隧道地表沉降预测的时变参数灰序模型 TGM-AR

王铁生[1],张利平[1],华锡生[2],张 冰[1]

(1.华北水利水电学院资源与环境学院,河南 郑州 450008;2.河海大学土木工程学院,江苏 南京 210098)

摘要:在趋势项提取法中,针对逐步回归法比较烦琐及灰色模型预测精度低的缺点,结合灰色预报系统的灰色性和时变性,根据变形体的实际变形规律,将时变参数 $a(t)$,$b(t)$及灰色理论应用于时序模型建模中,提出并建立时变参数灰序模型 TGM-AR.时变参数灰色模型用于提取趋势项部分,时序模型用于提取随机部分.将模型应用于隧道地表的沉降分析和预测,结果表明模型预报精度高,且趋势项的物理意义明确.

关键词:地表沉降;灰色模型;时变参数;变形预测

中图分类号:TU433 文献标识码:A 文章编号:1000-1980(2007)06-0655-04

地下工程与隧道工程的兴建,从施工开始到竣工,以及建成后整个运营期间都需要不断地进行变形监测.变形监测的目的和意义不仅仅是描述动力学现象,更重要的是要对变形观测的数据进行正确的处理,建立合理的模型,对变形发生的值作出准确的预报,从而减少事故的发生,保证工程的安全施工.地下工程和隧道施工中的地表、地层变形与地层参数和开挖方式有着重要的关系,但由于地层和施工的复杂性,工程地质条件及岩土特性参数通常是不完全定量的,甚至是随机的、模糊的,故其函数关系有时难以用确定性的数学模型加以描述[1-2].本文根据变形体实际变形的规律,研究并建立了时变参数灰序模型 TGM-AR,并应用于隧道地表的沉降分析和预测.由于变形体的变形通常是非平稳序列,通常包含趋势项和随机部分,因此须对变形体的时间序列进行趋势项的提取,使其变为平稳时间序列[3-4].在趋势项提取法中,针对常用的逐步回归法比较烦琐及灰色模型预测精度低的缺点,在充分考虑灰色预报系统的灰色性和时变性的基础上,将时变参数灰色模型应用于时序模型中.

1 时变参数灰序模型 TGM-AR

1.1 时变参数的灰色模型 TGM

模型的精度高低是决定模型是否可靠的重要依据.灰色模型中一旦模型确定,参数 β 一直保持恒定不变,利用少量数据进行短期预测还可以,但是对于大数量情况尤其对于长期预报常常表现出误差较大的缺点[5].灰色模型的精度关键在于参数 a,b 的估计,参数 a 反映了预测量的发展趋势,而 b 可以看作是整个因数集的数字表现,它代表了行为模式的变化.

为了克服常规灰色模型的缺点,本文建立了时变参数的灰色模型,采用多项式来拟合 $a(t)$和 $b(t)$,克服了常规灰色模型为常参数的缺陷,既考虑了预报模型的灰色性,又考虑了时变性,进一步体现了灰色预测模型的时空变化特性.计算时可通过前期的沉降数据,根据最小二乘法来确定其多项式系数,这样可计算出所预测时刻的参数值,从而计算出相应时刻的沉降量.

对生成序列 $\{x^{(1)}(i), i=1,2,\cdots,n\}$ 建立灰色模型 TGM(1,1),其白化微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}x^{(1)}(t)}{\mathrm{d}t} + a(t)x^{(1)}(t) = b(t) \tag{1}$$

其离散形式为

$$x^{(0)}(t) = -a(t)x^{(1)}(t) + b(t) \qquad (t = 2,3,\cdots,n) \tag{2}$$

收稿日期:2006-10-08

基金项目:河南省高等学校青年骨干教师资助计划资助项目;河南省教育厅自然科学基础研究资助项目(200742001)

作者简介:王铁生(1966—),男,河北定州人,副教授,博士,主要从事工程测量和安全监测研究.

在灰色 GM(1,1)模型中常用2点的平均值代替 $x^{(1)}(t)$,这里保持原形式不变,并把 $a(t)$和 $b(t)$作为待辨识的动态参数.

微分方程(1)的解(离散时间响应)为

$$\hat{x}(t+1)=\left(\int_0^t b(s)\mathrm{e}^{\int_0^s a(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}s+c\right)\mathrm{e}^{-\int_0^t a(r)\mathrm{d}r} \tag{3}$$

式中:$a(r)$,$b(s)$——待辨识量;c——常数;$\hat{x}(t+1)$——$x(t+1)$的预测值.

设 $a(t)$和 $b(t)$为连续函数,用适当次数的多项式逼近.令 $a(t)$和 $b(t)$为如下多项式:

$$a(t)=a_0+a_1t+\cdots+a_pt^p \qquad b(t)=b_0+b_1t+\cdots+b_qt^q$$

记

$$\boldsymbol{\beta}=(a_0,a_1,\cdots,a_p,b_0,b_1,\cdots,b_q)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{y}=(x^{(0)}(2),x^{(0)}(3),\cdots,x^{(0)}(n))^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} -x^{(1)}(2) & -2x^{(1)}(2) & \cdots & -2^px^{(1)}(2) & 1 & 2 & \cdots & 2^q \\ -x^{(1)}(3) & -3x^{(1)}(3) & \cdots & -3^px^{(1)}(3) & 1 & 3 & \cdots & 3^q \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -x^{(1)}(n) & -nx^{(1)}(n) & \cdots & -n^px^{(1)}(n) & 1 & n & \cdots & n^q \end{bmatrix}$$

利用累加生成数据列出观测方程为

$$\boldsymbol{B\beta}-\boldsymbol{y}=0 \tag{4}$$

从而按最小二乘法可求出参数

$$\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \tag{5}$$

代入式(3)得 $x(t+1)$的预测公式为

$$\hat{x}(t+1)=\left(\sum_{k=1}^{t}\left(\sum_{i=0}^{q}\hat{b}_ik^i\right)\mathrm{e}^{\sum_{i=0}^{p}\frac{\hat{a}_ik^{i+1}}{i+1}}+c\right)\mathrm{e}^{-\sum_{i=0}^{p}\frac{\hat{a}_it^{i+1}}{i+1}} \tag{6}$$

式中 c 可根据式(3)和初始条件 $\hat{x}(1)=x^{(0)}(1)$求出为

$$c=x^{(0)}(1) \tag{7}$$

最后经过累减还原(与一般 GM 模型相同)得 $\hat{x}^{(0)}(t+1)$.

1.2　TGM-AR 模型的建模及预测步骤

将灰色理论应用于时序模型建模中,即将改进的时变参数灰色模型与自回归模型 AR 相结合而成为时变参数灰序模型 TGM-AR,并用 F 检验法配合 BIC 准则($\mathrm{BIC}_2(p)=N\ln\sigma_a^2+pc\ln N$)进行了模型适用性检验[6].模型的辨识、参数估计及预测步骤概括如下:

a. 利用 N 个观测数据 $\{y_t\}$($t=1,2,\cdots,N$),建立时变参数灰色模型 TGM(1,1),并求出残差序列 $\{x_t\}$($t=1,2,\cdots,N$), $x_t=y^{(0)}(t)-\hat{y}^{(0)}(t)$。

b. 利用 N 个残差序列 $\{x_t\}$组成正置序列.

c. 对组成的正置序列按最小二乘法计算 $\hat{\varphi}_i$($i=1,2,\cdots,p$) 并进行偏相关函数截尾性检验,初步判断模型的类别.若偏相关函数具有截尾性则为 AR 模型(若不截尾,可适当增加阶数 p).

d. 按 $\sum\limits_{t=p+1}^{N}(x_t-\hat{\varphi}_1x_{t-1}-\cdots-\hat{\varphi}_px_{t-p})^2$ 计算相应残差的平方和.

e. 用 F 检验判断 AR(p)是否合适,若不合适,则阶数 $p+1$,返回步骤 **d**;否则继续 **f**;或与 BIC 准则相结合进行综合判断,以决定是否有必要继续增加阶数 p.

f. 用时变参数灰色模型和 AR(p)模型的组合模型 TGM-AR 进行变形预测:

$$y^{(0)}(t+1)=\hat{y}^{(0)}(t+1)+x_{t+1}$$

其中等号右端第1项为时变参数灰色模型预测公式,第2项为时间序列模型预测公式.本算法用C++语言编写,并且还编制了 ARMA 模型的计算程序,可选择 ARMA 模型替代上面的 AR 模型.

2　TGM-AR 模型的应用

某地铁一号线沿线都布设有纵横断面监测点以及隧道结构、建筑物和管线变形监测点等.纵线每隔20 m

都有 1 个监测点，重要地段每隔 10 m 有 1 个监测点，采用数字水准仪 DL101C 进行沉降观测．以纵线上的 3 号沉降点为例，此点所在段隧道埋深 12.5 m 左右．从 2002 年 10 ~ 12 月观测了 55 期沉降数据．因后期沉降量逐渐趋于减小，其中的后 10 期部分沉降量由隔日观测的沉降数据通过等间隔时序处理求得．时序沉降数据见表 1（限于篇幅只列出后 10 个数据）．

取表 1 时序沉降数据建立 TGM-AR 模型，以预测后几期沉降，之后，在此基础上实时引入新息数据参与模型的建立，组成 TGM-AR 动态模型预测其后续沉降．现以前 11 期预测后 1 期为例进行预测和分析．首先从第 11 期开始，以前 11 期的实测数据建立 TGM-AR 模型，预测后 1 期的沉降值．为了便于直观地表现模型的效果，现将每期预测值以拟合曲线形式绘于图 1 中，同时也将实测数据的实测变形曲线，以及建立的 GM(1,1)模型的预报实测变形曲线绘于图 1 中．从图 1 可以看出 GM(1,1)模型的拟合精度较低，拟合曲线相当于实测曲线的平均光滑曲线，即其只反应了沉降观测数据序列的均值变化，而 TGM-AR 动态模型因对序列进行了趋势项提取又对残差进行了时序分析，所以其拟合曲线既包含了沉降发展的趋势性又含有沉降过程的随机性．可见 TGM-AR 模型拟合的精度优于GM(1,1)模型．

为了进一步说明模型的建立过程及其拟合程度，现用 TGM-AR 模型来预测后 10 期的沉降值，并且随着后期实测数据的实时引入，分别计算其预测数据与对应实测数据的差值，结果见表 2．因篇幅所限，表 2 只列出 35 期之后的 10 次预测的计算结果．

现用前 45 期沉降数据来建模预测 46 ~ 55 期即最后 10 期数据，趋势项的提取用 TGM 模型，经优化确定 a，b 参数均取 2 个变量，即 $a = a_0 + a_1 t$，$b = b_0 + b_1 t$．具体参数为 $a = 0.119\,356 + 0.002\,869t$，$b = 3.376\,92 + 0.193\,699t$．对剩余的残差再用 AR($p$)模型辨识，用 F 检验时（$\alpha = 0.05$）阶数 $p = 8$，即 $p = 8$ 时已无显著性差异，所以模型的最佳阶数为 8．模型参数为

$$x_t = 0.598\,444x_{t-1} - 0.007\,409x_{t-2} + 0.304\,928x_{t-3} - 0.092\,439x_{t-4} - 0.212\,025x_{t-5} + 0.007\,306x_{t-6} + 0.145\,956x_{t-7} - 0.152\,756x_{t-8} + a_t$$

用经辨识后的灰序 TGM-AR 模型对第 46 ~ 55 期的变形值进行预测，实测变形值与预测结果的比较情况见表 3．为了对比，GM(1,1)和 GM-AR 模型的预测结果也列于表中．从表 3 可看出，TGM-AR 模型的预测效果最好．

通过对拟合曲线及预测结果的分析，可以看到 3 号沉降点沉降量随着时间的推移逐渐减小，说明趋于稳定状态．

表 1　地表沉降监测数据

Table 1　Observed data of ground surface settlement　　mm

序号	沉降值	序号	沉降值
46	0.30	51	0.25
47	0.25	52	0.24
48	0.28	53	0.18
49	0.24	54	0.12
50	0.21	55	0.15

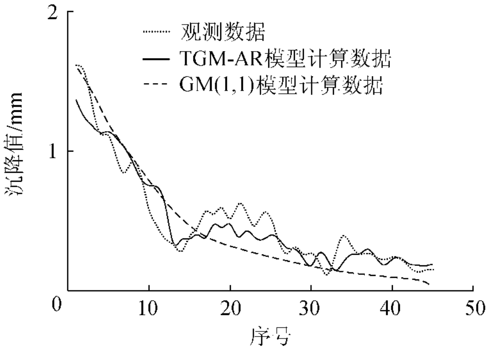

图 1　某地表沉降监测点沉降值拟合曲线

Fig.1　Fitting curves for observed data of settlement at one monitoring point

表 2　35 ~ 44 期的预测精度

Table 2　Prediction precision of two models for stages 35-44　　mm

序号	TGM-AR 模型	GM(1,1)模型	序号	TGM-AR 模型	GM(1,1)模型
35	0.289	1.269	40	0.035	0.103
36	0.254	1.082	41	0.040	0.089
37	0.244	0.943	42	0.041	0.068
38	0.210	0.767	43	0.059	0.055
39	0.213	0.628	44	0.025	0.072

表 3　最后 10 期几种方法的预测结果和精度比较

Table 3　Comparison of predicted results and precision of several methods for the last 10 stages　　mm

序号	实测数据	TGM-AR 模型预测数据	GM(1,1)模型预测数据	GM-AR 模型预测数据
46	0.30	0.28	0.13	0.29
47	0.25	0.25	0.12	0.16
48	0.28	0.34	0.11	0.22
49	0.24	0.28	0.10	0.20
50	0.21	0.19	0.10	0.09
51	0.25	0.24	0.09	0.11
52	0.24	0.25	0.08	0.13
53	0.18	0.17	0.08	0.08
54	0.12	0.17	0.07	0.05
55	0.15	0.21	0.07	0.08
预测中误差		0.03	0.13	0.09

3 结 语

通过对上述几种模型的比较可知:用 TGM-AR 模型对非平稳趋势变化的序列建立预测模型,充分利用了 GM 模型可提取趋势规律性和 AR 模型随机预测性两者的优点;用较少的参数和简洁的模型形式就能很好地表达离乱序列的潜在变化规律,同时利用改进的时变灰色模型 TGM,进一步达到了提取趋势项的效果,并反映出地表沉降的趋势规律性. TGM 与 AR 模型的组合模型比通常的模型和经验法模型的预报效果都好,无论拟合还是预测精度都得到明显提高,适宜于工程实际问题的动态分析、快速建模及趋势预报.

参考文献:

[1] 林永国,廖少明,刘国彬.地铁隧道纵向变形影响因素的探讨[J].地下空间,2000,20(4):264-267.
[2] 张仪萍,余亚南,张土桥.时变参数灰色沉降预测模型及其应用[J].浙江大学学报,2002,36(4):357-360.
[3] 邓聚龙.灰色系统理论教程[M].武汉:华中理工大学出版社,1990.
[4] 尹晖.时空变形分析与预报的理论和方法[M].北京:测绘出版社,2002.
[5] 周世建,赖志坤,藏德彦,等.加权灰色预测模型及其计算实现[J].武汉大学学报:信息科学版,2002,27(5):451-455.
[6] 甘仞初.动态数据的统计分析[M].北京:北京理工大学出版社,1991.

Time-dependent parameter gray model TGM-AR for prediction of surface settlement of tunnels

WANG Tie-sheng[1], ZHANG Li-ping[1], HUA Xi-sheng[2], ZHANG Bing[1]

(1. *College of Resource and Environmental Information, North China Institute of Water Conservancy and Hydroelectric Power, Zhengzhou* 450008, *China*;
2. *College of Civil Engineering, Hohai University, Nanjing* 210098, *China*)

Abstract: For extraction of trend items, the stepwise regression method is troublesome, and the gray model is of low precision of prediction. Based on the gray and time-dependent characteristics of the gray prediction system and the deformation rules of the deformation body, the time-dependent parameters $a(t)$ and $b(t)$ and the gray theory were applied to time series modeling, and a time-dependent parameter gray model TGM-AR was developed. The model TGM-AR with $a(t)$ and $b(t)$ was used for extraction of the trend item, and the time series model was for extraction of the random parts. The application of the model to analysis and prediction of the ground surface settlement of tunnels shows that the prediction precision is high and the physical significance of the trend item is explicit.

Key words: ground surface settlement; gray model; time-dependent parameter; deformation prediction