Doi:10.12051/j.issn.1674-4942.2022.03.004

带混合保费和投资复合Poisson-Geometric风险模型的生存概率

黄鸿君[1],覃利华[2*]
(1.广西民族师范学院 教育科学学院,广西 崇左 532200;
2.广西民族师范学院 数理与电子信息工程学院,广西 崇左 532200)

摘 要:在考虑到保费收入和通货膨胀等随机因素的干扰以及保险公司将多余资本用于投资来提高其赔付能力的基础上,本文对经典风险模型进行了推广。首先,建立了混合保费收取下带投资和扰动的双复合Poisson-Geometric过程的双险种风险模型,随机保费收入服从复合Poisson过程,理赔过程服从复合Poisson-Geometric过程;其次,应用全期望公式,推导了该模型生存概率的积分微分方程;最后,当保费、理赔过程服从特定指数分布时,得到其满足的微分方程。

关键词:复合Poisson-Geometric过程;生存概率;积分微分方程;混合保费
中图分类号:O211.5 **文献标志码**:A **文章编号**:1674-4942(2022)03-0260-08

The Survival Probability of an Poisson-Geometric Risk Model with Mixed Premium and Investment

HUANG Hongjun[1], QIN Lihua[2*]
(1. *School of Education Science, Guangxi Normal University for Nationalities, Chongzuo* 532200, *China*;
2. *School of Mathematics, Physics and Electronic Information Engineering, Guangxi Normal University for Nationalities, Chongzuo* 532200, *China*)

Abstract: Taking into account the disturbance of random factors such as premium income and inflation, as well as the excess capital invested by insurance companies to improve their payability, the classical risk model is extended in this paper. Firstly, a double risk model with investment and perturbation is established under the mixed premium collection. The stochastic premium income follows the compound Poisson process, and the claims process follows the compound Poisson-Geometric process. Secondly, the integral differential equation of the survival probability of the model is derived by using the total expectation formula. Finally, when the premium and claim process obey a specific exponential distribution, the differential equation satisfied is obtained.

Keywords: compound Poisson-Geometric process; survival probability; integral-differential equations; mixed premium

在经典风险模型中,理赔过程为单一险种的风险经营过程,但随着保险公司经营规模的不断扩大以及新险种的不断开发,用单一险种的风险模型来描述风险经营过程是有一定局限性的,因此有必要对复合Poisson模型进行推广,将单一险种推广为双险种。此外,经典风险模型假设保险公司在单位时间内收到的

收稿日期:2022-04-22
基金项目:广西高校中青年教师科研基础能力提升项目(2021KY0767);广西民族师范学院科研经费资助项目(2021YB054)
第一作者:黄鸿君(1988—),广西平南人,一级教师,研究方向为随机过程应用。E-mail:546033654@qq.com
*通信作者:覃利华(1987—),广西来宾人,讲师,研究方向为随机过程应用。E-mail:631898027@qq.com

保费是某一固定常数，但是保险公司在实际业务中，在单位时间内还会收到不同保费的保单，这是服从某一分布的随机变量。为了改进和优化经典风险模型，文献[1]研究了一类常利率下带干扰且保费随机的复合风险模型的生存概率所满足的积分微分方程。文献[2]研究常利率下保费收入为复合Poisson过程，而理赔次数为复合Poisson-Geometric过程的风险模型，得到生存概率所满足的积分方程及其在指数分布下的具体表达式。文献[3]研究一种索赔到达服从复合Poisson-Geometric过程的二维风险模型，得到该模型的生存概率所满足的积分微分方程。文献[4]考虑常利率下存在红利界限和随机干扰的风险模型，得到生存概率和红利付款的期望现值分别满足的积分微分方程。文献[5]建立以保费收入服从复合Poisson过程，理赔量服从复合Poisson-Geometric过程的带投资的干扰风险模型，推导了生存概率的积分微分方程及在保费额和理赔量都服从指数分布下的微分方程。文献[6]考虑了确定风险投资和有界分红的复合Poisson-Geometric风险模型，得到期望累积红利现值函数所满足的微积分方程。文献[7]讨论借贷利率的影响，建立了带有干扰的双Poisson-Geometric的风险模型，得到无限时和有限时的相应微积分方程。文献[8]和文献[9]均是对Poisson-Geometric风险模型做进一步推广，保费到达和索赔到达均采用Poisson-Geometric过程，建立相应的风险模型，给出保费和索赔均服从指数分布时破产概率的具体形式。

本研究在以上工作的基础上对文献[5]的模型进行推广，增加了固定保费收入并把单险种推广为双险种，从而建立了保费收取为固定保费和随机保费并且带有投资收益复合Poisson-Geometric过程的双险种模型，其中，固定保费服从线性增长过程，随机保费服从复合Poisson分布，索赔过程均服从Poisson-Geometric计数过程。研究的目的是推导生存概率所满足的积分微分方程以及当保费、理赔过程服从特定指数分布时所满足的微分方程。本文将模型进行了推广，随着险种的多元化，应用全期望公式与积分变换公式推导生存概率的积分微分方程。相比原模型，一是分类情况增多，每个类别进行了一一讨论；二是推导证明的复杂程度增加，利用线性运算进行了推导化简整理。

本研究的内容结构如下：第1节为模型的建立及介绍，第2节为研究的主要结论及证明过程，第3节为结论。

1 模型的建立及介绍

定义1　在概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上，定义保险公司盈余过程为

$$U(t)=(u-F)+(1+tj)F+ct+\sum_{k=1}^{M(t)}X_k-\sum_{k=1}^{N_1(t)}Y_k-\sum_{k=1}^{N_2(t)}Z_k+aW(t),t\geqslant 0\ , \tag{1}$$

盈利过程为

$$S(t)=tjF+ct+\sum_{k=1}^{M(t)}X_k-\sum_{k=1}^{N_1(t)}Y_k-\sum_{k=1}^{N_2(t)}Z_k+aW(t),t\geqslant 0。 \tag{2}$$

其中，u为初始准备金，F是投资额，j是单位时间内投资收益率，c是单位时间内保险公司收到固定的保费，$\{W(t),t\geqslant 0\}$是标准的布朗运动，表示不确定的收付，a为干扰系数；$\sum_{k=1}^{M(t)}X_k$表示$(0,\ t]$时间内保险公司收到的随机总保费额，计数过程$M(t)$表示签订的随机保单数服从参数为λt的复合Poisson过程；X_k表示第k次收到的随机保费额，$X=\{X_k\}_{k\geqslant 0}$是均值为μ、方差为σ的非负独立同分布随机变量序列，其分布函数用$F(x)$表示，密度函数用$f(x)$表示，$\bar{F}(x)=1-F(x)$，是$F(x)$的尾函数；$\sum_{k=1}^{N_1(t)}Y_k$表示$(0,\ t]$时间内第一类保单发生的总索赔额，计数过程$N_1(t)$表示第一类索赔的保单数且服从参数为$(\lambda_1 t,\rho_1)(\lambda_1>0,0\leqslant\rho_1\leqslant 1)$的复合Poisson-Geometric过程，$E[N_1(t)]=\dfrac{\lambda_1 t}{1-\rho_1}$，$\mathrm{Var}[N_1(t)]=\dfrac{\lambda_1 t(1+\rho_1)}{(1-\rho_1)^2}$；$Y_k$表示第$k$次理赔的理赔金额，$Y=\{Y_k,\ k=1,\ 2,\ \cdots\}$是均值为$\mu_1$、方差为$\sigma_1$的非负独立同分布随机变量序列，其分布函数为$G(y)$，密度函数为$g(y)$且$\bar{G}(y)=1-G(y)$；$\sum_{k=1}^{N_2(t)}Z_k$表示$(0,\ t]$时间内第二类保单发生的总索赔额，计数过程$N_2(t)$表示第二类索赔的保

单数且服从参数为$(\lambda_2 t,\rho_2)(\lambda_2>0,\ 0\leqslant\rho_2<1)$的复合Poisson-Geometric过程，$E[N_2(t)]=\frac{\lambda_2 t}{1-\rho_2}$，$\mathrm{Var}[N_2(t)]=\frac{\lambda_2 t(1+\rho_2)}{(1-\rho_2)^2}$；$Z_k$表示第$k$次理赔的理赔金额，$Z=\{Z_k,\ k=1,\ 2,\ \cdots\}$是均值为$\mu_2$、方差为$\sigma_2$的非负独立同分布随机变量序列，其分布函数为$H(z)$，密度函数为$h(y)$且$\bar{H}(y)=1-H(y)$。本文假设保险公司收取保费、进行赔付及支付红利均在时间区间$(t-1,t]$的始端进行，且$\{X_k,k\geqslant 0\}$、$\{Y_k,k\geqslant 0\}$、$\{Z_k,k\geqslant 0\}$、$\{M(t),t\geqslant 0\}$、$\{N_1(t),t\geqslant 0\}$、$\{N_2(t),t\geqslant 0\}$之间是相互独立的。

为了保证保险公司的正常运行，须保证收入总和大于支出总和，即

$$\begin{aligned}E[S(t)]&=E\left[tjF+ct+\sum_{k=1}^{M(t)}X_k-\sum_{k=1}^{N_1(t)}Y_k-\sum_{k=1}^{N_2(t)}Z_k+\sigma W(t)\right]\\&=tjF+ct+E\left[M(t)\right]E\left[X_k\right]-E\left[N_1(t)\right]E\left[Y_k\right]-E\left[N_2(t)\right]E\left[Z_k\right]\\&=\left(jF+c+\lambda\mu-\frac{\lambda_1\mu_1}{1-\rho_1}-\frac{\lambda_2\mu_2}{1-\rho_2}\right)t>0,\end{aligned}$$

因为$t>0$，所以$jF+c+\lambda\mu-\frac{\lambda_1\mu_1}{1-\rho_1}-\frac{\lambda_2\mu_2}{1-\rho_2}>0$。

在此定义相对安全负荷系数为

$$\theta=\frac{jF+c+\lambda\mu}{\frac{\lambda_1\mu_1}{1-\rho_1}+\frac{\lambda_2\mu_2}{1-\rho_2}}-1,$$

并且$\theta>0$(当$\theta\leqslant 0$时，必然会发生破产)。

定义2 破产时刻为$T=\inf\{t:t\geqslant 0,\ U(t)<0\}(\inf\phi=\infty)$，破产概率为$\psi(u)=\Pr\left(T<\infty\middle|U(0)=u\right)$，生存概率为$\varphi(u)=1-\psi(u)$。

2 主要结论及证明

为了证明定理1，首先给出如下几个引理。

引理1[10] 设$\{N_i(t),t\geqslant 0\}(i=1,2)$是满足模型(1)的复合Poisson-Geometric过程，记$\alpha_i=\frac{\lambda_i(1-\rho_i)}{\rho_i}(i=1,2)$(若$\rho_i=0$，则取$\pi=\lambda$)，则当$t$足够小时，有$\Pr(N_i(t)=0)=e^{-\lambda_i t}=1-\lambda_i t+o(t)$，$\Pr(N_i(t)=k)=\alpha_i\rho_i^k t+A_{ik}(t)o(t),k=1,2,\cdots$，其中$A_{ik}(t)=\rho_i^k+(k-1)[\rho_i(1+\alpha_i t)]^{k-2}$，$o(t)$是关于$t$的高阶无穷小，$\sum_{k=0}^{\infty}A_{ik}(t)$一致收敛。

引理2[10] $\lim\limits_{u\to\infty}\varphi(u)=1,a.s.$。

记$G^{*k}(y)$为$G(y)$的k重卷积，$g^{*k}(y)$为$g(y)$的k重卷积，并记

$$G_{\rho_1}(y)=\sum_{k=1}^{\infty}(1-\rho_1)\rho_1^{k-1}G^{*k}(y),g_{\rho_1}(y)=\sum_{k=1}^{\infty}(1-\rho_1)\rho_1^{k-1}g^{*k}(y)。$$

记$H^{*k}(z)$为$H(z)$的k重卷积，$h^{*k}(z)$为$h(z)$的k重卷积，并记

$$H_{\rho_2}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}(1-\rho_2)\rho_2^{k-1}H^{*k}(z),h_{\rho_2}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}(1-\rho_2)\rho_2^{k-1}h^{*k}(z)。$$

定理1 $\varphi(u)$关于u可微，则在模型(1)下生存概率的积分-微分方程为

$$\gamma-Fj\varphi(u)-\frac{a^2}{2}\varphi'(u)=\lambda^*\int_u^{\infty}\varphi(s)\bar{F}(s-u)\mathrm{d}s+\lambda_1\int_u^{\infty}\varphi(s)\bar{G}_{\rho_1}(s-u)\mathrm{d}s+\lambda_2\int_u^{\infty}\varphi(s)\bar{H}_{\rho_2}(s-u)\mathrm{d}s,$$

其中，$\gamma=Fj+c$。

证明：时间$\mathrm{d}t$足够小时，结合引理1，在时间段$(0,\mathrm{d}t]$内有下面5种情况：

(1)当随机保费收取，两类索赔发生次数均为0时，事件发生的概率为

$$\begin{aligned}&\Pr[M(\mathrm{d}t)=0,N_1(\mathrm{d}t)=0,N_2(\mathrm{d}t)=0]\\&=[1-\lambda^*\mathrm{d}t+o(\mathrm{d}t)][1-\lambda_1\mathrm{d}t+o(\mathrm{d}t)][1-\lambda_2\mathrm{d}t+o(\mathrm{d}t)]\\&=1-(\lambda^*+\lambda_1+\lambda_2)\mathrm{d}t+o(\mathrm{d}t)。\end{aligned}$$

(2)当随机保费收取0次，第一类索赔发生k次，第二类索赔发生0次，事件发生的概率为

$$\begin{aligned}&\Pr[M(\mathrm{d}t)=0,N_1(\mathrm{d}t)=k,N_2(\mathrm{d}t)=0]\\&=[1-\lambda^*\mathrm{d}t+o(\mathrm{d}t)][\alpha_1\rho_1^k\mathrm{d}t+A_{1k}(\mathrm{d}t)o(\mathrm{d}t)(\mathrm{d}t)][1-\lambda_2\mathrm{d}t+o(\mathrm{d}t)]\\&=\alpha_1\rho_1^k\mathrm{d}t+A_{1k}(\mathrm{d}t)o(\mathrm{d}t)。\end{aligned}$$

(3)当随机保费收取0次，第一类索赔发生0次，第二类索赔发生k次，事件发生的概率为

$$\begin{aligned}&\Pr[M(\mathrm{d}t)=0,N_1(\mathrm{d}t)=0,N_2(\mathrm{d}t)=k]\\&=[1-\lambda^*\mathrm{d}t+o(\mathrm{d}t)][1-\lambda_1\mathrm{d}t+o(\mathrm{d}t)][\alpha_2\rho_2^k\mathrm{d}t+A_{2k}(\mathrm{d}t)o(\mathrm{d}t)(\mathrm{d}t)]\\&=\alpha_2\rho_2^k\mathrm{d}t+A_{2k}(\mathrm{d}t)o(\mathrm{d}t)。\end{aligned}$$

(4)当随机保费收取1次，两类索赔发生次数均为0时，事件发生的概率为

$$\begin{aligned}&\Pr[M(\mathrm{d}t)=1,N_1(\mathrm{d}t)=0,N_2(\mathrm{d}t)=0]\\&=\lambda^*\mathrm{d}t[1-\lambda_1\mathrm{d}t+o(\mathrm{d}t)][1-\lambda_2\mathrm{d}t+o(\mathrm{d}t)]\\&=\lambda^*\mathrm{d}t+o(\mathrm{d}t)。\end{aligned}$$

(5)其他情况发生的概率为$o(\mathrm{d}t)$。

对于上述情况(2)，在时间段$(0,\mathrm{d}t]$内，总索赔量$y>u+c\mathrm{d}t+Fj\mathrm{d}t+aW(\mathrm{d}t)$时，破产一定会发生，因此有$\varphi(u+c\mathrm{d}t+Fj\mathrm{d}t+aW(\mathrm{d}t)-y)=0$。

同理，对于上述情况(3)，在时间段$(0,\mathrm{d}t]$内，总索赔量$z>u+c\mathrm{d}t+Fj\mathrm{d}t+aW(\mathrm{d}t)$时，破产一定会发生，因此有$\varphi(u+c\mathrm{d}t+Fj\mathrm{d}t+aW(\mathrm{d}t)-z)=0$。

由全期望公式得

$$\begin{aligned}\varphi(u)=&[1-(\lambda^*+\lambda_1+\lambda_2)\mathrm{d}t+o(\mathrm{d}t)]E\varphi(u+c\mathrm{d}t+Fj\mathrm{d}t+aW(\mathrm{d}t))\\&+\sum_{k=1}^{\infty}E\int_0^{u+c\mathrm{d}t+Fj\mathrm{d}t+aW(\mathrm{d}t)}\varphi(u+c\mathrm{d}t+Fj\mathrm{d}t+aW(\mathrm{d}t)-y)\,[\alpha_1\rho_1^k\mathrm{d}t+A_{1k}(\mathrm{d}t)o(\mathrm{d}t)]\,\mathrm{d}G^{*k}(y)\\&+\sum_{k=1}^{\infty}E\int_0^{u+c\mathrm{d}t+Fj\mathrm{d}t+aW(\mathrm{d}t)}\varphi(u+c\mathrm{d}t+Fj\mathrm{d}t+aW(\mathrm{d}t)-z)\,[\alpha_2\rho_2^k\mathrm{d}t+A_{2k}(\mathrm{d}t)o(\mathrm{d}t)]\,\mathrm{d}H^{*k}(z)\\&+[\lambda^*\mathrm{d}t+o(\mathrm{d}t)]E\int_0^{\infty}\varphi(u+c\mathrm{d}t+Fj\mathrm{d}t+aW(\mathrm{d}t)+x)\mathrm{d}F(x)+o(\mathrm{d}t)。\end{aligned}\tag{3}$$

对于$E\varphi(u+c\mathrm{d}t+Fj\mathrm{d}t+aW(\mathrm{d}t))$，根据泰勒展开式及$\varphi(u)$的可微性有

$$E\varphi(u+c\mathrm{d}t+Fj\mathrm{d}t+aW(\mathrm{d}t))=\varphi(u)+(c\mathrm{d}t+Fj\mathrm{d}t)\varphi'(u)+\frac{a^2\mathrm{d}t}{2}\varphi''(u)+o(dt)。\tag{4}$$

由引理1知$\sum_{k=1}^{\infty}\rho_1^kg^{*k}(y)$、$\sum_{k=1}^{\infty}\rho_2^kh^{*k}(z)$、$\sum_{k=1}^{\infty}A_{1k}(\mathrm{d}t)g^{*k}(y)$、$\sum_{k=1}^{\infty}A_{2k}(\mathrm{d}t)h^{*k}(z)$均一致收敛，因此由单调收敛定理得

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\infty}E\int_0^{u+c\mathrm{d}t+Fj\mathrm{d}t+aW(\mathrm{d}t)}\varphi(u+c\mathrm{d}t+Fj\mathrm{d}t+aW(\mathrm{d}t)-y)\,[\alpha_1\rho_1^k\mathrm{d}t+A_{1k}(\mathrm{d}t)o(\mathrm{d}t)]\,\mathrm{d}G^{*k}(y)\\&=E\int_0^{u+c\mathrm{d}t+Fj\mathrm{d}t+aW(\mathrm{d}t)}\varphi(u+c\mathrm{d}t+Fj\mathrm{d}t+aW(\mathrm{d}t)-y)\sum_{k=1}^{\infty}[\alpha_1\rho_1^k\mathrm{d}t+A_{1k}(\mathrm{d}t)o(\mathrm{d}t)]\,g^{*k}(y)\mathrm{d}y\\&=E\int_0^{u+c\mathrm{d}t+Fj\mathrm{d}t+aW(\mathrm{d}t)}\varphi(u+c\mathrm{d}t+Fj\mathrm{d}t+aW(\mathrm{d}t)-y)\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_1t(1-\rho_1)\rho_1^{k-1}g^{*k}(y)\mathrm{d}y+o(\mathrm{d}t)\\&=\lambda_1\mathrm{d}tE\int_0^{u+c\mathrm{d}t+Fj\mathrm{d}t+aW(\mathrm{d}t)}\varphi(u+c\mathrm{d}t+Fj\mathrm{d}t+aW(\mathrm{d}t)-y)g_{\rho_1}(y)\mathrm{d}y+o(\mathrm{d}t)。\end{aligned}\tag{5}$$

同理得

$$\sum_{k=1}^{\infty}E\int_0^{u+c\mathrm{d}t+Fj\mathrm{d}t+aW(\mathrm{d}t)}\varphi(u+c\mathrm{d}t+Fj\mathrm{d}t+aW(\mathrm{d}t)-z)\,[\alpha_2\rho_2^k\mathrm{d}t+A_{2k}(\mathrm{d}t)o(\mathrm{d}t)]\,\mathrm{d}H^{*k}(z)$$

$$= \lambda_2 \mathrm{d}t E\int_0^{u+c\mathrm{d}t+Fj\mathrm{d}t+aW(\mathrm{d}t)} \varphi(u+c\mathrm{d}t+Fj\mathrm{d}t+aW(\mathrm{d}t)-z)h_{\rho_2}(z)\mathrm{d}z+o(\mathrm{d}t)。 \tag{6}$$

把式(4)~(6)代入式(3)并变形整理得

$$\begin{aligned}&(\lambda^*+\lambda_1+\lambda_2)\mathrm{d}t\varphi(u)-(c\mathrm{d}t+Fj\mathrm{d}t)\varphi'(u)-\frac{\varphi''(u)}{2}a^2\mathrm{d}t\\ &=\lambda_1\mathrm{d}tE\int_0^{u+c\mathrm{d}t+Fj\mathrm{d}t+aW(\mathrm{d}t)}\varphi(u+c\mathrm{d}t+Fj\mathrm{d}t+aW(\mathrm{d}t)-y)g_{\rho_1}(y)\mathrm{d}y\\ &+\lambda_2\mathrm{d}tE\int_0^{u+c\mathrm{d}t+Fj\mathrm{d}t+aW(\mathrm{d}t)}\varphi(u+c\mathrm{d}t+Fj\mathrm{d}t+aW(\mathrm{d}t)-z)h_{\rho_2}(z)\mathrm{d}z\\ &+\lambda^*\mathrm{d}tE\int_0^{\infty}\varphi(u+c\mathrm{d}t+Fj\mathrm{d}t+aW(\mathrm{d}t)+x)\mathrm{d}F(x)+o(\mathrm{d}t)。\end{aligned} \tag{7}$$

对式(7)两边同时除以$\mathrm{d}t$,并令$\mathrm{d}t\to 0$,且由$\gamma=Fj+c$得

$$\begin{aligned}&(\lambda^*+\lambda_1+\lambda_2)\varphi(u)-\gamma\varphi'(u)-\frac{a^2}{2}\varphi''(u)\\ &=\lambda_1\int_0^u\varphi(u-y)g_{\rho_1}(y)\mathrm{d}y+\lambda_2\int_0^u\varphi(u-z)h_{\rho_2}(z)\mathrm{d}z+\lambda^*\int_0^{\infty}\varphi(u+x)f(x)\mathrm{d}x。\end{aligned} \tag{8}$$

对式(8)两端对u从0到η积分得

$$\begin{aligned}&(\lambda^*+\lambda_1+\lambda_2)\int_0^{\eta}\varphi(u)\mathrm{d}u-\gamma\int_0^{\eta}\varphi'(u)\mathrm{d}u-\frac{a^2}{2}\int_0^{\eta}\varphi''(u)\mathrm{d}u\\ &=\lambda_1\int_0^{\eta}\int_0^u\varphi(u-y)g_{\rho_1}(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}u+\lambda_2\int_0^{\eta}\int_0^u\varphi(u-z)h_{\rho_2}(z)\mathrm{d}z\mathrm{d}u+\lambda^*\int_0^{\eta}\int_0^{\infty}\varphi(u+x)\mathrm{d}F(x)\mathrm{d}u。\end{aligned} \tag{9}$$

令$u-y=s$,有

$$\begin{aligned}\lambda_1\int_0^{\eta}\int_0^u\varphi(u-y)g_{\rho_1}(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}u&=\lambda_1\int_0^{\eta}\int_0^u\varphi(s)g_{\rho_1}(u-s)\mathrm{d}s\mathrm{d}u\\ &=\lambda_1\int_0^{\eta}\int_s^{\eta}\varphi(s)g_{\rho_1}(u-s)\mathrm{d}s\mathrm{d}u\\ &=\lambda_1\int_0^{\eta}\varphi(s)G_{\rho_1}(u-s)\mathrm{d}s。\end{aligned} \tag{10}$$

同理令$u-z=s$,有

$$\lambda_2\int_0^{\eta}\int_0^u\varphi(u-z)h_{\rho_2}(z)\mathrm{d}z\mathrm{d}u=\lambda_2\int_0^{\eta}\varphi(s)H_{\rho_2}(u-s)\mathrm{d}s。 \tag{11}$$

令$u+x=s$,得

$$\begin{aligned}&\lambda^*\int_0^{\eta}\int_0^{\infty}\varphi(u+x)\mathrm{d}F(x)\mathrm{d}u\\ &=\lambda^*\int_0^{\eta}\int_u^{\infty}\varphi(s)f(s-u)\mathrm{d}s\mathrm{d}u\\ &=\lambda^*\int_0^{\eta}\int_0^{s}\varphi(s)f(s-u)\mathrm{d}s\mathrm{d}u+\lambda^*\int_{\eta}^{\infty}\int_0^{\eta}\varphi(s)f(s-u)\mathrm{d}s\mathrm{d}u\\ &=\lambda^*\int_0^{\eta}\varphi(s)F(s)\mathrm{d}s+\lambda^*\int_{\eta}^{\infty}\varphi(s)[F(s)-F(s-\eta)]\mathrm{d}s。\end{aligned} \tag{12}$$

把式(10)~(12)代入式(9)并变形整理得

$$\begin{aligned}&(\lambda^*+\lambda_1+\lambda_2)\int_0^{\eta}\varphi(u)\mathrm{d}u-\gamma[\varphi(\eta)-\varphi(0)]-\frac{a^2}{2}[\varphi'(\eta)-\varphi'(0)]\\ &=\lambda_1\int_0^{\eta}\varphi(s)G_{\rho_1}(u-s)\mathrm{d}s+\lambda_2\int_0^{\eta}\varphi(s)H_{\rho_2}(u-s)\mathrm{d}s\\ &+\lambda^*\int_0^{\eta}\varphi(s)F(s)\mathrm{d}s+\lambda^*\int_{\eta}^{\infty}\varphi(s)[F(s)-F(s-\eta)]\mathrm{d}s。\end{aligned} \tag{13}$$

在式(13)中,令$\eta\to\infty$,由引理2易知$\varphi(\infty)=1$,即$\varphi'(\infty)=0$。则

$$\gamma\varphi(0)+\frac{a^2}{2}\varphi'(0)=\lambda_1\int_0^\infty\varphi(s)[G_{\rho_1}(s)-1]\mathrm{d}s+\lambda_2\int_0^\infty\varphi(s)[H_{\rho_2}(s)-1]\mathrm{d}s$$
$$+\lambda^*\int_0^\infty\varphi(s)[F(u-s)-1]\mathrm{d}s+Fj+c。\tag{14}$$

把式(14)代入到式(13)，并化简得

$$\gamma-Fj\varphi(\eta)-\frac{a^2}{2}\varphi'(\eta)=\lambda^*\int_\eta^\infty\varphi(s)\bar{F}(s-\eta)\mathrm{d}s+\lambda_1\int_\eta^\infty\varphi(s)\bar{G}_{\rho_1}(s-\eta)\mathrm{d}s$$
$$+\lambda_2\int_\eta^\infty\varphi(s)\bar{H}_{\rho_2}(s-\eta)\mathrm{d}s。\tag{15}$$

在式(15)中把η换成u得

$$\gamma-Fj\varphi(u)-\frac{a^2}{2}\varphi'(u)=\lambda^*\int_u^\infty\varphi(s)\bar{F}(s-u)\mathrm{d}s+\lambda_1\int_u^\infty\varphi(s)\bar{G}_{\rho_1}(s-u)\mathrm{d}s+\lambda_2\int_u^\infty\varphi(s)\bar{H}_{\rho_2}(s-u)\mathrm{d}s。$$

定理得证。

定理2　假设X_i服从参数为α的指数分布，Y_i服从参数为β_1的指数分布，Z_i服从参数为β_2的指数分布，则生存概率满足的微分方程为

$$[(\gamma\alpha+\lambda^*)b_1b_2+b_1\alpha(\lambda_2-\lambda_1)]\varphi'(u)+[(\gamma\alpha+\lambda^*+\lambda_2)b_1-\alpha(\lambda_2+\lambda_1)]\varphi''(u)$$
$$+[-\frac{a^2}{2}b_1b_2+(b_1+b_2)(\frac{a^2}{2}\alpha-\gamma)+(\frac{a^2}{2}\alpha+\lambda^*+\lambda_1+\lambda_2)]\varphi'''(u)$$
$$+[-\frac{a^2}{2}(b_1+b_2)+\frac{a^2}{2}\alpha-\gamma]\varphi^{(4)}(u)-\frac{a^2}{2}\varphi^{(5)}(u)=0,$$

其中$b_i=(1-\rho_i)\beta_i, i=1,2$。

证明：由条件得$f(x)=\alpha e^{-\alpha x}$，$g^{*k}(y)=\dfrac{\beta_1^k y^{k-1}}{(k-1)!}$，$g_{\rho_1}(y)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(1-\rho_1)\rho_1^{k-1}{}^{*k}(y)=(1-\rho_1)\beta_1 e^{-(1-\rho_1)\beta_1 y}$，

$$h^{*k}(z)=\frac{\beta_2^k z^{k-1}}{(k-1)!},h_{\rho_2}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}(1-\rho_2)\rho_2^{k-1}h^{*k}(z)=(1-\rho_2)\beta_2 e^{-(1-\rho_2)\beta_2 z}。$$

若记$b_i=(1-\rho_i)\beta_i, i=1,2$，则对式(8)两端同时求一阶导数得

$$(\lambda^*+\lambda_1+\lambda_2)\varphi'(u)-\gamma\varphi''(u)-\frac{a^2}{2}\varphi'''(u)+(\lambda^*\alpha-b_1\lambda_1-b_2\lambda_2)\varphi(u)$$
$$=\lambda^*\alpha\int_0^\infty\varphi(u+x)f(x)\mathrm{d}x-b_1\lambda_1\int_0^u\varphi(u-y)g_{\rho_1}(y)\mathrm{d}y-b_2\lambda_2\int_0^u\varphi(u-z)h_{\rho_2}(z)\mathrm{d}z。\tag{16}$$

对式(8)两端同时求二阶导数得

$$(\lambda^*+\lambda_1+\lambda_2)\varphi''(u)-\gamma\varphi'''(u)-\frac{a^2}{2}\varphi^{(4)}(u)+(\lambda^*\alpha-b_1\lambda_1-b_2\lambda_2)\varphi'(u)$$
$$+(\lambda^*\alpha^2+b_1^2\lambda_1+b_2^2\lambda_2)\varphi(u)$$
$$=\lambda^*\alpha^2\int_0^\infty\varphi(u+x)f(x)\mathrm{d}x+b_1^2\lambda_1\int_0^u\varphi(u-y)g_{\rho_1}(y)\mathrm{d}y+b_2^2\lambda_2\int_0^u\varphi(u-z)h_{\rho_2}(z)\mathrm{d}z。\tag{17}$$

对式(8)两端同时求三阶导数得

$$(\lambda^*+\lambda_1+\lambda_2)\varphi'''(u)-\gamma\varphi^{(4)}(u)-\frac{a^2}{2}\varphi^{(5)}(u)+(\lambda^*\alpha-b_1\lambda_1-b_2\lambda_2)\varphi''(u)$$
$$+(\lambda^*\alpha^2+b_1^2\lambda_1+b_2^2\lambda_2)\varphi'(u)+(\lambda^*\alpha^3-b_1^3\lambda_1-b_2^3\lambda_2)\varphi(u)$$
$$=\lambda^*\alpha^3\int_0^\infty\varphi(u+x)f(x)\mathrm{d}x-b_1^3\lambda_1\int_0^u\varphi(u-y)g_{\rho_1}(y)\mathrm{d}y-b_2^3\lambda_2\int_0^u\varphi(u-z)h_{\rho_2}(z)\mathrm{d}z。\tag{18}$$

式(8)乘以$(-\alpha)$加式(16)，并化简得

$$-[(\alpha+b_1)\lambda_1+(\alpha+b_2)\lambda_2]\varphi(u)+(\gamma\alpha+\lambda^*+\lambda_1+\lambda_2)\varphi'(u)+(\frac{a^2}{2}\alpha-\gamma)\varphi''(u)-\frac{a^2}{2}\varphi'''(u)$$
$$=-(\alpha+b_1)\lambda_1\int_0^u\varphi(u-y)g_{\rho_1}(y)\mathrm{d}y\ -(\alpha+b_2)\lambda_2\int_0^u\varphi(u-z)h_{\rho_2}(z)\mathrm{d}z。\tag{19}$$

式(16)乘以$(-\alpha)$加式(17)，并化简得

$$\begin{aligned}&[(b_1\lambda_1(\alpha+b_1)+b_2\lambda_2(\alpha+b_2)]\varphi(u)-[(\alpha+b_1)\lambda_1+(\alpha+b_2)\lambda_2]\varphi'(u)\\&+(\gamma\alpha+\lambda^*+\lambda_1+\lambda_2)\varphi''(u)+(\frac{a^2}{2}\alpha-\gamma)\varphi'''(u)-\frac{a^2}{2}\varphi^{(4)}(u)\\&=(\alpha+b_1)b_1\lambda_1\int_0^u\varphi(u-y)g_{\rho_1}(y)\mathrm{d}y+(\alpha+b_2)b_2\lambda_2\int_0^u\varphi(u-z)h_{\rho_2}(z)\mathrm{d}z。\end{aligned}\tag{20}$$

式(17)乘以(-α)加式(18),并化简得

$$\begin{aligned}&-[b_1^2\lambda_1(\alpha+b_1)+b_2^2\lambda_2(\alpha+b_2)]\varphi(u)+[b_1\lambda_1(\alpha+b_1)+b_2\lambda_2(\alpha+b_2)]\varphi'(u)\\&-[(\alpha+b_1)\lambda_1+(\alpha+b_2)\lambda_2]\varphi''(u)+(\frac{a^2}{2}\alpha+\lambda^*+\lambda_1+\lambda_2)\varphi'''(u)\\&+(\frac{a^2}{2}\alpha-\gamma)\varphi^{(4)}(u)-\frac{a^2}{2}\varphi^{(5)}(u)\\&=-(\alpha+b_1)b_1^2\lambda_1\int_0^u\varphi(u-y)g_{\rho_1}(y)\mathrm{d}y-(\alpha+b_2)b_2^2\lambda_2\int_0^u\varphi(u-z)h_{\rho_2}(z)\mathrm{d}z。\end{aligned}\tag{21}$$

式(19)乘以b_1加式(20),并化简得

$$\begin{aligned}&[(b_2-b_1)(\alpha+b_2)\lambda_2]\varphi(u)+[(\gamma\alpha+\lambda^*+\lambda_2)b_1-\alpha\lambda_1-(\alpha+b_2)\lambda_2]\varphi'(u)\\&+[(\frac{a^2}{2}\alpha-\gamma)b_1+\gamma\alpha+\lambda^*+\lambda_1+\lambda_2]\varphi''(u)+(-\frac{a^2}{2}b_1+\frac{a^2}{2}\alpha-\gamma)\varphi'''(u)-\frac{a^2}{2}\varphi^{(4)}(u)\\&=(b_2-b_1)(\alpha+b_2)\lambda_2\int_0^u\varphi(u-z)h_{\rho_2}(z)\mathrm{d}z。\end{aligned}\tag{22}$$

式(20)乘以b_1加式(21),并化简得

$$\begin{aligned}&(b_1-b_2)(\alpha+b_2)b_2\lambda_2\varphi(u)+(b_2-b_1)(\alpha+b_2)\lambda_2\varphi'(u)+[(\gamma\alpha+\lambda^*+\lambda_2)b_1-\alpha\lambda_1-(\alpha+b_2)\lambda_2]\varphi''(u)\\&+[(\frac{a^2}{2}\alpha-\gamma)b_1+\gamma\alpha+\lambda^*+\lambda_1+\lambda_2]\varphi''(u)+(-\frac{a^2}{2}b_1+\frac{a^2}{2}\alpha-\gamma)\varphi^{(4)}(u)-\frac{a^2}{2}\varphi^{(5)}(u)\\&=(b_1-b_2)(\alpha+b_2)b_2\lambda_2\int_0^u\varphi(u-z)h_{\rho_2}(z)\mathrm{d}z。\end{aligned}\tag{23}$$

式(22)乘以b_2加式(23),并化简得

$$\begin{aligned}&[(\gamma\alpha+\lambda^*)b_1b_2+b_1\alpha(\lambda_2-\lambda_1)]\varphi'(u)+[(\gamma\alpha+\lambda^*+\lambda_2)b_1-\alpha(\lambda_2+\lambda_1)]\varphi''(u)\\&+[-\frac{a^2}{2}b_1b_2+(b_1+b_2)(\frac{a^2}{2}\alpha-\gamma)+(\frac{a^2}{2}\alpha+\lambda^*+\lambda_1+\lambda_2)]\varphi'''(u)\\&+[-\frac{a^2}{2}(b_1+b_2)+\frac{a^2}{2}\alpha-\gamma]\varphi^{(4)}(u)-\frac{a^2}{2}\varphi^{(5)}(u)=0。\end{aligned}$$

定理得证。

3 结论

考虑到保险公司经营过程中会受到不确定随机干扰因素的影响以及保费的随机化和险种的多元化,本文建立了混合保费收取下带有随机干扰因素和投资复合Poisson-Geometric过程的双险种风险模型,其更符合实际应用背景。最终推导了该模型生存概率所满足的积分微分方程,并且当保费、理赔过程服从特定指数分布时,得到其满足的微分方程。本模型还可以继续推广,增加分红、利率等随机的干扰因素,这需要进一步研究。

参考文献:

[1] 侯致武,高磊. 一类带干扰的复合Poisson-Geometric风险模型的生存概率[J]. 沈阳大学学报(自然科学版),2022,34(1):71-76.

[2] 赵金娥,王贵红,龙瑶. 常利率下复合Poisson-Geometric风险模型的生存概率[J]. 统计与决策,2013(3):79-81.

[3] 钱晓涛. Poisson-Geometric二维风险模型的生存概率[J]. 贵州师范大学学报(自然科学版),2019,37(2):35-37.

[4] 侯致武,乔克林. 线性红利下带干扰的复合Poisson-Geometric风险模型[J]. 贵州师范大学学报(自然科学版),2020,38(4):80-83.

[5] 乔克林，韩建勤. 改进后的复合Poisson-Geometric风险模型的生存概率[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2016，33(4)：69-73.
[6] 孙宗岐，杨鹏. 确定风险投资和有界分红下复合Poisson-Geometric风险模型研究[J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(7)：1-10.
[7] 王月明，魏广华，郭楠，等. 带借贷利率和干扰的双Poisson-Geometric风险过程模型[J]. 西南大学学报(自然科学版)，2019，41(11)：54-63.
[8] 贠小青. 复合Poisson-Geometric过程的风险模型的破产概率及推广[J]. 统计与决策，2011(20)：14-17.
[9] 高明美，孙浩，刘喜华. 带干扰和投资的双二项风险模型的破产概率[J]. 统计与决策，2015(22)：22-25.
[10] 毛泽春，刘锦萼. 索赔次数为复合Poisson-Geometric过程的风险模型及破产概率[J]. 应用数学学报，2005，28(3)：419-428.

(责任编辑：刘　炜)

(上接第259页)

[10] BARTELS R H，CONN A R，SINCLAIR J W. Minimization techniques for piecewise differentiable functions: the l_1 solution to an overdetermined linear system[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis，1978，15(2)：224-241.
[11] 杨中华，薛毅. 一个超定线性方程组的l_1范数最小化算法[J]. 高等学校计算数学学报，1991，13(1)：89-93.
[12] 王嘉松，沈建斌. l_1模最小化问题的区间方法[J]. 高等学校计算数学学报，1993，15(1)：40-49.
[13] 姚健康. 超定线性方程组最小l_1范数解的一个算法[J]. 江西科学，2007，25(1)：4-6.
[14] 王嘉松，权日光. 不相容线性方程组最小极大解的一种新算法[J]. 计算数学，1996(4)：349-354.
[15] CHEN S S，DONOHO D L，SAUNDERS M A. Atomicdecomposition by basis pursuit[J]. SIAM review，2001(1)：129-159.
[16] FAREBROTHER R. L_1-norm and L_∞-norm estimation: an introduction to the least absolute residuals，the minimax absolute residual and related fitting procedures[M]. Heidelberg：Springer，2013.
[17] GREVILLE T N E. Some applications of the pseudoinverse of a matrix[J]. SIAM Review，1960，2(1)：15-22.
[18] 刘浩洋，户将，李勇峰，等. 最优化：建模、算法与理论[M]. 北京：高等教育出版社，2020.

(责任编辑：刘　炜)