第 38 卷第 4 期
2010 年 4 月

同 济 大 学 学 报(自 然 科 学 版)
JOURNAL OF TONGJI UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE)

Vol. 38 No. 4
Apr. 2010

文章编号：0253-374X(2010)04-0613-06

DOI:10.3969/j.issn.0253-374x.2010.04.027

基于信用等级迁移的信用违约互换定价

王乐乐[1]，边保军[1]，李　琳[2]

(1. 同济大学 数学系，上海 200092；2. 同济大学 经济与管理学院，上海 200092)

摘要：研究了参考债券具有信用等级结构的信用违约互换(CDS)的定价.考虑债券处于不同的等级，且债券的违约强度和回收率随着债券在等级间的迁移不断变化；基于转移矩阵和回收率向量，构建了常微分方程组(ODE)方程来求解信用违约互换的或有赔付和保费支付的价值，并给出了其解析解，从而确定了 CDS 保费费率和 CDS 的价值.最后通过数值分析验证理论结果.

关键词：信用违约互换；转移矩阵；回收率向量；常微分方程组

中图分类号：F 830　　**文献标识码**：A

Pricing of Credit Default Swap Based on Credit Rating

WANG Lele[1]，*BIAN Baojun*[1]，*LI Lin*[2]

(1. Department of Mathematics，Tongji University，Shanghai 200092，China；2. College of Economics and Management，Tongji University，Shanghai 200092，China)

Abstract：This paper presents a study of the pricing of credit default swap (CDS) of the reference bond with credit ranks. Based on the fact that the default probability and recovery rate are always changing，two ordinary differential equation (ODE) systems corresponding to coupon leg and default leg are obtained by transition matrix and recovery vector. Furthermore，both explicit solution of ODE system are given to determine the premium of CDS. Finally numerical analysis verifies the effectiveness of the proposed model.

Key words：credit default swap；transition matrix；recovery vector；ordinary differential equation(ODE) system

信用违约互换(CDS)是一种转移信用风险的合约.在信用违约互换合约中，“保护”的买方在一定时期之内支付保费给“保护”的卖方.如果在到期日之前参考债券发生违约，那么买方收到该债券的面值和债券回收率的差额，且需要支付保费到违约时刻.如果在到期日前参考债券没有发生违约，那么买方在到期日前一直支付保费.因而 CDS 可以使投资者在继续持有参考债券的同时，有效转移该债券的信用风险.因而 CDS 成为欧美资产管理师重要的信用风险转移工具之一，在市场上的成交非常活跃.

CDS 引起了国内外很多学者的密切关注. Duffie[1]论证了在一个流动性很好的市场中，CDS 的价值依赖参考债券的价值，而不是依赖市场的信息. Hull 和 White[2]研究了如果交易对手不存在信用风险时的普通 CDS 的定价. Hull 和 White[3]扩展文献[2]的模型，研究了 CDS 交易对手存在信用风险时的 CDS 定价问题，并利用蒙特卡洛进行了数值模拟. Jarrow 和 Yildirim[4]基于约化方法，考虑在信用风险相关性的条件下，假设违约强度关于无风险利率是线性的，给出了 CDS 的显式定价公式. Jarrow 和 Yu[5]通过假设公共的因子来考虑违约的相关性，以避免违约的循环结，而且假设如果发生违约，只能在到期日支付. Yu[6]利用完全危险率(total hazard)构造独立指数同分布的违约随机过程，得到违约时间联合分布的显式表达式. Leung 和 Kwok[7]利用传染模型考虑对手违约风险的 CDS 定价.田明等[8]利用多因子模型来对信用衍生进行定价. Zhou Richard[9]利用债券市场的报价来计算 CDS 的价格，指出在无套利条件下，CDS 的利差为债券价格、债券息票和 Libor 的加权平均.而这些文献大多在参考债券违约和不违约 2 种状态的假设前提下，估算其违约强度和回收率，没有考虑到债券的多信用等级结构和债券信用等级的转移.

实际上，一般债券都存在多种信用等级结构，由评级机构给出，比如标准普尔、穆迪等为债券提出了 8 种信用等级的结构，每种信用等级对应的回收率也

收稿日期：2009－04－02
基金项目：国家自然科学基金资助项目(10671144)；国家“九七三”重点基础研究发展计划资助项目(2007CB814903)
作者简介：王乐乐(1981—)，男，博士生，主要研究方向为信用衍生品的定价. E-mail：wanglele6262@163.com
边保军(1962—)，男，教授，博士生导师，理学博士，主要研究方向为金融数学、偏微分方程. E-mail：bianbj@yahoo.com.cn

都互不相同,因而如何利用评级机构给出的参考转债转移矩阵和回收率向量为CDS定价是当前一个非常重要的问题;同时这次全球次贷危机让监管机构深刻地认识到,评级机构和一些金融机构合作,给出了一些不太准确的评级结果和数据,没有真实地反映市场的违约概率和回收率.因而,如何利用CDS市场报价来反算评级公司给出的相关数据,进一步对评级公司给出的数据作出判断,也是当前的焦点.在信用等级方面,Lando[10]认为任何到期日的风险债券都存在一个信用等级转移矩阵.进一步,Stefanescua等[11]在信用等级结构下利用Bayesian方法估计了信用等级转移矩阵.Kee S. Kim[12]利用公共信息估计了债券的信用等级.D. Feng[13]等通过引入一个反映宏观经济周期的隐含因子,来对信用转移矩阵进行建模和预测.Schonbucher[14]在假设利率和违约是独立的条件下,给出具有信用等级结构的零息债券的定价,并给出了欧式信用衍生品的定价方程.然而,对基于债券的多信用等级结构下的CDS定价很少有人研究,鉴于此,笔者研究了参考债券存在多信用等级结构下的CDS定价问题.

1 模型构建

假设A持有1张公司债券,其面值为1,为了避免该公司债券的信用风险,A购买1张信用违约互换.假设A在到期日前或违约发生之前,连续支付保费c给CDS的卖方B.而卖方B承诺,如果在到期日T之前发生违约,那么B支付债券面值和债券回收的差值作为对A的补偿.因此公司债券的信用风险和回收率直接决定这CDS的保费大小,而且公司债券的信用风险由其所处的信用等级反映出.当公司债券发生违约时,通常不是直接发生违约,而是先经过信用等级的下降,然后发生违约行为.

采用如下假设:公司债券有N个信用等级$\boldsymbol{\varepsilon}\{1,\cdots,N\}$;信用等级按照序号排列,等级1-st表示最高等级,N-th表示违约状态.信用等级转强度矩阵为

$$\boldsymbol{\Pi}=\begin{pmatrix}\lambda_{1,1} & \cdots & \lambda_{1,N}\\ \vdots & & \vdots\\ \lambda_{N-1,1} & \cdots & \lambda_{N-1,N}\end{pmatrix}\quad \lambda_{i,j}\geqslant 0$$
$$i=1,\cdots,N-1;\ j=1,\cdots,N \tag{1}$$

其中,$\lambda_{i,i}=-\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{N}\lambda_{i,j}$.不同信用等级的债券的回收率也不相同,通常信用等级最高对应的回收率也最高.假设不同信用等级债券的回收率为$\boldsymbol{Q}$

$$\boldsymbol{Q}=(Q_1,Q_2,\cdots,Q_{N-1},0)$$
$$Q_1>Q_2>\cdots>Q_{N-1}>0 \tag{2}$$

从以上假设可以得知:假设当前该公司债券的等级ε_t为i,那么在Δt时间内,债券由i等级迁移到j等级($j\neq i$)的概率为$\lambda_{i,j}\Delta t+o(\Delta t)$,而债券等级不变的概率为$(1+\lambda_{i,i})\Delta t+o(\Delta t)$.其中,$o(\Delta t)$为$\Delta t$的高阶无穷小,是由于在$\Delta t$时间债券等级多次变化引起的.

CDS的现金流分为2部分:保费支付(coupon leg)和或有赔付(default leg).保费支付对应着持有人的现金流出,而或有赔付对应着现金流的流入,因而CDS的价值,即空头价值P_{t}为

$$P_{\mathrm{t}}=c_{\mathrm{L}}|_t-d_{\mathrm{L}}|_t \tag{3}$$

式中:$c_{\mathrm{L}}|_t$为保费支付在t时刻的价值;$d_{\mathrm{L}}|_t$为或有赔付在t时刻的价值.初始时刻$t=0$,CDS合约的价值为零,即$c_{\mathrm{L}}|_0=d_{\mathrm{L}}|_0$,从而可以确定初始时刻的CDS的保费.

设当前时刻为t,那么一方面对于保费支付,如果在到期日前没有违约,那么就按照固定速率c_t支付从t到$T\wedge\tau\doteq\min\{T,\tau\}$之间的保费,$t$为当前时刻,$T$为CDS的到期日,其中$c_t$只和当前时刻有关,当$t$固定时,$c_t$为常数,$\tau$为随机变量.从而有保费支付的价值$V(t,i)$为

$$\begin{aligned}V(t,i)&=E\Big(1_{\{t<\tau\leqslant T\}}\int_t^{\tau}c_t\mathrm{e}^{-r(s-t)}\mathrm{d}s+1_{\{\tau>T\}}\cdot\\&\qquad\int_t^T c_t\mathrm{e}^{-r(s-t)}\mathrm{d}s\,|\,\varepsilon_t=i\Big)=\\&\quad c_tE\Big(1_{\{t<\tau\leqslant T\}}\int_t^{\tau}\mathrm{e}^{-r(s-t)}\mathrm{d}s+1_{\{\tau>T\}}\cdot\\&\qquad\int_t^T\mathrm{e}^{-r(s-t)}\mathrm{d}s\,|\,\varepsilon_t=i\Big)\end{aligned}$$

式中:c_t为保费支付速率;r为无风险利率;ε_t表示t时刻的信用等级;$1_{\{t<\tau\leqslant T\}}$和$1_{\{\tau>T\}}$分别表示为

$$1_{\{t<\tau\leqslant T\}}\approx\begin{cases}1 & t<\tau\leqslant T\\0 & 其他\end{cases}$$
$$1_{\{\tau>T\}}\approx\begin{cases}1 & \tau>T\\0 & \tau\leqslant T\end{cases}$$

定义

$$\begin{aligned}C(t,i)\approx E\Big(&1_{\{t<\tau\leqslant T\}}\int_t^{\tau}\mathrm{e}^{-r(s-t)}\mathrm{d}s+\\&1_{\{\tau>T\}}\int_t^T\mathrm{e}^{-r(s-t)}\mathrm{d}s\,|\,\varepsilon_t=i\Big)\end{aligned} \tag{4}$$

从而有$V(t,i)=c_tC(t,i)$.

另外一方面对于或有赔付,如果在到期日前没

有违约，那么或有赔付不需要支付任何费用，否则或有赔付就支付债券面值和回收率的差额作为 CDS 多头的补偿.从而或有赔付的价值 $D(t,i)$ 为

$$D(t,i)=E((1-Q_\tau)\mathrm{e}^{-r(\tau-t)}1_{\{t<\tau\leqslant T\}}\mid\varepsilon_t=i)\tag{5}$$

式中：Q_τ 为债券违约前所处等级对应的回收率，也就是

$$\tau=\inf\{t\mid\varepsilon_t=N\}\quad Q_\tau\approx Q_{\varepsilon_{\tau-}}$$

则在 $t=0$ 时刻，CDS 的保费为

$$c_{i,0}=\frac{D(0,i)}{C(0,i)}\tag{6}$$

式中：$C(0,i)$，$D(0,i)$ 是式(4)的 $C(t,i)$ 和式(5)的 $D(t,i)$ 当 $t=0$ 时的值.

那么在 t 时刻，如果此时债券的信用等级为 j，根据方程(3)，CDS 的价值为

$$P_{\mathrm{t}}=(c_{i,0}-c_{j,t})C(t,j)=\left(\frac{c_{i,0}}{c_{j,t}}-1\right)D(t,j)\tag{7}$$

2　模型的求解

定理 1　假设 $C(\cdot,i)$，$i=1,\cdots,N-1$ 是 $C^1(\mathbf{R}^+)$ 连续的，那么式(4)的 $C(\cdot,i)$ 满足如下方程：

$$\frac{\mathrm{d}C(t,i)}{\mathrm{d}t}-rC(t,i)+\sum_{j=1}^{N-1}\lambda_{i,j}C(t,j)+1=0$$
$$i=1,\cdots,N-1\tag{8}$$

方程的终值条件为

$$C(T,i)=0\quad i=1,\cdots,N-1\tag{9}$$

式中，λ_{ij} 为信用等级 i 到 j 的转移强度.

证明

$$C(t,i)=E\left(1_{\{t<\tau\leqslant T\}}\int_t^\tau\mathrm{e}^{-r(s-t)}\mathrm{d}s+1_{\{\tau>T\}}\cdot\int_t^T\mathrm{e}^{-r(s-t)}\mathrm{d}s\mid\varepsilon_t=i\right)=E\left(1_{\{t+\Delta t<\tau\leqslant T\}}\cdot\int_t^\tau\mathrm{e}^{-r(s-t)}\mathrm{d}s+1_{\{\tau>T\}}\int_t^T\mathrm{e}^{-r(s-t)}\mathrm{d}s\mid\varepsilon_t=i\right)+E\left(1_{\{t<\tau\leqslant t+\Delta t\}}\int_t^\tau\mathrm{e}^{-r(s-t)}\mathrm{d}s\mid\varepsilon_t=i\right)\doteq I+II$$

$$I=\mathrm{e}^{-r\Delta t}E\left(1_{\{t+\Delta t<\tau\leqslant T\}}\int_t^\tau\mathrm{e}^{-r(s-(t+\Delta t))}\mathrm{d}s+1_{\{\tau>T\}}\cdot\int_t^T\mathrm{e}^{-r(s-(t+\Delta t))}\}\mathrm{d}s\mid\varepsilon_t=i\right)=\mathrm{e}^{-r\Delta t}E(C(t+\Delta t,\varepsilon_{t+\Delta t})\mid\varepsilon_t=i)+E\left((1-1_{\{t<\tau\leqslant t+\Delta t\}})\cdot\int_t^{t+\Delta t}\mathrm{e}^{-r(s-t)}\mathrm{d}s\mid\varepsilon_t=i\right)$$

一方面，II 满足

$$II=E\left(1_{\{t<\tau\leqslant t+\Delta t\}}\int_t^\tau\mathrm{e}^{-r(s-t)}\mathrm{d}s\mid\varepsilon_t=i\right)\leqslant(\lambda_{i,N}\Delta t+o(\Delta t))\int_t^{t+\Delta t}\mathrm{e}^{-r(s-t)}\mathrm{d}s$$

另一方面，II 满足

$$II=E\left(1_{\{t<\tau\leqslant t+\Delta t\}}\int_t^\tau c\mathrm{e}^{-r(s-t)}\mathrm{d}s\mid\varepsilon_t=i\right)\geqslant0$$

从而当 $\Delta t\to0$ 时，可知 $\dfrac{II}{\Delta t}\to0$.

将 I，II 代入 $C(t,i)$ 中

$$E(\mathrm{e}^{-r\Delta t}C(t,\varepsilon_{t+\Delta t})-C(t,i)\mid\varepsilon_t=i)+E\left((1-1_{\{t<\tau\leqslant t+\Delta t\}})\int_t^{t+\Delta t}\mathrm{e}^{-r(s-t)}\cdot\mathrm{d}s\mid\varepsilon_t=i\right)+II=0$$

而

$$E(\mathrm{e}^{-r\Delta t}C(t+\Delta t,\varepsilon_{t+\Delta t})-C(t,i)\mid\varepsilon_t=i)=E\left(\mathrm{e}^{-r\Delta t}\sum_{j=1}^{N-1}\lambda_{i,j}\Delta tC(t+\Delta t,j)+\mathrm{e}^{-r\Delta t}C(t+\Delta t,i)-C(t,i)+o(\Delta t)\mid\varepsilon_t=i\right)$$

代入到方程中，并除以 Δt，令 $\Delta t\to0$，由于当 $\Delta t\to0$ 时，$\dfrac{II}{\Delta t}\to0$，从而得到方程组

$$\frac{\mathrm{d}C(t,i)}{\mathrm{d}t}-rC(t,i)+\sum_{j=1}^{N-1}\lambda_{i,j}C(t,j)+1=0$$
$$i=1,\cdots,N-1$$

方程组的终值条件为

$$C(T,i)=0\quad i=1,\cdots,N-1$$

将方程(8)改写为矩阵的形式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{C}}{\mathrm{d}t}-(r\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{C}+\mathbf{1}=0\tag{10}$$

$$\boldsymbol{C}(T)=\mathbf{0}\tag{11}$$

式中：$\boldsymbol{\Lambda}=(\lambda_{i,j})_{\{i,j=1,\cdots,N-1\}}$；$\boldsymbol{C}=(C(t,1),\cdots,C(t,N-1))^{\mathrm{T}}$；$\mathbf{1}=(1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{I}$ 是单位矩阵.

由于

$$-\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\lambda_{i,j}=\lambda_{i,i}\quad\lambda_{i,j}\geqslant0$$
$$i\neq j;\quad i,j=1,\cdots,N\tag{12}$$

则 $r\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Lambda}$ 是主对角占优矩阵，那么 $r\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Lambda}$ 是可逆矩阵，从而可知方程(12)的解为

$$\boldsymbol{C}(t)=\{\boldsymbol{I}-\exp(-(r\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Lambda})(T-t))\}\cdot$$

$$(r\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Lambda})^{-1}\boldsymbol{1} \tag{13}$$

其中对于任意的矩阵 $\boldsymbol{B}$,exp($\boldsymbol{B}$)表示为

$$\exp(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}+\frac{1}{2!}\boldsymbol{B}^2+\frac{1}{3!}\boldsymbol{B}^3+\cdots \tag{14}$$

如果 $r\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Lambda}$ 可对角化,也就是存在特征向量矩阵 $\boldsymbol{M}$,使得

$$r\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{M}^{-1}$$

其中 $\boldsymbol{\Xi}=\mathrm{diag}\{\theta_1,\cdots,\theta_{N-1}\}$为特征值构成的矩阵,此时方程的解就变为

$$\boldsymbol{C}(t) = (1-\boldsymbol{M}\boldsymbol{E}(t)\boldsymbol{M}^{-1})(r\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Lambda})^{-1}\boldsymbol{1} \tag{15}$$

其中,$\boldsymbol{E}(t)=$

$$\mathrm{diag}\{\exp(-\theta_1(T-t)),\cdots,\exp(-\theta_{N-1}(T-t))\}$$

定理 2 假设 $D(\cdot,i)$,$i=1,\cdots,N-1$ 是 $C^1(\mathbf{R}^+)$的,那么 $D(\cdot,i)$满足如下方程:

$$\frac{\mathrm{d}D(t,i)}{\mathrm{d}t}-rD(t,i)+\sum_{j=1}^{N-1}\lambda_{i,j}D(t,j)+(1-Q_i)\lambda_{i,N}=0 \quad i=1,\cdots,N-1 \tag{16}$$

终值条件为

$$D(T,i)=0 \quad i=1,\cdots,N-1 \tag{17}$$

式中,Q_i 为回收率向量 $\boldsymbol{Q}$ 的第 i 个元素.

证明

$$D(t,i)=E((1-Q_\tau)\mathrm{e}^{-r(\tau-t)}1_{\{t<\tau\leqslant T\}}\mid\varepsilon_t=i)=E(\mathrm{e}^{-r\Delta t}D(t+\Delta t,\varepsilon_{t+\Delta t})\mid\varepsilon_t=i)+E((1-Q_\tau)\mathrm{e}^{-r(\tau-t)}1_{\{t<\tau\leqslant t+\Delta t\}}\mid\varepsilon_t=i)\doteq I'+II'$$

其中

$$II'=E((1-Q_\tau)\mathrm{e}^{-r(\tau-t)}1_{\{t<\tau\leqslant t+\Delta t\}}\mid\varepsilon_t=i)\geqslant(1-Q_i)\lambda_{i,N}\Delta t\mathrm{e}^{-r\Delta t}+o(\Delta t)$$

$$II'=E((1-Q_\tau)\mathrm{e}^{-r(\tau-t)}1_{\{t<\tau\leqslant t+\Delta t\}}\mid\varepsilon_t=i)\leqslant(1-Q_i)\lambda_{i,N}\Delta t+o(\Delta t)$$

从而可知,当 $\Delta t\to0$ 时,$\frac{II'}{\Delta t}\to(1-Q_i)\lambda_{i,N}$

$$I'-D(t,i)=E(\mathrm{e}^{-r\Delta t}D(t+\Delta t,\varepsilon_{t+\Delta t})-D(t,i)\mid\varepsilon_t=i)=E\Big(\mathrm{e}^{-r\Delta t}\sum_{j=1}^{N-1}\lambda_{i,j}\cdot\Delta tD(t+\Delta t,j)+\mathrm{e}^{-r\Delta t}D(t+\Delta t,i)-D(t,i)+o(\Delta t)\mid\varepsilon_t=i\Big)$$

将 I',II'代入方程中,方程两边同除以 Δt,令 $\Delta t\to0$,从而得到方程组

$$\frac{\mathrm{d}D(t,i)}{\mathrm{d}t}-rD(t,i)+\sum_{j=1}^{N-1}\lambda_{i,j}D(t,j)+(1-Q_i)\lambda_{i,N}=0 \quad i=1,\cdots,N-1$$

终值条件为

$$D(T,i)=0 \quad i=1,\cdots,N-1$$

方程(16)可以改写为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{D}}{\mathrm{d}t}-(r\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{D}+\boldsymbol{Z}=0 \tag{18}$$

其中:$\boldsymbol{D}=(D(t,1),\cdots,D(t,N-1))^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{Z}=((1-Q_1)\lambda_{1,N},\cdots,(1-Q_{N-1})\lambda_{N-1,N})^{\mathrm{T}}$.终值条件为

$$\boldsymbol{D}(T)=\boldsymbol{0} \tag{19}$$

方程的解为

$$\boldsymbol{D}(t)=\{\boldsymbol{I}-\exp(-(r\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Lambda})(T-t))\}\cdot(r\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Lambda})^{-1}\boldsymbol{Z} \tag{20}$$

同样,如果 $r\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Lambda}$ 可对角化,此时方程的解就变为

$$\boldsymbol{D}(t)=(1-\boldsymbol{M}\boldsymbol{E}(t)\boldsymbol{M}^{-1})(r\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Lambda})^{-1}\boldsymbol{Z} \tag{21}$$

设 $\boldsymbol{A}(t)=\{\boldsymbol{I}-\exp(-(r\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Lambda})(T-t))\}(r\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Lambda})^{-1}$,那么 CDS 的信贷利差为

$$c_{i,0}=\frac{\sum_{j=1}^{N-1}a_{i,j}(0)(1-Q_j)\lambda_{j,N}}{\sum_{j=1}^{N-1}a_{i,j}(0)} \quad i=1,\cdots,N-1 \tag{22}$$

式中:$a_{i,j}(0)$为 $\boldsymbol{A}(0)$中第 i 行第 j 列的元素;$\lambda_{j,N}$为矩阵 $\boldsymbol{\Pi}$ 的第 j 行第 N 列的元素.这样得到了参考债券具有多重信用结构的 CDS 保费费率的一个解析公式.根据方程(7),如果初始时刻债券等级为 i,那么 t 时刻,债券的等级为 j 时 CDS 的价值为

$$P_t=\left(\frac{\sum_{k=1}^{N-1}a_{i,k}(0)(1-Q_k)\lambda_{k,N}}{\sum_{k=1}^{N-1}a_{i,k}(0)}-\frac{\sum_{k=1}^{N-1}a_{j,k}(t)(1-Q_k)\lambda_{k,N}}{\sum_{k=1}^{N-1}a_{j,k}(t)}\right)C(t,j)$$

推论 1 当 $N=2$ 时,也就是只有 2 种状态,即不违约和违约状态,违约强度 $\lambda_{1,2}\doteq\lambda$,$\lambda_{1,1}\doteq-\lambda$,回收率为常数 Q,此时 $C_{1,t}$,$D_{1,t}$分别为

$$\begin{aligned}C_{1,t}&=\frac{1}{r+\lambda}(1-\mathrm{e}^{-(r+\lambda)(T-t)})\\D_{1,t}&=\frac{\lambda(1-Q)}{r+\lambda}(1-\mathrm{e}^{-(r+\lambda)(T-t)})\end{aligned} \tag{23}$$

此时的 CDS 的保费 c 为

$$c=\frac{1}{\lambda(1-Q)} \tag{24}$$

从推论中可以看出,只有 2 个信用等级,即违约和不违约的情况,CDS 保费不依赖时间和无风险利率,而对于多个信用等级,CDS 的价值不但依赖无风险利率,而且也依赖距离到期日的时间.

3 数值分析

根据标准普尔公司给出的信用等级结构 $N=8$，即为 AAA，AA，A，BBB，BB，B，CCC，D 级，最高等级为 AAA，最低为 D，即违约状态. 设某公司发行的债券面值为 1，CDS 发行时，债券的等级为 AA，即信用等级为 2. 转移强度矩阵由标准普尔公司提供(表 1).

表 1 一年历史平均转移强度矩阵

Tab.1 One year average transition intensity matrix

等级	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	-10.90	9.63	0.78	0.19	0.30	0	0	0
AA	0.86	-9.90	7.47	0.99	0.29	0.29	0	0
A	0.09	2.91	-11.04	6.49	1.01	0.45	0	0.09
BBB	0.06	0.43	6.56	-15.72	6.44	1.60	0.18	0.45
BB	0.04	0.22	0.79	7.91	-23.07	10.43	1.27	2.41
B	0	0.19	0.31	0.66	5.17	-17.53	4.35	6.85
CCC	0	0	1.16	1.16	2.03	7.54	-35.08	23.19

回收率为

$$\boldsymbol{Q}=\{0.72,0.65,0.50,0.42,0.34,0.22,0.17\}$$

设无风险利率 $r=0.01$，从而得到 $c_0^2=1.1398$. $c_{j,t}$ 关于时间的变化如图 1 所示.

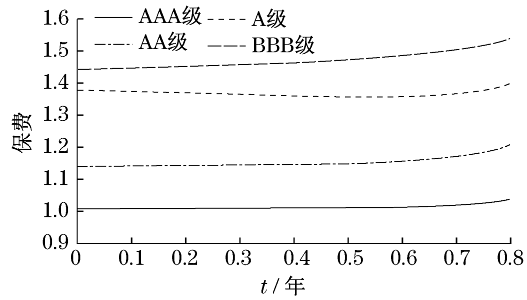

图 1 不同等级下的信用违约互换保费

Fig.1 Credit default swap's premium at different ratings

从图 1 中可以看出，等级越高对应 CDS 保费费率就越小，这是由于参考债券的等级越高，其违约概率就越小，并且回收率更高，因而其 CDS 保费费率就越小. 而且随着时间的推移，如果信用等级不变化且没有违约，那么 CDS 的空头在这段时间就获得保费费率，而剩下时间内的保费费率就会减少，但是空头的或有支付并没有减少，从而使得 CDS 保费费率就逐渐增大，而且越靠近到期日，就会增长得越快. 还可以看出，如果参考债券等级下降，那么 CDS 保费费率就会陡然增加一部分，对应着 $c_{j,t}-c_{i,t^-}$ $(j>i)$，其中 t 时刻为参考债券等级的迁移时刻.

对于无风险利率的变化，从图 2 可以看出当无风险利率增大时，CDS 的保费费率就逐渐减小，这和市场的观测是吻合的. 因为无风险利率增大时，更多资金流出 CDS 市场，转向无风险的市场.

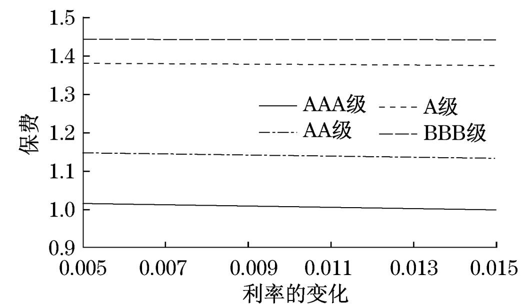

图 2 无风险利率不同下的信用违约互换保费

Fig.2 Credit default swap's premium with different interest rates

4 结语

基于参考债券存在多重信用等级结构，研究了多信用等级结构的 CDS 定价模型. 和普通双状态模型不同，该模型的违约强度依赖参考债券的等级转移概率和不同等级下债券的违约概率，而且回收率依赖债券违约前债券所处的等级. 而这些数据一般很容易从评级机构处得到. 在给定信用等级转移矩阵和回收率向量的情况下，假设无风险利率为常数，利用常微分方程组求出了 CDS 保费费率和 CDS 价值的显示公式. 而且提出的模型也可以反过来，通过 CDS 的报价来估算债券的等级和评级机构给出的相关参数，从而对评级机构给出数据进行判断，有利于监管机构对于评级机构的监管.

参考文献：

[1] Duffie Darrel. Credit swap valuation[J]. Financial Analysis Journal，1999，1(2)：73.

[2] Hull J，White A. Valuing credit default swaps Ⅰ：no

counterparty default risk[J]. Journal of Derivatives, 2000, 8(1): 29.

[3] Hull J, White A. Valuing credit default swaps Ⅱ: modeling default correlations[J]. Journal of Derivatives, 2001, 8(3): 12.

[4] Jarrow R, Yildirim Y. A simple model for valuing default swaps when both market and credit risk are correlated[J]. Journal of Fixed Income, 2002, 11(4): 7.

[5] Jarrow R, Yu F. Counterparty risk and the pricing of defaultable securities[J]. Journal of Finance, 2001, 56(5): 555.

[6] Yu F. Correlated defaults and the valuation of defaultable securities[J]. Mathematical Finance, 2007, 17(2): 155.

[7] Leung S Y, Kwok Y K. Credit default swap valuation with counterparty risk[J]. The Kyoto Economic Review, 2005, 74(1): 25.

[8] 田明,伍舟宏,洪银萍. 一个多因子信用违约互换定价模型[J]. 数学实践与认识,2008(23):38.
TIAN Ming, WU Zhouhong, HONG Yinping. A multi-factor model for credit default swap pricing[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2008(23): 38.

[9] Zhou Richard. Bond implied CDS spread and CDS-bond basis [EB/OL]. [2008-12-20]. http://ssrn.com/abstract=1265548.

[10] Lando David. On cox process and credit risky securities[J]. Review of Derivative Research, 1998(2): 99.

[11] Catalina Stefanescu, Radu Tunaru, Stuart Tumbull. The credit rating process and estimation of transition probabilities: a bayesian approach[J]. Journal of Empirical Finance, 2009, 16(2): 216.

[12] Kee S Kim. Predicting bond rating using publicly available information[J]. Expert System with Application, 2005(29): 75.

[13] Feng D, Gourierou C, Jasiak J. The ordered qualitative model for credit rating transition[J]. Journal of Empirical Finance, 2008(15): 111.

[14] Philipp Schonbucher. Credit derivatives pricing models-model, pricing and implementation[M]. Princeton: John Wiley & Sons, 2003.

(上接第607页)

PAN Guorong, GU Chuan. Application of improved GA in industrial surveying data processing[J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2008, 28(1): 55.

[2] 王丽华,谷川,万军. 基于改进遗传算法的雷达天线曲面拟合参数辨识[J]. 机电一体化,2008,14(4):54.
WANG Lihua, GU Chuan, WAN Jun. Parameter identification of radar antenna's curved surface fitting based on improved genetic algorithm[J]. Mechatronics, 2008, 14(4): 54.

[3] Wang W, Pottmann H, Liu Y. Fitting B-spline curves to point clouds by curvature-based squared distance minimization[J]. ACM Transactions on Graphics, 2006, 25(2): 214.

[4] Wang L Z, Zhu X X. Local interpolation blended B-spline surfaces and its conversion to NURBS surface[J]. Computer Aided Drafting, Design and Manufacturing, 1994, 4(2): 5.

[5] 刘成龙,杨天宇. 基于BP神经网络的GPS高程拟合方法的探讨[J]. 西南交通大学学报,2007,42(2):148.
LIU Chenglong, YANG Tianyu. Study on method of GPS height fitting based on BP artificial neural network[J]. Journal of Southwest Jiaotong University, 2007, 42(2): 148.

[6] WU Jianhuang, LIU Weijun, WANG TianRan, et al. A fitting algorithm of subdivision surface from noising and dense triangular meshes[J]. Journal of Software, 2007, 18(2): 442.

[7] 王解先. 工业测量中一种二次曲面的拟合方法[J]. 武汉大学学报:信息科学版,2007,32(1):47.
WANG Jiexian. A method for fitting of conicoid in industrial measurement[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2007, 32(1): 47.

[8] 潘国荣,谷川,施贵刚. 空间圆形物体检测方法与数据处理[J]. 大地测量与地球动力学,2007,27(3):28.
PAN Guorong, GU Chuan, SHI Guigang. Test method and data processing of 3-D circular object[J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2007, 27(3): 28.