递增函数,并且假设 $f(0) = 0; b_{11}b_{22} = b_{12}b_{21}$.

很多文章对具有一个或两个时滞微分系统的 Hopf 分支进行了研究,如文献^[8-9];然而,对具有三个时滞微分系统的 Hopf 分支讨论的文献却不多.由于以上原因我们在这篇文章中将以系数和激励函数的一阶导数为参数讨论系统(1)的 Hopf 分支及分支方向.同时,我们所讨论的与所参考的文献的模型不同,是前述工作的补充.在以下的讨论中我们主要使用了标准形方法和中心流形理论^[10].

2 稳定性分析和 Hopf 分支

将式(1)在原点线性化,并记为

$$\begin{cases} \dot{x} = -x(t) + a_{11}x(t - \tau) + a_{12}y(t - \tau_1) \\ \dot{y} = -y(t) + a_{21}x(t - \tau_2) + a_{22}y(t - \tau) \end{cases} \quad (2)$$

则式(2)的特征矩阵为

$$\Delta(\tau, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda + 1 - a_{11}e^{-\lambda\tau} & -a_{12}e^{-\lambda\tau_1} \\ -a_{21}e^{-\lambda\tau_2} & \lambda + 1 - a_{22}e^{-\lambda\tau} \end{pmatrix} \quad (3)$$

令 $\eta = a_{11} + a_{22}$, 则式(2)特征方程为

$$\det \Delta(\tau, \lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 1 - \eta e^{-\lambda\tau}) = 0. \quad (4)$$

显然 $\lambda = -1$ 是方程(4)的根,下面考虑超越方程

$$\lambda + 1 - \eta e^{-\lambda\tau} = 0. \quad (5)$$

方程(5)存在纯虚根 $i\beta$ 的充分必要条件为

$$\begin{cases} \eta \cos \beta\tau = 1, \\ \eta \sin \beta\tau = -\beta. \end{cases} \quad (6)$$

由(6)得 $\tan \beta\tau = -\beta$, 可求得解序列 $\{\beta_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, 定义

$$\eta_j = \frac{1}{\cos \beta_j\tau}, j \in \mathbb{N}, \text{ 并记 } \{\eta_j, j \in \mathbb{N}\} = \{\eta_k^+ | \eta_k^+ > 0, k \in \mathbb{N}\} \cup \{\eta_k^- | \eta_k^- < 0, k \in \mathbb{N}\}, \text{ 其中 } \eta_1^+ = \min_{j \geq 1} \{\eta_k^+\}, \eta_1^- = \max_{j \geq 1} \{\eta_k^-\}.$$

引理 1 设 $E(\lambda) = \lambda + 1 - \eta e^{-\lambda\tau}$, 则

(1) 如果 $-1 < \eta < 1$, 则 $E(\lambda)$ 所有的根有负实部.

(2) 如果 $\eta \in (\eta_1^-, \eta_1^+)$, 则 $E(\lambda)$ 所有的根有负实部.

(3) 如果 $\eta = \eta_1^\mp$, 则除了 $\pm i\beta_1^\mp$ 外, $E(\lambda)$ 的根都有负实部.

$$(4) \operatorname{Re} \left[\frac{d\lambda(\eta)}{d\eta} \Big|_{\eta=\eta_j^+} \right] > 0, \operatorname{Re} \left[\frac{d\lambda(\eta)}{d\eta} \Big|_{\eta=\eta_j^-} \right] < 0$$

证明: (1) 将 $\lambda = \alpha + i\beta$ 代入 $E(\lambda)$ 并分离实部得 $R\{E(\alpha, \beta)\} = \alpha + 1 - \eta e^{-\alpha\tau} \cos(\beta\tau)$. 当 $-1 < \eta < 1$ 时, 若 $\alpha \geq 0, R\{E(\alpha, \beta)\} > \alpha > 0$. 即 $\lambda = \alpha + i\beta, \alpha \geq 0$ 不可能是 $E(\lambda)$ 的根, 则 $E(\lambda)$ 所有的根有负实部.

(2) 由指数多项式的性质^[11], 我们可证明(2).

(3) 由指数多项式的根对参数的连续依赖性 & (2) 可证明(3).

$$(4) \lambda(\eta) \text{ 对 } \eta \text{ 求导 } \frac{d\lambda(\eta)}{d\eta} = \frac{e^{-\tau\lambda}}{1 + \tau\eta e^{-\tau\lambda}}, \text{ 于是 } \frac{d\lambda(\eta)}{d\eta} \Big|_{\eta=\eta_j^+} = \frac{i\beta + 1}{\eta_j^+(1 + \tau(i\beta + 1))} = \frac{1}{\eta_j^+} \frac{1 + \tau(1 + \beta^2) - i\beta(1 + 2\tau)}{(1 + \tau)^2 + \tau^2\beta^2}, R \left[\frac{d\lambda(\eta)}{d\eta} \Big|_{\eta=\eta_j^+} \right] = \frac{1}{\eta_j^+} \frac{1 + \tau(1 + \beta^2)}{(1 + \tau)^2 + \tau^2\beta^2} > 0; \text{ 同理可证}$$

$$R \left[\frac{d\lambda(\eta)}{d\eta} \Big|_{\eta=\eta_j^-} \right] < 0.$$

定理 2

(1) 如果 $-1 < \eta < 1$, 则方程(4)所有根的实部为负, 即 $(0, 0)$ 为系统(1)的局部渐近稳定的平衡点;

(2) 如果 $\eta \in (\eta_1^-, \eta_1^+)$, 则 $(0, 0)$ 为系统(1)的局部渐近稳定的平衡点;

(3) 存在 $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$, 如果 $\eta \in (\eta_1^- - \varepsilon_1, \eta_1^-) \cup (\eta_1^+, \eta_1^+ + \varepsilon_2)$, $(0, 0)$ 为系统(1)的不稳定的平衡点;

(4) 系统(1)在 $\eta = \eta_1^\mp$ 发生 Hopf 分支.

证明:(1),(2) 显然成立;由引理1(4)及指数多项式的根对参数的连续依赖性,存在 $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$, 如果 $\eta \in (\eta_1^- - \varepsilon_1, \eta_1^-) \cup (\eta_1^+, \eta_1^+ + \varepsilon_2)$, (4) 至少存在一个实部为正的根, (3) 得证;由定理2(2),(3)及引理1,我们可证(4)成立.

3 Hopf 分支的方向

定义 $\mu \triangleq \eta$. 在这一部分,我们将利用标准形方法和中心流形理论得到决定系统(1)在 $\mu_0 \triangleq \eta_1^-$ 分支方向的公式.

令 $u(t) = (x(t), y(t))^T, u_t(\theta) = u(t + \theta)$, $\theta \in [-\tau_1, 0]$, 则系统(1)可记为,

$$\dot{u}_t = A_\mu u_t + R_\mu u_t. \quad (7)$$

这里 $A_\mu \varphi =$

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{d\theta} & \theta \in [-\tau_1, 0), \\ \begin{pmatrix} -\varphi_1(0) + a_{11}\varphi_1(-\tau) + a_{12}\varphi_2(-\tau_1) \\ -\varphi_2(0) + a_{21}\varphi_1(-\tau_2) + a_{22}\varphi_2(-\tau) \end{pmatrix} & \theta = 0, \end{cases}$$

$$R_\mu \varphi = \begin{cases} 0 & \theta \in [-\tau_1, 0), \\ G(\varphi, \mu) & \theta = 0, \end{cases}$$

$$G(\varphi, \mu) = \frac{f''(0)}{2} \begin{pmatrix} b_{11}\varphi_1^2(-\tau) + b_{12}\varphi_2^2(-\tau_1) \\ b_{21}\varphi_1^2(-\tau_2) + b_{22}\varphi_2^2(-\tau) \end{pmatrix} + \frac{f'''(0)}{6} \begin{pmatrix} b_{11}\varphi_1^3(-\tau) + b_{12}\varphi_2^3(-\tau_1) \\ b_{21}\varphi_1^3(-\tau_2) + b_{22}\varphi_2^3(-\tau) \end{pmatrix} + \dots$$

其中 φ_1, φ_2 为连续函数. 由 Riesz 表示定理, 存在有界变差矩阵 $\eta(\theta, \mu), \theta \in [-\tau_1, 0]$, 使得

$$A_\mu \varphi(0) = \int_{-\tau_1}^0 d\eta(\theta, \mu) \varphi(\theta), \varphi \in C.$$

定义 A_μ 的共轭算子 A_μ^* 为

$$A_\mu^* \Psi(\xi) = \begin{cases} -\frac{d\Psi}{d\xi}, \theta \in [-\tau_1, 0), \\ \int_{-\tau_1}^0 \Psi(-t) d\eta(t, \mu), \theta = 0. \end{cases}$$

由第二节, A_{μ_0} 存在一对纯虚的特征值, 记为 $\pm i\beta_0$, 而其他的特征值的实部为负. 显然 $\pm i\beta_0$ 也为 $A_{\mu_0}^*$ 的特征值. 通过计算, 我们可得如下引理.

引理 3 $q(\theta) = (1, d)^T e^{i\beta_0 \theta} = (1, \frac{i\beta_0 + 1 - a_{11}e^{-i\beta_0 \tau}}{a_{12}e^{-i\beta_0 \tau_1}})^T e^{i\beta_0 \theta}, \theta \in [-\tau_1, 0]$ 为 A_{μ_0} 的对于特征值 $i\beta_0$ 的特征向量; $\bar{q}^*(\xi) = D(\bar{d},$

$$1)^T e^{i\beta_0 \xi} = D(\frac{-i\beta_0 + 1 - a_{11}e^{i\beta_0 \tau}}{a_{12}e^{i\beta_0 \tau_1}}, 1)^T e^{i\beta_0 \xi}, \xi \in [0,$$

$\tau_1)$ 为 $A_{\mu_0}^*$ 的相对于特征值 $-i\beta_0$ 的特征向量; 并且 $\langle q^*, q \rangle = 1, \langle q^*, \bar{q} \rangle = 0$. 其中

$$\bar{D} = [2\bar{d} + \tau e^{-i\beta_0 \tau} \bar{d} + \tau_1 e^{-i\beta_0 \tau_1} + \tau e^{-i\beta_0 \tau} d\bar{d} + \tau_2 e^{-i\beta_0 \tau_2} \bar{d},$$

$$\langle q^*, q \rangle = \bar{q}^{*T}(0)q(0) - \int_{-\tau_1}^0 \int_0^\theta \bar{q}^{*T}(\xi - \theta) [d\eta(\theta)] q(\xi) d\xi.$$

设 u_t 为 $\eta = \mu_0$ 时式(7)的解. 下面计算坐标描述在中心流形 Ω_0 , 定义 $z(t) = \langle q^*, \dot{u}_t \rangle$, 则在中心流形 Ω_0 上, 我们可得 $W(t, \theta) = u_t - 2\text{Re}[z(t)q(\theta)]$, 这里 $W(z(t), \bar{z}(t), \theta) = W_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + W_{11}(\theta) z\bar{z} + W_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots$. 事实上 $z, \bar{z}$ 为中心流形在方向 q, q^* 的局部坐标.

由于解 $u_t \in \Omega_0$, 于是 $\dot{z} = \langle q^*, \dot{u}_t \rangle = \langle q^*, A_{\mu_0} u_t + R_{\mu_0} u_t \rangle = \langle q^*, A_{\mu_0} u_t \rangle + \langle q^*, R_{\mu_0} u_t \rangle = i\beta_0 z + \bar{q}^*(0)G(0, W(t, 0)) + 2\text{Re}[z(t)q(0)] = i\beta_0 z + \bar{q}^*(0)f_0(z, \bar{z}) \triangleq i\beta_0 z + g(z, \bar{z})$. 这里 $g(z, \bar{z}) = g_{20} \frac{z^2}{2} + g_{11} z\bar{z} + g_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + g_{21} \frac{z^2 \bar{z}}{2}$

$$\text{计算得, } \dot{W} = u_t - 2\text{Re}[z(t)q(\theta)] = \begin{cases} A_{\mu_0} W - 2\text{Re}[\bar{q}^*(0) \cdot f(z, \bar{z})q(\theta)] & -1 \leq \theta < 0 \\ A_{\mu_0} W - 2\text{Re}[\bar{q}^*(0) \cdot f(z, \bar{z})q(\theta)] + f_0(z, \bar{z}) & \theta = 0 \end{cases}$$

令 $\dot{W} = A_{\mu_0} W + H(z, \bar{z}, \theta)$, 这里 $H(z, \bar{z}, \theta) = H_{20} \frac{z^2}{2} + H_{11} z\bar{z} + H_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots$. 在式中 W 对 t 求得

$$\dot{W} = W_z \dot{z} + W_{\bar{z}} \dot{\bar{z}}, \text{ 将其展开比较得 } (A_{\mu_0} - 2i\beta_0)W_{20} = -H_{20}(\theta), A_{\mu_0}W_{11}(\theta) = -H_{11}(\theta)(A_{\mu_0} + 2i\beta_0)W_{02} = -H_{02}(\theta).$$

通过计算, 我们可得,

$$\begin{aligned} g(z, \bar{z}) &= \bar{q}^*(0) \cdot f_0(z, \bar{z}) = \bar{q}^*(0) \cdot G(W(z, \bar{z}, \theta) + 2\text{Re}\{zq(\theta), 0\}) = \\ &= \frac{f''(0)}{2} \bar{D}(d, 1) \begin{pmatrix} b_{11}x^2(t - \tau) + b_{12}y^2(t - \tau_1) \\ b_{21}x^2(t - \tau_2) + b_{22}y^2(t - \tau) \end{pmatrix} + \\ &= \frac{f'''(0)}{6} \bar{D}(d, 1) \begin{pmatrix} b_{11}x^3(t - \tau) + b_{12}y^3(t - \tau_1) \\ b_{21}x^3(t - \tau_2) + b_{22}y^3(t - \tau) \end{pmatrix} + \\ &\dots = \frac{f''(0)}{2} b_{11} \bar{D}d [z^2 e^{-2i\beta_0 \tau} + \bar{z}^2 e^{2i\beta_0 \tau} + 2z\bar{z} + \\ &W_{20}^{(1)}(t, -\tau) z^2 \bar{z} e^{i\beta_0 \tau} + 2W_{11}^{(2)}(t, -\tau) z^2 \bar{z} e^{-i\beta_0 \tau}] + \\ &= \frac{f''(0)}{2} b_{12} \bar{D}d [z^2 N^2 + \bar{z}^2 \bar{N}^2 + 2z\bar{z} N\bar{N} + W_{20}^{(2)}(t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\tau_1)z^2\bar{z}\bar{N} + 2W_{11}^{(2)}(t, -\tau_1)z^2\bar{z}\bar{N}] + \\
& \frac{f''(0)}{2}b_{21}\bar{D}[z^2e^{-2i\beta_0\tau} + \bar{z}^2e^{2i\beta_0\tau} + 2z\bar{z} + W_{20}^{(1)}(t, \\
& -\tau)z^2\bar{z}e^{i\beta_0\tau} + 2W_{11}^{(2)}(t, -\tau)z^2\bar{z}e^{-i\beta_0\tau}] + \\
& \frac{f''(0)}{2}b_{22}\bar{D}[z^2N^2e^{-2i\beta_0(\tau-\tau_1)} + \bar{z}^2\bar{N}^2e^{2i\beta_0(\tau-\tau_1)} + \\
& 2z\bar{z}N\bar{N} + W_{20}^{(2)}(t, -\tau_1)z^2\bar{z}\bar{N}e^{i\beta_0(\tau-\tau_1)} + 2W_{11}^{(2)}(t, \\
& -\tau_1)z^2\bar{z}\bar{N}e^{-i\beta_0(\tau-\tau_1)}] + \frac{f''(0)}{2}b_{11}\bar{D}d[z^2\bar{z}e^{-i\beta_0\tau}] + \\
& \frac{f''(0)}{2}b_{12}\bar{D}d[z^2\bar{z}N^2\bar{N}] + \frac{f''(0)}{2}b_{21}\bar{D}[z^2\bar{z}e^{-i\beta_0\tau}] + \\
& \frac{f''(0)}{2}b_{22}\bar{D}[z^2\bar{z}N^2\bar{N}e^{-i\beta_0(\tau-\tau_1)}]
\end{aligned}$$

其中, $N = (i\beta_0 + 1 - a_{11}e^{-i\beta_0\tau})/a_{12}$. 比较可得,

$$g_{20} = \bar{D}f''(0)[b_{11}de^{-2i\beta_0\tau} + b_{12}dN^2 + b_{12}e^{-2i\beta_0\tau} + b_{22}N^2e^{-2i\beta_0(\tau-\tau_1)}]$$

$$g_{02} = \bar{D}f''(0)[b_{11}de^{2i\beta_0\tau} + b_{12}d\bar{N}^2 + b_{21}e^{2i\beta_0\tau} + b_{22}\bar{N}^2e^{2i\beta_0(\tau-\tau_1)}]$$

$$g_{11} = f''(0)\bar{D}[b_{11}d + b_{12}dN\bar{N} + b_{21} + b_{22}N\bar{N}]$$

$$\begin{aligned}
g_{21} = & f''(0)\bar{D}d[W_{20}^{(1)}(t, -\tau)b_{11}e^{i\beta_0\tau} + W_{11}^{(2)}(t, \\
& -\tau)b_{11}e^{-i\beta_0\tau} + W_{20}^{(2)}(t, -\tau_1)b_{12}\bar{N} + W_{11}^{(2)}(t, \\
& -\tau_1)b_{12}N] + f''(0)\bar{D}[W_{20}^{(1)}(t, -\tau)b_{21}e^{i\beta_0\tau} + \\
& W_{11}^{(2)}(t, -\tau)b_{21}e^{-i\beta_0\tau} + W_{20}^{(2)}(t, -\tau_1)b_{22}\bar{N}e^{i\beta_0(\tau-\tau_1)} + \\
& W_{11}^{(2)}(t, -\tau_1)b_{22}Ne^{-i\beta_0(\tau-\tau_1)}] + f''(0)\bar{D}[b_{11}de^{-i\beta_0\tau} \\
& + b_{12}dN^2\bar{N} + b_{21}e^{-i\beta_0\tau} + b_{22}N^2\bar{N}e^{-i\beta_0(\tau-\tau_1)}]
\end{aligned}$$

下面计算 $W_{11}(t, \theta), W_{20}(t, \theta)$, 其中 $\theta \in [-\tau_1, 0)$. 事实上, $H(z, \bar{z}, \theta) = -gq(\theta) - \bar{g}\bar{q}(\theta) = -(g_{20}\frac{z^2}{2} + g_{11}z\bar{z} + g_{02}\frac{\bar{z}^2}{2})q(\theta) - (g_{20}\frac{\bar{z}^2}{2} + \bar{g}_{11}z\bar{z} + \bar{g}_{02}\frac{z^2}{2})\bar{q}(\theta)$ 比较得 $H_{20}(\theta) = -g_{20}q(\theta) - \bar{g}_{20}\bar{q}(\theta)$, $-1 \leq \theta < 0, H_{11}(\theta) = -g_{11}q(\theta) - \bar{g}_{11}\bar{q}(\theta)$, $-1 \leq \theta < 0$. 于是 $\dot{W}_{20}(\theta) = 2i\beta_0 W_{20}(\theta) + g_{20}q(\theta) + \bar{g}_{02}\bar{q}(\theta)$, 解得, $W_{20}(\theta) = \frac{ig_{20}}{\beta_0}q(0)e^{i\beta_0\theta} - \frac{i\bar{g}_{02}}{3\beta_0}\bar{q}(0)e^{-i\beta_0\theta} + E_1e^{2i\beta_0\theta}$. 同理, $W_{11}(\theta) = \frac{ig_{11}}{\beta_0}q(0)e^{i\beta_0\theta} - \frac{i\bar{g}_{11}}{3\beta_0}\bar{q}(0)e^{-i\beta_0\theta} + E_2$. 由 $W_{20}(\theta)$, $W_{11}(\theta)$ 的连续性, $W_{20}(\theta) = \frac{ig_{20}}{\beta_0}q(0) - \frac{i\bar{g}_{02}}{3\beta_0}\bar{q}(0)E_1, W_{11}(\theta) = \frac{ig_{11}}{\beta_0}q(0) - \frac{i\bar{g}_{11}}{3\beta_0}\bar{q}(0) + E_2$. 由 $H_{20}(0) = -g_{20}q(0) - \bar{g}_{20}\bar{q}(0) + f(z, \bar{z})$, 注意 $f(z, \bar{z}) = G(u, 0)$ 比较得 $H_{20}(0) = -g_{20}q(0) -$

$$\bar{g}_{20}\bar{q}(0) + f''(0)\begin{pmatrix} b_{11}e^{-2i\beta_0\tau} + b_{12}N^2 \\ b_{21}e^{-2i\beta_0\tau_2} + b_{22}e^{-2i\beta_0(\tau_2-\tau)} \end{pmatrix},$$

$$H_{11}(0) = -g_{11}q(0) - \bar{g}_{11}\bar{q}(0) + f''(0)\begin{pmatrix} b_{11} + b_{12}N\bar{N} \\ b_{21} + b_{22}N\bar{N} \end{pmatrix}. \text{ 结合 } (A_{\mu_0} - 2i\beta_0)W_{20} =$$

$$-H_{20}(0), A_{\mu_0}W_{11}(\theta) = -H_{11}(\theta), \text{ 经计算我们可得,}$$

$$E_1 = f''(0)\Delta^{-1}(2i\beta_0)\begin{pmatrix} b_{11}e^{-2i\beta_0\tau} + b_{12}N^2 \\ b_{21}e^{-2i\beta_0\tau_2} + b_{22}e^{-2i\beta_0(\tau_2-\tau)} \end{pmatrix},$$

$$E_2 = f''(0)\Delta^{-1}(0)\begin{pmatrix} b_{11} + b_{12}N\bar{N} \\ b_{21} + b_{22}N\bar{N} \end{pmatrix}, \text{ 其中 } \Delta(\kappa) =$$

$$(1 + \kappa)I - \begin{pmatrix} a_{11}e^{-\kappa\tau} & a_{12}N^2 \\ a_{21}e^{-\kappa\tau_2} & a_{22}e^{-\kappa(\tau-\tau_1)} \end{pmatrix}.$$

$$\text{令 } C_1(0) = \frac{i}{2\omega}(g_{20}g_{11} - 2g|g_{11}|^2 - \frac{1}{3} \times$$

$$|g_{02}|) + \frac{g_{21}}{2}, \mu_2 = -\frac{\text{Re}C_1(0)}{\text{Re}\lambda'(\tau_0)}, \beta_2 = 2\text{Re}C_1(0),$$

$$T = \frac{\text{Im}\{C_1(0)\} + \mu_2\text{Im}\{\lambda'(\mu_0)\}}{\beta_0}. \text{ 基于以上的分析, 我们得以下结论.}$$

定理4 微分系统(1)在 $\eta = \mu_0$ 发生Hopf分支, 并且

1) 若 $\text{Re}\{\mu_2\} > 0, (\text{Re}\{C_1(0)\} < 0)$, 则分支是超(次)临界的;

2) 若 $\text{Re}\{C_1(0)\} > 0, (\text{Re}\{C_1(0)\} < 0)$, 则周期解是(不)稳定的;

3) 若 $T > 0 (T < 0)$ 分支周期解的周期是增加(减少)的.

参考文献:

- [1] Hopfield J J. Neurons with graded response have collective computational properties like two-state neurons [J]. Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 1984, 81: 3088 - 3092.
- [2] D'Amico M B, Moiola J L, Paolini E E. Hopf bifurcation for maps: a frequency-domain approach [J]. IEEE Trans. Circuits and Systems, 2002, 49: 281 - 288.
- [3] Michel A N, Farrel J A, Porod W. Qualitative analysis of neural networks [J]. IEEE Trans. Circuits and Systems, 1989, 36: 229 - 243.
- [4] Tonnelier A, Meignen S, Bosch H, J. Demongeot. Synchronization and desynchronization of neural oscillators [J]. Neural Networks, 1999, 12: 1213 - 1228.
- [5] Wu J. Introduction to neural dynamics and signal transmission delay [M]. Berlin: Walter de Gruyter, 2001.
- [6] Baptistini M, Ta'boas P. On the existence and global bifurcation of periodic solutions to planar differential delay equations [J]. Journal of Differential Equations, 1996, 127: 391 - 425.

表 2 治理后废水水质实测数据
Table 2 The quality data of waste after treated

监测日期	pH	色度 (倍)	S ⁻² / (mg · L ⁻¹)	SS/ (mg · L ⁻¹)	COD/ (mg · L ⁻¹)	BOD ₅ / (mg · L ⁻¹)	CN ⁻ / (mg · L ⁻¹)
20070410	7.1	35	0.33	23.2	60.2	11.2	0.254
20070412	7.5	38	0.35	24.4	64.5	10.7	0.321
20080518	7.4	34	0.36	25.2	62.4	11.3	0.311
20080520	7.8	32	0.31	23.4	62.8	10.9	0.26

5 结束语

银矿含氰废水属于处理难度较大的一种工业废水,本治理方案通过对其生产工艺和废水特点进行详细的分析后,并充分利用原有的设备和条件,采用了一种实用、简单、可靠、安全的处理方法,方案实施和工程竣工后,经过一年多正常运行证明,整个系统运行可靠、处理方便、剩余污泥量少、污泥性质稳定、耐冲击负荷、处理效果显著,出水水质良好.监测果表明:处理后污水水质均达到国家排放标准中的一级排放标准,而目工程基建和运行费用低,经实际核算:运行费用(包括电费和药费)为 0.82 元/m³ 污水,处理效果受到了厂方、有关专家和部门的高度评价.

参考文献:

[1] 周书葵,许仕荣,左洪泽. 混凝 - 生物接触氧化处理制革废水的工程实践[J]. 环境科学与技术,2004,27(4):64 - 80.

[2] 娄金生. 水污染治理工艺与设计[M]. 北京:海洋出版社,1999.

[3] 李敬伟,李 强,陈 宇,等. 含氰废水的氧化处理[J]. 内蒙古环境保护,2006,18(4):32 - 34.

[4] Rao M N,Datta A K. Waste water treatment (Second edition)[M]. London:Oxford & IBH publishing Co. Pvt. Ltd,1987.

[5] 严熙世,范瑾初. 给水工程[M]. 4 版. 北京:中国建筑工业出版社,1995.

(上接第 63 页)

[7] Zhu H Y,Huang L H. Stability and bifurcation in a tri - neural network model with discrete and distributed delays [J]. Applied Mathematics and Computation,2007,188: 1742 - 1756.

[8] Chen Y,Wu J. Slowly oscillating periodic solutions for a delayed frustrated network of two neurons[J]. J Math Anal Appl,2001,259:188 - 208.

[9] Duan W,Wei J,Shen Q. Hopf bifurcation of a neural network model with time delay[J]. Chin Ann Math 2003, 24A(6):683 - 694.

[10] Hassard B D,Kazarino N D,Wan Y H. Theory and Application of Hopf Bifurcation [M]. Cambridge: Cambridge Univ Press,1981.

[11] Qin Y,Wang L,Liu Y,et al. Stability of the dynamics systems[M]. Beijing: Sience Press,1989.

[12] Hassard B,Kazarinoff N,Wan Y H. Theory of applications of Hopf bifurcation[M]. London Math, Soc Lect Notes, Series,41: Cambridge University Press,1981.