

# 地铁车辆电机悬挂系统的解耦优化

夏张辉, 宫 岛, 周劲松, 孙文静

(同济大学 铁道与城市轨道交通研究院, 上海 201804)

**摘要:** 将地铁车辆电机考虑成具有 6 个自由度的空间刚体, 建立电机的自由振动方程, 以解耦度为优化目标, 以电机横移及浮沉振型频率为约束条件, 基于遗传算法对电机悬挂系统各橡胶元件的三向刚度进行优化设计; 结合某地铁车辆动力学模型以及现场试验, 对比分析电机采取刚性吊挂方案和解耦优化的弹性吊挂方案时转向架和车体的振动及受力情况。分析结果表明, 电机各阶刚体振型可获得良好的解耦度, 最高的达到了 100%, 频率分布与期望值基本一致; 与刚性吊挂方案相比, 当电机采取解耦优化的弹性吊挂方案后, 可以有效降低转向架关键部位的振动以及动荷载, 从而有效降低转向架的疲劳损伤。

**关键词:** 地铁车辆; 电机; 悬挂系统; 解耦度; 频率分布

**中图分类号:** U270.1<sup>+</sup>1

**文献标志码:** A

## Decoupling Optimum Design of Motor Suspension System for Metro Vehicles

XIA Zhanghui, GONG Dao, ZHOU Jinsong, SUN Wenjing  
(Institute of Rail Transit, Tongji University, Shanghai 201804, China)

**Abstract:** The motor was considered as a rigid body with 6 degrees of freedom, the free vibration equation of the suspension system was established. Taking the decoupling degree as the optimization goal, the motor traverse and floatation frequency as the constraints, the three-dimensional stiffness of the rubber elements of the motor suspension system is optimized based on the genetic algorithm. Combined with a subway vehicle dynamics model and field tests, the vibration and stress of the bogie and car body were analyzed when the rigid suspension scheme and the decoupling optimum elastic suspending scheme were adopted. Results show that each rigid mode of the motor can obtain a good decoupling degree, the highest decoupling degree reached 100%, frequencies distribution and expected value are basically the same. Compared with the rigid suspension scheme, when the

motor adopts the elastic suspension scheme with optimized decoupling, it can effectively reduce the vibration and dynamic load of the critical parts of the bogie, which effectively reduces the fatigue damage of the bogie.

**Key words:** metro vehicles; motor; suspension system; decoupling degree; frequencies distribution

地铁车辆电机悬挂系统的基本功能是: 支承、限位及隔振。目前, 对于铁路机车电机悬挂系统的研究尚少。文献[1]通过分析电机的横向悬挂刚度和阻尼对转向架动力学性能的影响, 提出了一种可实现电机与构架的横向低刚度解耦方案, 该方案可提高转向架的蛇行临界速度。文献[2]通过结合“先锋号”列车的室内试验和秦沈客运专线正线试验, 找出电机故障的原因, 并且提出解决的方法, 为铁道车辆电机的修改设计提供依据。解耦度是衡量悬挂系统优劣的主要指标之一, 电机各向解耦度越高, 各向振动的独立性越好, 以便设计电机各向振动频率, 使之有效避开电机所受到的各向激振力频率和转向架固有频率, 从而提高电机悬挂系统的隔振效果<sup>[3-4]</sup>。基于此, 本文以某型地铁车辆为研究对象, 首先, 建立电机的自由振动方程, 并且基于解耦度优化方法设计出电机悬挂系统各吊挂元件的三向刚度参数, 随后, 利用解耦优化的电机悬挂系统参数, 评价其隔振性能, 最后, 通过现场试验, 从转向架的振动和受力情况验证了设计结果的合理性。

## 1 电机自由振动方程与解耦优化方案

### 1.1 电机自由振动方程

以电机的重心位置为坐标原点, 建立如图 1 所示坐标系。由于悬挂系统的吊挂元件刚度远小于电

收稿日期: 2016-11-28

基金项目: “十二五”国家科技支撑计划(2015BAG19B02)

第一作者: 夏张辉(1993—), 男, 博士生, 主要研究方向为铁道车辆动力学。E-mail: 1510749@tongji.edu.cn

通讯作者: 宫 岛(1985—), 男, 助理教授, 硕士生导师, 工学博士, 主要研究方向为铁道车辆动力学。E-mail: gongdao@tongji.edu.cn

机与构架刚度,因此将电机视为空间刚体,其6个自由度的刚体位移为 $\mathbf{T}=[x, y, z, r_x, r_y, r_z]$ ,橡胶元件简化为带三向刚度的弹簧。第*i*个( $i=1, 2, 3, 4$ )橡胶元件的位置坐标为( $a_i, b_i, c_i$ ),其三向刚度为( $k_{xi}, k_{yi}, k_{zi}$ )。当电机振动时,第*i*个橡胶元件产生的弹性力与弹性力矩分别为

$$\begin{cases} F_{xi} = k_{xi}(x + c_i r_y - b_i r_z) \\ F_{yi} = k_{yi}(y + a_i r_z - c_i r_x) \\ F_{zi} = k_{zi}(z + b_i r_x - a_i r_y) \\ M_{xi} = F_{xi} b_i - F_{yi} c_i \\ M_{yi} = F_{xi} c_i - F_{zi} a_i \\ M_{zi} = F_{yi} a_i - F_{zi} b_i \end{cases} \quad (1)$$

当不考虑外界激励时,分别建立电机关于x、y、z、 $r_x$ 、 $r_y$ 、 $r_z$ 向的自由振动方程,如式(2):

$$\mathbf{KT}_j = \lambda_j \mathbf{MT}_j, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad (2)$$

式中: $\mathbf{K}$ 与 $\mathbf{M}$ 分别为电机的刚度矩阵与惯量矩阵; $\lambda_j$ 为各阶模态特征值, $\lambda_j = (2\pi f_j)^2$ , $f_j$ 为模态频率, $j$ 为模态阶数; $\mathbf{T}_j$ 为各阶模态振型向量。

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & & & & & \\ & m & & & & \\ & & m & & & \\ & & & I_x & & \\ & & & & I_y & \\ & & & & & I_z \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中: $m$ 为电机质量; $I_x, I_y, I_z$ 为电机的三向转动惯量。由于电机的非对角线惯性积参数相比主对角线参数的数值非常小,因此未考虑 $\mathbf{M}$ 矩阵的非对角线惯性积参数<sup>[5]</sup>。

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & 0 & 0 & K_{15} & K_{16} \\ 0 & K_{22} & 0 & K_{24} & 0 & K_{26} \\ 0 & 0 & K_{33} & K_{34} & K_{35} & 0 \\ 0 & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & 0 & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & 0 & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中:矩阵的对角线元素 $K_{11}, K_{22}, K_{33}, K_{44}, K_{55}, K_{66}$ 是电机的线位移和角位移刚度影响系数,为

$$\begin{cases} K_{11} = \sum k_{xi} \\ K_{22} = \sum k_{yi} \\ K_{33} = \sum k_{zi} \\ K_{44} = \sum (k_{xi}b_i^2 + k_{yi}c_i^2) \\ K_{55} = \sum (k_{xi}c_i^2 + k_{zi}a_i^2) \\ K_{66} = \sum (k_{yi}a_i^2 + k_{zi}b_i^2) \end{cases} \quad (5)$$

$K_{15}, K_{16}, K_{24}, K_{26}, K_{34}, K_{35}$ 是电机的线位移与角位移的耦合刚度影响系数,其表达式为

$$\begin{cases} K_{15} = K_{51} = \sum k_{xi}c_i \\ K_{16} = K_{61} = -\sum k_{xi}b_i \\ K_{24} = K_{42} = -\sum k_{yi}c_i \\ K_{26} = K_{62} = \sum k_{yi}a_i \\ K_{34} = K_{43} = \sum k_{zi}b_i \\ K_{35} = K_{53} = -\sum k_{zi}a_i \end{cases} \quad (6)$$

$K_{45}, K_{46}, K_{56}$ 是角位移与角位移的耦合刚度影响系数,其表达式为

$$\begin{cases} K_{45} = K_{54} = -\sum k_{zi}a_i b_i \\ K_{46} = K_{64} = -\sum k_{yi}a_i c_i \\ K_{56} = K_{65} = -\sum k_{xi}b_i c_i \end{cases} \quad (7)$$

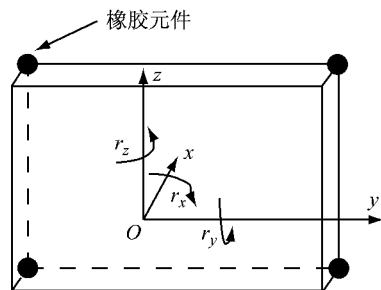


图1 电机坐标系示意

Fig.1 Schematic diagram of the motor coordinate system

定义电机的第*j*阶振动能量分布矩阵为<sup>[5]</sup>

$$\mathbf{E}_M(p, k) = f_j^2 \mathbf{M}(p, k) \mathbf{T}_{j,p} \mathbf{T}_{j,k} / 2 \quad (8)$$

式中: $\mathbf{M}(p, k)$ 为惯量矩阵的第*p*行、第*k*列元素; $\mathbf{T}_{j,p}$ 与 $\mathbf{T}_{j,k}$ 分别为第*j*阶振型向量的第*p*个与第*k*个元素。

第*j*阶振型在第*p*个元素分配的能量占振型 $\mathbf{T}_j$ 总能量的分数为

$$E_p(k, j) = \frac{\sum_{p=1}^6 \mathbf{E}_M(p, k)}{\sum_{k=1}^6 \sum_{p=1}^6 \mathbf{E}_M(p, k)} \quad (9)$$

若 $E_p(k, j)=100\%$ ,第*j*阶振型 $\mathbf{T}_j$ 的能量全部集中在第*k*个元素,即电机第*j*阶振型的振动完全解耦。

## 1.2 电机解耦优化研究

以电机系统解耦度最高为优化目标,以吊挂元件三向刚度为设计变量,并以电机各向模态频率作为约束条件,确定解耦度优化的目标函数及约束条件,如式(10)所示:

$$\begin{aligned} \min g(\mathbf{X}) &= (6 - \sum_{j=1}^6 E_{P_j}) \\ \text{s. t. } &\left\{ \begin{array}{l} f_{Lj} \leq f_j(\mathbf{X}) \leq f_{Uj}, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ \mathbf{X}_L \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{X}_U \end{array} \right. \end{aligned} \quad (10)$$

式中: $E_{P_j}$ 为第  $j$  阶振型的主要振动方向的振动能量占振型能量的分数; $\mathbf{X} = [k_{xi}, k_{yi}, k_{zi}]$  为第  $i$  个吊挂元件的三向刚度,考虑到吊挂元件的工程应用性,保持其横向、垂向刚度一致. 约束  $\mathbf{X}_L \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{X}_U$  为设计变量须落在生产安装允许范围内<sup>[6]</sup>; $f_j(\mathbf{X})$  为电机各向模态频率, $f_{Uj}, f_{Lj}$  为其上下限.

在电机各向模态频率约束部分,主要对电机横移及浮沉振型频率进行设计. 根据模态匹配理论<sup>[7-9]</sup>,转向架横移、浮沉振型频率与电机横移、浮沉振型频率比值应大于  $\sqrt{2}$ ,若由于其他原因该频率比值只能落在小于  $\sqrt{2}$  的区域,应使其低于 0.4. 考虑到电机对静挠度的要求,使该比值低于 0.4. 据此有

$$\frac{f_{by}}{0.4} < f_y, \quad \frac{f_{bz}}{0.4} < f_z \quad (11)$$

式中: $f_y, f_z$  分别为电机横移、浮沉振型频率; $f_{by}, f_{bz}$  分别为转向架横移、浮沉振型频率.

表 1 为所研究的电机吊挂车辆转向架振型频率及阻尼比. 根据模态匹配理论选取电机横移、浮沉振型频率均为 12Hz. 由于遗传算法具有适用性好、全局寻优能力强的特点<sup>[10-11]</sup>,本文采用遗传算法对各橡胶元件的三向刚度分别进行寻优计算. 表 2 为悬挂元件刚度计算结果,由此得到表 3 电机模态频率和解耦度计算结果,从表 3 可以看出,解耦度最低的达到了 94.1%,最高的达到了 100%,频率分布与期望结果基本一致.

表 1 转向架振型频率与阻尼比

Tab.1 Frequencies and damping ratio of bogie

振型	频率/Hz	阻尼比/%
侧滚	9.067	47.87
点头	7.845	19.73
浮沉	4.551	30.92
横移	3.075	42.51

表 2 悬挂元件刚度计算结果

Tab.2 Stiffness calculation results of suspension elements

元件序号	$k_{xi}/(\text{MN} \cdot \text{m}^{-1})$	$k_{yi}/(\text{MN} \cdot \text{m}^{-1})$	$k_{zi}/(\text{MN} \cdot \text{m}^{-1})$
1	1.670	0.780	0.780
2	1.820	0.780	0.780
3	1.960	1.090	1.090
4	2.200	1.090	1.090

表 3 电机模态频率和解耦度计算结果

Tab.3 Calculation results of motor modal frequencies and decoupling degree

方向	预定频率/Hz	计算频率/Hz	解耦度/%
$x$		17.2	100.0
$y$	12.0	12.0	95.6
$z$	12.0	12.1	94.1
$r_x$		6.2	98.4
$r_y$		17.7	100.0
$r_z$		11.4	100.0

## 2 解耦优化结果的隔振性能评价

为了验证电机解耦优化结果的隔振性能,将电机分别以刚性吊挂、弹性吊挂的形式安装于构架上:刚性吊挂直接将电机固接在构架上;弹性吊挂则采用橡胶隔振元件将电机悬挂于构架,其中,弹性吊挂采用表 2 解耦优化参数. 根据所研究的地铁车辆的动力学参数,建立车辆多体动力学仿真模型如图 2 所示,模型包含 1 个刚性车体、2 个转向架、4 个轮对以及 4 个牵引电机(前、后转向架各 2 个). 车体、转向架、轮对以及电机均考虑为刚性. 模型中考虑了以下非线性因素:轮轨接触非线性几何特性、非线性蠕滑力和蠕滑力矩、二系横向止挡的递增刚度特性、液压减振器的非线性特性.

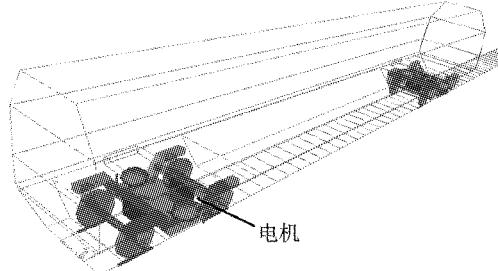


图 2 车辆多体动力学仿真模型  
Fig.2 Vehicle multi-body dynamics simulation model

图 3、图 4 为电机分别采用刚性吊挂与弹性吊挂方案,车辆运行速度为 80、90、100、110、120 km · h<sup>-1</sup> 时二系空簧下方构架振动加速度 RMS 值(均方根值)计算结果对比. 从图 3 可以看出,与刚性吊挂相比,解耦优化的弹性吊挂方案在不同速度下,前、后构架的横向振动加速度 RMS 值均小于刚性吊挂,并且车辆运行速度越大,效果越明显. 同样地,从图 4 可以看出,采取解耦优化的弹性吊挂方案后,构架的垂向振动 RMS 值有所降低.

图 5、图 6 为车辆运行速度为 120 km · h<sup>-1</sup> 工况下,电机分别采用刚性吊挂与弹性吊挂时前、后构架横向和垂向振动加速度功率谱密度计算结果. 从图 5

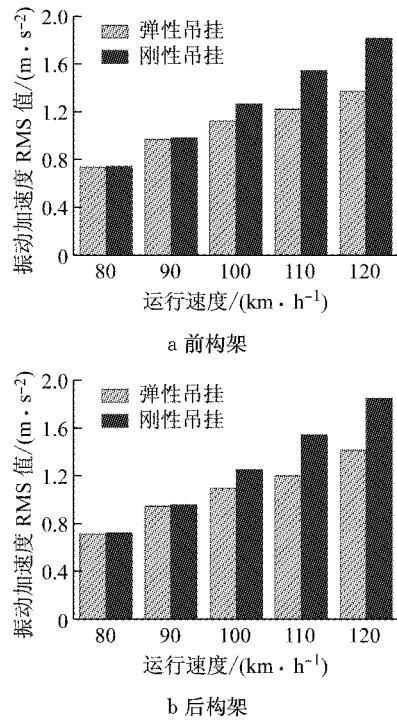


图3 构架横向振动加速度 RMS 值对比

Fig.3 Comparisons of RMS values of lateral vibration acceleration of frames

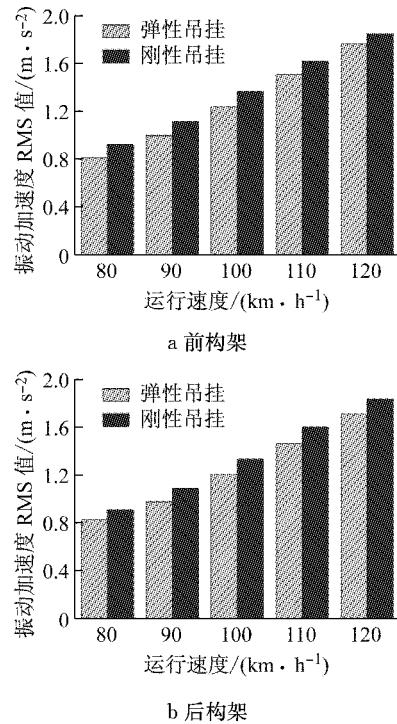


图4 构架垂向振动加速度 RMS 值对比

Fig.4 Comparisons of RMS values of vertical vibration acceleration of frames

可以看出,与刚性吊挂相比,电机采用解耦优化的弹性吊挂方案时,前、后构架的横向振动大大减小,在9~13 Hz频率范围内隔振效果明显。同样地,从图6

可以看出,电机采用解耦优化的弹性吊挂方案时,

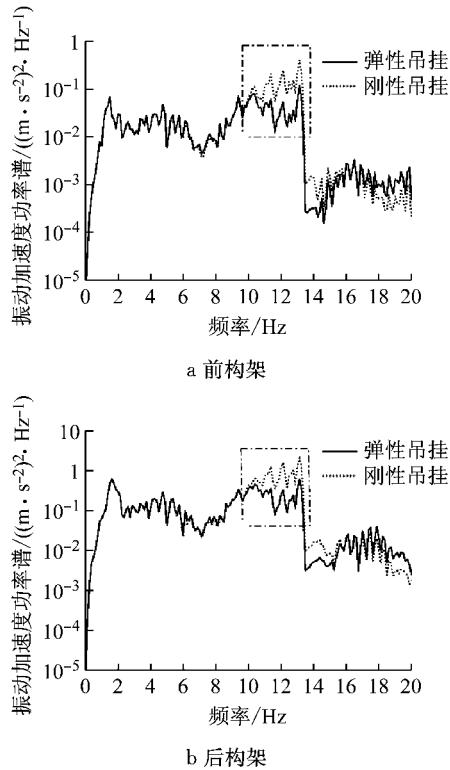


图5 构架横向振动加速度功率谱密度对比

Fig.5 Comparisons of power spectral density of lateral vibration acceleration of frames

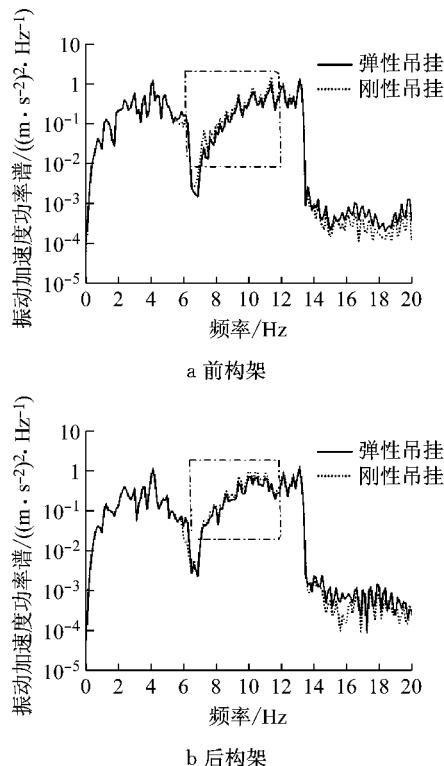


图6 构架垂向振动加速度功率谱密度对比

Fig.6 Comparisons of power spectral density of vertical vibration acceleration of frames

前、后构架的垂向振动小于刚性吊挂,在 7~12 Hz 频率范围内有隔振效果。

为研究电机吊挂方案对车体运行平稳性的影响,在转向架上方车体位置布置加速度传感器,得到不同速度下车体横向和垂向运行平稳性。从表 4 可见,就车辆运行平稳性而言,电机采取解耦优化的弹性吊挂方案与刚性吊挂方案相比差别不大,这表明电机振动对车体振动影响不大。

表 4 车辆运行平稳性计算结果对比

Tab.4 Sperling indexes of two schemes

方向	吊挂方案	$40 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$	$60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$	$80 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$
横向	弹性	2.016	2.660	2.889
	刚性	2.017	2.661	2.896
垂向	弹性	1.869	2.405	2.452
	刚性	1.873	2.409	2.472

### 3 电机解耦优化的应力和振动试验

对电机采用刚性吊挂、弹性吊挂方案时转向架构架应力和振动进行测试,其中,刚性吊挂直接将电机固接在构架上,电机弹性吊挂采用表 2 解耦优化参数,图 7 为依据表 2 参数设计出来的弹性吊挂元件,图 7a 为吊挂元件完整结构,每一个吊挂元件由 2 个橡胶圆环和 1 个钢芯组成,钢芯中部为吊挂电机的位置;图 7b 为橡胶圆环,橡胶圆环的主要材料由钢和天然橡胶构成,钢结构形成包络,其内部填充天然橡胶。通过调整橡胶件的配方比,各吊挂元件的三向刚度基本可达到电机解耦优化设计的数值,经过校核,误差范围在 8% 以内。为保持试验工况的一致性,减小线路因素对试验结果的影响,选取一段可保证车辆持续稳定运行大于 30s 的直线线路采集数据,测试列车空载状态时车辆运行速度在 80、100、120  $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$  3 个速度级下转向架构架应力和振动加速度。

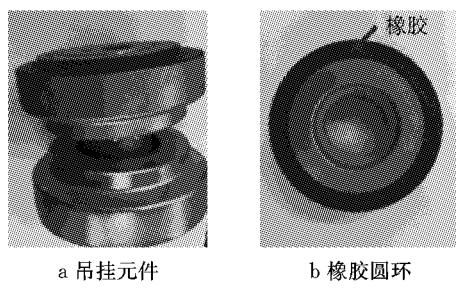
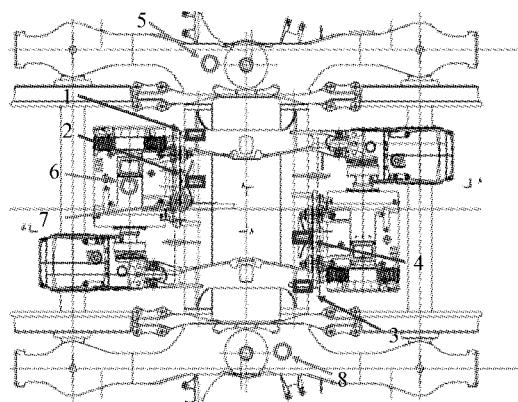


图 7 悬挂系统吊挂元件基本结构

Fig.7 Suspension element basic structure

依据电机与构架连接位置的受力特点,选取应力和振动测点位置如图 8 所示,其中 1~4 为应力测

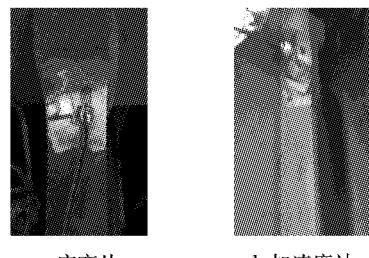
点,5~8 为振动测点。将应变片和加速度传感器分别布置于电机及构架的相应位置,其现场布置形式如图 9 所示。



1,2,3,4-电机吊座;5,8-侧梁;6-电机;7-电机吊座

图 8 转向架应力及振动测点示意

Fig.8 Bogie stress and vibration measuring points diagram



a 应变片 b 加速度计

图 9 现场测点布置

Fig.9 Site measurement points

地铁车辆在实际线路运行时产生的动载荷是引起转向架部件疲劳损坏的重要原因,因此对电机采取 2 种吊挂方案时电机吊座部位(测点 1~4)的应力时域结果进行统计,图 10 为电机吊座部位应力峰峰值统计结果,峰峰值为一个周期内最高信号与最低信号的差值,可反映测试部位所承受的最大拉、压应

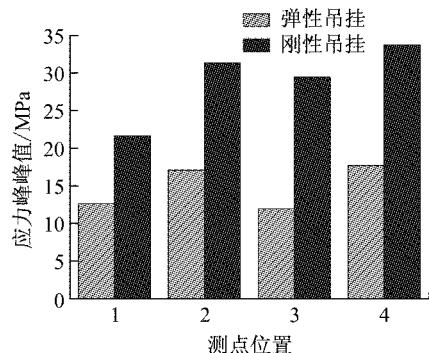


图 10 电机吊座部位应力峰峰值对比

Fig.10 Comparison of peak-to-peak stress in motor sling

力变化情况<sup>[12]</sup>. 从图 10 可以看出, 测点 1~4 处的应力峰峰值在电机采取刚性吊挂方案时明显较大, 这表明刚性吊挂方案会增加电机吊座的疲劳损伤风险, 而弹性吊挂方案可以有效降低电机吊座的疲劳损伤.

在 3 种运行速度( $80, 100, 120 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ )的工况下, 电机采取刚性吊挂及解耦优化的弹性吊挂方案时, 测点 6(电机)、测点 7(电机吊座)的横向、垂向振动加速度 RMS 值见表 5、表 6. 从表 5、表 6 可以看出, 电机采用解耦优化的弹性吊挂方案后, 电机及转向架的横向、垂向振动加速度有效值均有效降低, 这表明解耦优化后电机悬挂系统的参数配置是合理的.

表 5 测点 6(电机)振动加速度 RMS 值

Tab. 5 Measured point 6 (motor) vibration

		acceleration RMS values ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ )		
方向	吊挂方案	$80 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$	$100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$	$120 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$
横向	弹性	1.849	2.009	2.280
	刚性	2.558	2.794	3.788
垂向	弹性	1.958	1.971	2.027
	刚性	2.174	2.441	3.000

表 6 测点 7(电机吊座)振动加速度 RMS 值

Tab. 6 Measured point 7 (motor sling) vibration

		acceleration RMS values ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ )		
方向	吊挂方案	$80 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$	$100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$	$120 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$
横向	弹性	1.968	2.060	2.458
	刚性	2.091	2.493	4.598
垂向	弹性	1.955	2.374	3.227
	刚性	1.955	2.374	3.227

## 4 结语

(1) 将电机考虑成具有 6 个自由度的空间刚体, 建立悬挂系统的自由振动方程, 采用解耦度指标得到电机各自由度振动的耦合程度.

(2) 以解耦度为优化目标, 以电机横移及浮沉振型频率为约束条件, 基于遗传算法对电机悬挂系统各橡胶元件的三向刚度进行优化设计. 分析结果表明, 电机各阶刚体振型可获得良好的解耦度, 频率分布与期望值基本一致.

(3) 相对于刚性吊挂而言, 当电机采取解耦优化的弹性吊挂方案后, 可以有效降低转向架关键部位的振动以及动荷载, 从而有效降低转向架的疲劳损伤, 但对于车体运行平稳性的改善效果不明显. 研究结果可为铁道车辆悬挂系统的参数优化及减振提供参考.

## 参考文献:

- [1] 罗湘萍, 詹庆涛, 吴凯桦. 动车组转向架簧间大质量部件(牵引电机)振动解耦技术方案[J]. 城市轨道交通研究, 2016, 19(3):28.  
LUO Xiangping, ZHAN Qingtao, WU Kaihua, Vibration decoupling technology of the massive components (traction motor) between springs in EMU bogie [J]. Urban Mass Transit, 2016, 19(3):28.
- [2] 黄强. “先锋号”列车电机故障原因分析试验报告[J]. 铁道机车车辆, 2003, 23(A02):17.  
HUANG Qiang, Test report on failure analysis of "Pioneer" train [J]. Railway Locomotive & Car, 2003, 23(A02):17.
- [3] MA F, IMAM A, MORZFELD M. The decoupling of damped linear systems in oscillatory free vibration[J]. Journal of Sound & Vibration, 2009, 324(1/2):408.
- [4] JEONG T, SINGH R. Analytical methods of decoupling the automotive engine torque roll axis [J]. Journal of Sound & Vibration, 2000, 234(1):85.
- [5] 孙蓓蓓, 张启军, 孙庆鸿, 等. 汽车发动机悬置系统解耦方法研究[J]. 振动工程学报, 1994, 7(3):240.  
SUN Beibei, ZHANG Qijun, SUN Qinhong, et al. Study on decoupled engine mounting system [J]. Journal of Vibration Engineering, 1994, 7(3):240.
- [6] 陈树勋. 工程结构系统分析综合与优化设计[M]. [s.l.]: 中国科学文化出版社, 2008.  
CHEN Shuxun. Analysis synthesis and optimization of engineering structural system [M]. [s. l.]: China Science Culture Publishing House, 2008.
- [7] GONG D, ZHOU J, SUN W. Influence of under-chassis-suspended equipment on high-speed EMU trains and the design of suspension parameters[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F, Journal of Rail & Rapid Transit, 2016, 230(8):1790.
- [8] 宫岛, 周劲松, 孙文静, 等. 高速列车车下设备模态匹配研究[J]. 振动与冲击, 2014(8):180.  
GONG Dao, ZHOU Jinsong, SUN Wenjing, et al. Modes matching between suspended devices and car body for a high-speed railway vehicle [J]. Journal of Vibration and Shock, 2014(8): 180.
- [9] 周劲松. 铁道车辆振动与控制[M]. 北京: 中国铁道出版社, 2012.  
ZHOU Jinsong. Railway vehicle vibration and control [M]. Beijing: China Railway Publication House, 2012.
- [10] HOLLAND J H. Adaptation in natural and artificial systems: An introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence[J]. Quarterly Review of Biology, 1975, 6(2):126.
- [11] SHAPIRO J. Genetic algorithms in machine learning [J]. Lecture Notes in Computer Science, 2001, 2049: 146.
- [12] 张飞, 葛新峰, 潘罗平, 等. 稳态工况下水电机组主轴摆度峰峰值计算方法研究[J]. 振动与冲击, 2015, 34(21):170.  
ZHANG Fei, GE Xinfeng, PAN Luoping, et al. Shaft run-out's peak-to-peak value calculation method for a hydraulic power unit under stable conditions [J]. Journal of Vibration and Shock, 2015, 34(21): 170.