

一类具有间断系数的线性双曲型方程组的 Cauchy 问题

单海燕,周继东

(河海大学理学院,江苏 南京 210098)

摘要 将一类具有间断系数的线性双曲型方程组转化成等价的积分方程组,并通过逐次逼近法证明了其 Cauchy 问题一定存在着唯一的连续解,且此解在系数间断处可能存在弱间断,而在其他区域处处连续可微的结论.

关键词 Cauchy 问题;特征线;双曲型方程组;积分方程组

中图分类号 O175.24 **文献标识码** A **文章编号** 1000-198X(2006)03-0349-04

文献[1~4]对具有连续可微系数的线性双曲型方程组的 Cauchy 问题进行了研究,并得到了该定解问题存在唯一古典解的结论.本文对具有间断系数的线性双曲型方程组的 Cauchy 问题进行研究.为此,笔者考虑具有 2 个自变量的线性双曲型方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} + a(x,t)\frac{\partial u_3}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + b(x,t)\frac{\partial u_3}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} + a(x,t)\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (x,t) \in G \quad (1)$$

带初始条件
$$u_i(x,0) = \varphi_i(x) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2)$$

的 Cauchy 问题,其中函数 $a(x,t), b(x,t)$ 除直线 $x=0$ 外,处处二阶连续可微,在直线 $x=0$ 上具有第一类间断且 $a(x,t)>0, b(x,t)\neq 0$.

1 定 理

对于上述带有间断系数线性双曲型方程组的柯西问题,可得如下定理:

对于定解问题方程(1)和(2),如果所给的初始条件函数 $\varphi_i(x) (i=1, 2, 3)$ 除直线 $x=0$ 外具有连续的一阶导数,当区域 G 包含直线 $x=0$ 时,一定存在着唯一的连续解,此解在 $x=0$ 上可能具有弱间断,而在其他区域处处连续可微.

2 定理的证明

方程组(1)的特征方程为

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -a \\ 0 & \lambda & -b \\ -a & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

故 3 个不同的特征值分别为 $\lambda_1 = a(x,t), \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -a(x,t)$,以 $a_-(t), a_+(t)$ 分别表示 $a(x,t)$ 在 $(0,t)$ 处的左右极限.过 $(0,0)$ 点作特征线 L^+ 和 L^- . $L^+ : dx/dt = a_+(0), L^- : dx/dt = -a_-(0)$.因为在 L^+ 与正 x 轴围成的区域内, $a(x,t)$ 二阶连续可微,初始条件函数一阶连续可微,故可求得方程(1)和(2)唯一的连续可微解.同理,在 L^- 和负 x 轴围成的区域内也具有唯一的连续可微解^[1~4].

现讨论 L^+ 和 L^- 所围成的区域 G ,该区域包含直线 $x=0$.记 G_1 为 L^+ 与 $x=0$ 所围成的区域, G_2 为 L^-

与 $x=0$ 所围成的区域. 下面先在 G_1 与 G_2 内将所给问题转化成积分方程组, 然后证明在 G 内存在唯一的连续解; 最后证明所给 Cauchy 问题在 G_1 (或 G_2) 内连续可微解存在, 并且以上求得的 $u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t)$ 在 G_1 内具有一阶连续偏导数.

a. 在 G_1 与 G_2 内将所给问题转化成积分方程组. 在 G_1 内的任一点 (x, t) , 作斜率为 $a(x, t)$ 的特征线 L_1 , 交 t 轴于 $(0, t_1)$, 作斜率为 0 的特征线 L_2 , 交 x 轴于 $(x_2, 0)$, 作斜率为 $-a(x, t)$ 的特征线 L_3 , 交 x 轴于 $(x_3, 0)$, 其中 $x_2 = x$, 过 $(0, t_1)$ 作斜率为 $a_-(t_1)$ 的特征线 L_4 交 x 轴于 $(x_4, 0)$, 作斜率为 $-a_+(t_1)$ 的特征线 L_5 交 x 轴于 $(x_5, 0)$, 如图 1 所示.

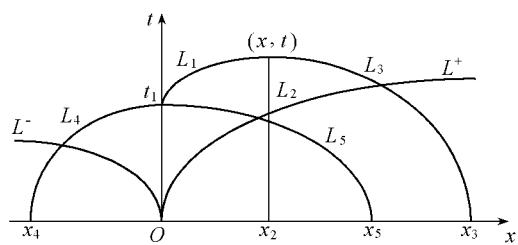


图1 线性双曲型方程组的特征线

Fig.1 Characteristic line of linear hyperbolic equations

作未知函数的线性变换

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & a \\ b & b & b \\ a & 0 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2a & 0 & 1/2a \\ -1/a & 1/b & 0 \\ 1/2a & 0 & -1/2a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

将方程组(1)化为对角型方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial v_1}{\partial t} + a \frac{\partial v_1}{\partial x} = - \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial t} \right) (u_1 + u_3) (2a)^{-1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} + 0 \cdot \frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial a}{\partial t} u_1 - \frac{1}{b^2} \frac{\partial b}{\partial t} u_2 \\ \frac{\partial v_3}{\partial t} - a \frac{\partial v_3}{\partial x} = \left(\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial t} \right) (u_1 - u_3) (2a)^{-1} \end{cases}$$

$$\text{记} \quad P = -\frac{1}{2a} \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial t} \right) \quad Q = \frac{1}{a^2} \frac{\partial a}{\partial t} \quad S = -\frac{1}{b^2} \frac{\partial b}{\partial t} \quad R = \frac{1}{2a} \left(\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial t} \right)$$

$$\text{沿 } L_1 \text{ 积分得} \quad v_1(x, t) = v_1(0, t_1) + \int_{L_1} P(u_1 + u_3) d\tau \quad (3)$$

再分别沿 L_2, L_3, L_4, L_5 积分, 并将初始条件及所作的未知函数的线性变换代入, 得

$$v_2(x, t) = -\frac{\varphi_1(x)}{a(x, 0)} + \frac{\varphi_2(x)}{b(x, 0)} + \int_{L_2} (Qu_1 + Su_2) d\tau \quad (4)$$

$$v_3(x, t) = (\varphi_1(x_3) - \varphi_3(x_3) (2a(x_3, 0))^{-1}) + \int_{L_3} R(u_1 - u_3) d\tau \quad (5)$$

$$v_1(0, t_1) = (\varphi_1(x_4) + \varphi_3(x_4) (2a(x_4, 0))^{-1}) + \int_{L_4} P(u_1 + u_3) d\tau \quad (6)$$

$$v_3(0, t_1) = (\varphi_1(x_5) - \varphi_3(x_5) (2a(x_5, 0))^{-1}) + \int_{L_5} R(u_1 - u_3) d\tau \quad (7)$$

其中 $v_1(0, t_1), v_3(0, t_1)$ 分别表示 $(0, t_1)$ 处 $v_1(x, t)$ 关于 x 的左右极限.

由于是在连续函数范围内证明解的存在唯一性, 故 u_i 满足

$$u_i(0, t) = u_i(-0, t) = u_i(+0, t) \quad (i = 1, 2, 3)$$

所以 $v_1(-0, t_1) = [u_1(0, t_1) + u_3(0, t_1) (2a_-(t_1))^{-1}]$, $v_3(+0, t_1) = [u_1(0, t_1) - u_3(0, t_1) (2a_+(t_1))^{-1}]$, 解出 $u_1(0, t_1) = a_-(t_1)v_1(-0, t_1) + a_+(t_1)v_3(+0, t_1)$, $u_3(0, t_1) = a_-(t_1)v_1(-0, t_1) - a_+(t_1)v_3(+0, t_1)$. 将式(6)(7)代入, 得

$$u_1(0, t_1) = a_-(t_1) [\varphi_1(x_4) + \varphi_3(x_4) (2a(x_4, 0))^{-1}] + a_+(t_1) [\varphi_1(x_5) - \varphi_3(x_5) (2a(x_5, 0))^{-1}] + a_-(t_1) \int_{L_4} P(u_1 + u_3) d\tau + a_+(t_1) \int_{L_5} R(u_1 - u_3) d\tau$$

$$u_3(0, t_1) = a_-(t_1) [\varphi_1(x_4) + \varphi_3(x_4) (2a(x_4, 0))^{-1}] - a_+(t_1) [\varphi_1(x_5) - \varphi_3(x_5) (2a(x_5, 0))^{-1}] + a_-(t_1) \int_{L_4} P(u_1 + u_3) d\tau - a_+(t_1) \int_{L_5} R(u_1 - u_3) d\tau$$

进而

$$v_1(+0, t_1) = a_-(t_1) \left\{ [\varphi_1(x_4) + \varphi_3(x_4)] 2a_+(x_4, 0) \right\}^{-1} + \int_{L_4} P(u_1 + u_3) d\tau \bigg/ a_+(t_1) \bigg\} \quad (8)$$

将式(3)(4)(5)(8)代入所作的线性变换,得

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= a(x, t) \left\{ a_-(t_1) [\varphi_1(x_4) + \varphi_3(x_4)] 2a_+(x_4, 0) \right\}^{-1} + [\varphi_1(x_3) - \varphi_3(x_3)] 2a_+(x_3, 0) \bigg\}^{-1} + \\ &\quad \int_{L_1} P(u_1 + u_3) d\tau + \int_{L_3} R(u_1 - u_3) d\tau + a_-(t_1) \int_{L_4} P(u_1 + u_3) d\tau \bigg/ a_+(t_1) \bigg\} \\ u_2(x, t) &= b(x, t) \left\{ a_-(t_1) [\varphi_1(x_4) + \varphi_3(x_4)] 2a_+(x_4, 0) \right\}^{-1} + [\varphi_1(x_3) - \varphi_3(x_3)] 2a_+(x_3, 0) \bigg\}^{-1} - \\ &\quad \varphi_1(x) \gamma a(x, 0) + \varphi_2(x) \gamma b(x, 0) + \int_{L_1} P(u_1 + u_3) d\tau + \int_{L_2} (Qu_1 + Su_2) d\tau + \\ &\quad \int_{L_3} R(u_1 - u_3) d\tau + a_-(t_1) \int_{L_4} P(u_1 + u_3) d\tau \bigg/ a_+(t_1) \bigg\} \\ u_3(x, t) &= a(x, t) \left\{ a_-(t_1) [\varphi_1(x_4) + \varphi_3(x_4)] 2a_+(x_4, 0) \right\}^{-1} - [\varphi_1(x_3) - \varphi_3(x_3)] 2a_+(x_3, 0) \bigg\}^{-1} + \\ &\quad \int_{L_1} P(u_1 + u_3) d\tau - \int_{L_3} R(u_1 - u_3) d\tau + a_-(t_1) \int_{L_4} P(u_1 + u_3) d\tau \bigg/ a_+(t_1) \bigg\} \end{aligned}$$

b. 证明在 G 内存在唯一的连续解. 以上积分方程组中的各项及积分号前的系数都是一阶连续可微的, 利用逐次逼近法即可得到 G_1 上唯一的连续可微解. 同法可作 G_2 上 $u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t)$ 所满足的积分方程组, 利用逐次逼近法即可得到 G_2 上唯一的连续可微解, 由此可得区域 G 上的连续解. 因此, 只需证明利用逐次逼近法可以得到 G_1 上唯一的连续可微解. 取 $u_i^{(0)}(x, t) = \varphi_i(x) (i = 1, 2, 3)$, 得 $u_i^{(n)}$, 研究函数列 $\{u_i^{(n)}\}$ 的一致收敛性.

令 $0 \leq t \leq T$, 不妨设 $\varphi_i(x) (i = 1, 2, 3)$ 给定在区间 $[-l, l]$ 上, 过 $(-l, 0), (l, 0)$ 点分别作斜率为 a 及 $-a$ 的特征线, 围成闭域 $\bar{G}$, 记:

$$\begin{aligned} M &= \max_{(x, t) \in \bar{G}} \{ |u_1^{(0)}|, |u_2^{(0)}|, |u_3^{(0)}|, |u_1^{(1)}|, |u_2^{(1)}|, |u_3^{(1)}| \} \quad A = \max_{(x, t) \in \bar{G}} \left\{ \left| \frac{a_-(t_1)}{a_+(t_1)} \right|, 1 \right\} \\ B &= \max_{(x, t) \in \bar{G}} \{ |P|, |Q|, |S|, |R| \} \quad C = \max_{(x, t) \in \bar{G}} \{ |a(x, t)|, |b(x, t)| \} \end{aligned}$$

于是得

$$\begin{aligned} |u_1^{(1)} - u_1^{(0)}| &\leq 2M & |u_2^{(1)} - u_2^{(0)}| &\leq 2M & |u_3^{(1)} - u_3^{(0)}| &\leq 2M \\ |u_1^{(2)} - u_1^{(1)}| &\leq 12MABCt & |u_2^{(2)} - u_2^{(1)}| &\leq 16MABCt & |u_3^{(2)} - u_3^{(1)}| &\leq 12MABCt \end{aligned}$$

假设 $|u_i^{(n)} - u_i^{(n-1)}| \leq 2M(8ABCt)^n/n! \quad (i = 1, 2, 3)$

则 $|u_i^{(n+1)} - u_i^{(n)}| \leq 2M(8ABCt)^{n+1}/(n+1)! \quad (i = 1, 2, 3)$

根据数学归纳法, 对于任何 n 都有

$$|u_i^{(n)} - u_i^{(n-1)}| \leq 2M(8ABCt)^n/n! \quad (i = 1, 2, 3)$$

又 $t \leq T$, 故由级数 $\sum_{n=0}^{\infty} 2M(8ABCt)^n/n!$ 的收敛性知 $u_i^{(0)} + \sum_{n=0}^{\infty} (u_i^{(n+1)} - u_i^{(n)})$ 在 G_1 上一致收敛, 即在 G_1 上积分方程组的解存在且连续. 同理可证得在 G_2 上相应的积分方程组的解存在且连续. 连续性得证.

下面用反证法证明唯一性. 设积分方程组有 (u_1, u_2, u_3) 和 (w_1, w_2, w_3) 2 组解, 令 $M_1 = \max_{(x, t) \in \bar{G}} \{ |u_1 - w_1|, |u_2 - w_2|, |u_3 - w_3| \}$. 由于 $u_1 - w_1, u_2 - w_2, u_3 - w_3$ 满足方程组

$$\begin{aligned} u_1 - w_1 &= a(x, t) \left\{ \int_{L_1} [P(u_1 - w_1) + P(u_3 - w_3)] d\tau + \int_{L_3} [R(u_1 - w_1) - \right. \\ &\quad \left. R(u_3 - w_3)] d\tau + a_-(t_1) \int_{L_4} [P(u_1 - w_1) + P(u_3 - w_3)] d\tau \bigg/ a_+(t_1) \bigg\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2 - w_2 &= b(x, t) \left\{ \int_{L_1} [P(u_1 - w_1) + P(u_3 - w_3)] d\tau + \int_{L_2} [Q(u_1 - w_1) + S(u_2 - w_2)] d\tau + \right. \\
&\quad \left. \int_{L_3} [R(u_1 - w_1) - R(u_3 - w_3)] d\tau + a_-(t_1) \int_{L_4} [P(u_1 - w_1) + P(u_3 - w_3)] d\tau / a_+(t_1) \right\} \\
u_3 - w_3 &= a(x, t) \left\{ \int_{L_1} [P(u_1 - w_1) + P(u_3 - w_3)] d\tau - \int_{L_3} [R(u_1 - w_1) - R(u_3 - w_3)] d\tau + \right. \\
&\quad \left. a_-(t_1) \int_{L_4} [P(u_1 - w_1) + P(u_3 - w_3)] d\tau / a_+(t_1) \right\}
\end{aligned}$$

可得 $M_1 \leq M_1 \frac{(8ABCT)^n}{n!}$ 所以 $M_1 = 0$ 从而 $u_1 = w_1, u_2 = w_2, u_3 = w_3$ 唯一性得证.

c. 证明所给 Cauchy 问题在 G_1 (或 G_2) 内连续可微解存在, 并且以上求得的 $u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t)$ 在 G_1 内具有一阶连续偏导数.

因为 t_1 连续依赖于 (x, t) , u_1, u_2, u_3 对 t 的偏导数的连续性可直接由积分方程组解的连续性推出, 所以对于 u_1, u_2, u_3 关于 x 的偏导数的连续性, 只需证明 $\left\{ \frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial x} \right\} (i = 1, 2, 3)$ 是一致收敛即可. 由于 $a(x, t), b(x, t)$ 在 G_1 内二阶连续可微, $\varphi_i(x) (i = 1, 2, 3)$ 在 G_1 内一阶连续可微, 将以上积分方程组的各项近似式对 x 求导, 可得 $\left\{ \frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial x} \right\} (i = 1, 2, 3)$ 满足的近似式, 用证明 $\{u_i^{(n)}\} (i = 1, 2, 3)$ 一致收敛的类似方法即可证明 $\left\{ \frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial x} \right\} (i = 1, 2, 3)$ 一致收敛, 故 $\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial x} (i = 1, 2, 3)$ 连续.

而 $u_i(x, t) (i = 1, 2, 3)$ 在直线 $x = 0$ 上可能是弱间断的. 例如, 取

$$a(x, t) = b(x, t) = \begin{cases} 2(x \geq 0) \\ 1(x < 0) \end{cases} \quad \varphi_1(x) = \varphi_2(x) = -\varphi_3(x) = \begin{cases} e^{x/2} (x \geq 0) \\ e^x (x < 0) \end{cases}$$

$$\text{得} \quad \begin{cases} u_1(x, t) = e^{t+x/2} \\ u_2(x, t) = e^{t+x/2} \\ u_3(x, t) = -e^{t+x/2} \end{cases} \quad (x \geq 0) \quad \begin{cases} u_1(x, t) = e^{t+x} \\ u_2(x, t) = e^{t+x} \\ u_3(x, t) = -e^{t+x} \end{cases} \quad (x < 0)$$

此解在 $x = 0$ 上是弱间断的.

定解问题式(1)和(2)解的存在唯一性也可通过构造适当的 Banach 空间并利用 Banach 压缩映象原理证得^[5,6].

参考文献:

- [1] 谷超豪, 李大潜, 陈恕行, 等. 数学物理方程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002: 133-138.
- [2] 姜礼尚, 陈亚浙. 数学物理方程讲义[M]. 北京: 高等教育出版社, 1986: 95-103.
- [3] 陈祖墀. 偏微分方程[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2002: 281-286.
- [4] BITSADZE A V. Equations of mathematical physics[M]. Moscow: Mir Publishers, 1980: 186-193.
- [5] 路慧芹. 非线性算子方程解的存在唯一性及应用[J]. 山东大学学报: 自然科学版, 2001, 36(4): 369-373.
- [6] 王孚和. 关于 Banach 压缩映象原理的几点注记[J]. 江西教育学院学报: 综合, 2003, 24(3): 11-13.

Cauchy problem for a class of linear hyperbolic equations with discontinuous coefficients

SHAN Hai-yan, ZHOU Ji-dong

(College of Sciences, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: A class of linear hyperbolic equations with discontinuous coefficients was transformed into equivalent integral equations. By use of the method of successive approximations, it is verified that there exists a unique and continuous solution to Cauchy problem, and that the solution is continuously differentiable except some discontinuous points of coefficients.

Key words: Cauchy problem; characteristic line; hyperbolic equations; integral equations