第 11 卷 第 5 期 2011 年 2 月
1671—1815(2011)5-0921-04
科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering
Vol. 11 No. 5 Feb. 2011
ⓒ 2011 Sci. Tech. Engng.

# 三阶 p-Laplace 算子型四点边值问题的正解

孔祥山 范进军
(山东师范大学数学科学学院,济南 250014)

**摘 要** 研究了三阶 p-Laplace 算子型四点边值问题正解的存在性,所得的正解存在性结论依赖于参数,并且条件较为宽松,便于应用。通过构造一个特殊的锥,利用锥上的不动点指数理论,得到了正解存在的充分条件,推广和改进了已有的结果。最后给出例子说明主要结果的有效性。

**关键词** 正解 p-Laplace 算子 四点边值问题 不动点指数
**中图法分类号** O175.14; **文献标志码** A

## 1 引言与预备知识

带 p-Laplace 算子的微分方程边值问题在物理、天文等领域具有重要应用。因此,该问题得到了广泛研究(见文献[1—6])。例如,在文献[2]中,作者研究了如下一类时间测度链上 p-Laplace 算子型三点边值问题

$$\begin{cases}(\varphi_p(u^{\Delta}(t)))^{\nabla}+\lambda f(u(t))=0, t\in[0,T]_{\mathrm{T}};\\ u(0)-B_0(u^{\Delta}(\eta))=0, u^{\Delta}(T)=0,\end{cases}$$

其中 $\varphi_p(s)=|s|^{p-2}s, p>1, \varphi_p^{-1}=\varphi_q, \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$。并利用锥拉压不动点定理,得到了该问题两个正解的存在性。

现考虑如下带 p-Laplace 算子型四点边值问题

$$\begin{cases}(\varphi_p(u''(t)))'=\lambda f(u(t)),\ t\in(0,1)\\ u(0)=0\\ u'(0)=\alpha_1u'(\xi_1)+\alpha_2u'(\xi_2)\\ u(1)=\beta u(0)\end{cases}\tag{1}$$

在文献[1]中,作者运用 Bai-Ge 不动点定理研究了脉冲微分方程边值问题式(1)多解的存在性。与文献[1]相比,主要的创新之处为:首先,文献[1]中方程的解不依赖于参数,本文所得的正解的存在性受到参数的制约,这在工程上是非常有意义的;其次,文献[1]虽然得到了多个正解的存在性,但是却需要较强的条件保证解的存在性,符合这样条件的非线性项很少,因此不方便应用,本文所提的条件非常宽松,有一大类非线性函数符合这一条件,因此有更为广泛的应用;再次,为了利用不动点指数理论这一较为新颖的工具,构造了一个特殊的锥,据作者所知,这个锥在以往的研究中没有人提出过。因此本文研究式(1)依赖于参数,利用较弱条件得出了该问题正解的存在性,较以往的结果有较大的创新性。

现在在空间 $C[0,1]$ 中研究该问题,定义范数 $\|u\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|u(t)|$,令 $P=\{u\in C[0,1]: u'(t)\geqslant 0, u(t)\geqslant 0, t\in[0,1]\}$,则易证 $P$ 为 $C[0,1]$ 上的锥。

始终假设如下条件成立。

($\mathrm{H}_1$) $\alpha_1,\alpha_2>0$; $\alpha_1+\alpha_2<1$; $0<\xi_1<\xi_2<1$; $\beta>1$。

($\mathrm{H}_2$) $f\in C([0,+\infty),[0,+\infty))$。

下面是本文所用到的几个重要引理。

**引理 1**[1] $u\in C[0,1]\cap C^3[0,1]$ 是 BVP 式(1)的解当且仅当

$$u(t)=u(0)+u'(0)t+\int_0^t(t-s)\varphi_q\left(\int_0^s\lambda f(u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s\tag{2}$$

其中

2010 年 11 月 22 日收到
第一作者简介:孔祥山(1983—),男,硕士研究生,研究方向:非线性微分方程。E-mail:kong_xiangshan@126.com。

$$u(0)=\frac{\alpha_1\int_0^{\xi_1}\varphi_q\left(\int_0^s\lambda f(u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\alpha_2\int_0^{\xi_2}\varphi_q\left(\int_0^s\lambda f(u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s}{(\beta-1)(1-\alpha_1-\alpha_2)}+\frac{\int_0^1(1-s)\varphi_q\left(\int_0^s\lambda f(u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s}{(\beta-1)}\tag{3}$$

$$u'(0)=\frac{\alpha_1\int_0^{\xi_1}\varphi_q\left(\int_0^s\lambda f(u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s}{1-\alpha_1-\alpha_2}+\frac{\alpha_2\int_0^{\xi_2}\varphi_q\left(\int_0^s\lambda f(u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s}{1-\alpha_1-\alpha_2}\tag{4}$$

**注 1** 定义

$$(Tu)(t)=u(0)+u'(0)t+\int_0^t(t-s)\varphi_q\times\left(\int_0^s\lambda f(u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s$$

,其中 $u(0)$,$u'(0)$ 如式(3)和式(4)中定义。则由引理 1 易知 $u(t)$ 是 BVP 式(1)的一个解当且仅当 $u(t)=(Tu)(t)$。

**引理 2**[7] 设 $\Omega_1,\Omega_2$ 是 $E$ 的有界开集,$P$ 是 $E$ 中的一个锥,$\theta\in\Omega_1,\overline{\Omega_1}\subset\Omega_2$,

$A:P\cap(\overline{\Omega_2}\setminus\Omega_1)\to P$ 全连续。如果满足条件(1) 存在 $u_0\in P\setminus\{\theta\}$,使 $x-Ax\neq tu_0,\forall x\in P\cap\partial\Omega_2$,$t\geqslant0$;$Ax\neq\mu x,\forall x\in P\cap\partial\Omega_1,\mu\geqslant1$,或(2) 存在 $u_0\in P\setminus\{\theta\}$,使 $x-Ax\neq tu_0,\forall x\in P\cap\partial\Omega_1,t\geqslant0$;$Ax\neq\mu x$,$\forall x\in P\cap\partial\Omega_2,\mu\geqslant1$。那么,$A$ 在 $P\cap(\Omega_2\setminus\overline{\Omega_1})$ 中必有不动点。

## 2 主要结果及证明

为方便起见,定义

$$M=\frac{(\alpha_1(\xi_1)^q+\alpha_2(\xi_2)^q)(q+1)+(1-\alpha_1-\alpha_2)}{q(q+1)(\beta-1)(1-\alpha_1-\alpha_2)},$$

并给定以下条件

($H_3$) 存在常数 $f_0^+$,使得 $\overline{\lim\limits_{|u|\to0^+}}\frac{f(u)}{|u|^{p-1}}=f_0^+>0$。

($H_4$) 存在 $R_2>R_1>0$,当 $R_1<|u|<R_2$ 时 $f(u)\geqslant\tau|u|^{p-1}$,其中 $\tau\geqslant2f_0^+\beta^{\frac{2}{q-1}}$。

**引理 3** 假设条件($H_1$)和条件($H_2$)成立。则任取 $\lambda>0$,算子 $T:P\to P$ 全连续。

**证明** 下面分四步来证明。

第一步 证明 $T:P\to P$。任取 $u\in p$,由引理 1 及条件($H_2$)得:$(Tu)(t)\geqslant0$, $t\in[0,1]$,

$$(Tu)'(t)=u'(0)+\int_0^t\varphi_q\left(\int_0^s\lambda f(u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s\geqslant0。$$

所以 $T:P\to P$。

第二步 证明 $T$ 为连续算子。$\forall\{u_n\}\subseteq P$,$u_n\to u_0$, $n\to+\infty$,由条件($H_2$)得:

$$|(Tu_n)(t)-(Tu_0)(t)|=\left|\int_0^t(t-s)\varphi_q\left(\int_0^s\lambda f(u_n(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s-\int_0^t(t-s)\varphi_q\left(\int_0^s\lambda f(u_0(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s\right|\leqslant\int_0^t(t-s)\left|\varphi_q\left(\int_0^s\lambda f(u_n(r))\mathrm{d}r\right)-\varphi_q\left(\int_0^s\lambda f(u_0(r))\mathrm{d}r\right)\right|\mathrm{d}s\to0,n\to+\infty。$$

所以 $Tu_n\to Tu_0,n\to+\infty$。

第三步 证明 $T$ 将有界集映成有界集。对任意有界集 $\Omega\subseteq P$, $\forall u\in\Omega$, $\exists M_0$, $\|u\|\leqslant M_0$。由($H_2$)得:$f$ 在有界闭集上一致连续,从而存在 $M_1>0$,使得 $\left|\int_0^t(t-s)\varphi_q\left(\int_0^s\lambda f(u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s\right|\leqslant M_1$,所以 $\|Tu\|\leqslant2M_0+M_1$。

所以 $T(\Omega)$ 为有界集。

第四步 证明 $T$ 将有界集映成等度连续集。$\forall u\in\Omega,\forall t_1,t_2\in[0,1],t_1<t_2$,则有

$$\begin{aligned}&|(Tu)(t_1)-(Tu)(t_2)|=\\&\left|u'(0)(t_1-t_2)+\int_0^{t_1}(t_1-s)\varphi_q\left(\int_0^s\lambda f(u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s-\int_0^{t_2}(t_1-s)\varphi_q\times\left(\int_0^s\lambda f(u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\int_0^{t_2}(t_1-s)\varphi_q\left(\int_0^s\lambda f(u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s-\int_0^{t_2}(t_2-s)\varphi_q\left(\int_0^s\lambda f(u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s\right|=\\&\left|u'(0)(t_1-t_2)-\int_{t_1}^{t_2}(t_1-s)\varphi_q\left(\int_0^s\lambda f(u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\int_0^{t_2}(t_1-t_2)\varphi_q\times\left(\int_0^s\lambda f(u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s\right|\to0,\ t_1-t_2\to0。\end{aligned}$$

所以$(Tu)(t_1)-(Tu)(t_2)\to0$, $t_1-t_2\to0$。

由 Arscoli-Arzela 定理,$T$ 为紧算子。综上,算子 $T:P\to P$ 全连续。证毕。

下面是本文的主要结果。

**定理 1**　设条件($H_1$)—条件($H_4$)成立,则当 $\lambda \in \left[\dfrac{1}{\tau\left(\dfrac{M}{\beta}\right)^{\frac{1}{q-1}}}, \dfrac{1}{2f_0^+(\beta M)^{\frac{1}{q-1}}}\right]$时,BVP 式(1)至少存在一个正解。

**证明**　由条件($H_4$)可知,存在 $R_2 > R_1 > 0$,当

$$R_1 < |u| < R_2 \text{ 时 }, f(u) \geqslant \tau |u|^{p-1} \qquad (5)$$

令 $\Omega_R = \{x \in C[0,1]: R_1 < \|x\| < R_2\}$。假设存在 $x_0 \in P \cap \partial\Omega_R$,存在 $\rho_0 \geqslant 0$,使 $\forall u \in P \setminus \{\theta\}$,有 $x_0 - Tx_0 = \rho_0 u$,则 $\|x_0\| = R_1$ 或 $\|x_0\| = R_2$。显然 $\rho_0 \neq 0$,因为若 $\rho_0 = 0$,则 $x_0 = Tx_0$,结论已证。

从而当 $\rho_0 > 0$ 时,由(5)得

$$x_0 = Tx_0 + \rho_0 u > Tx_0 = x_0(0) + x'_0(0)t + \int_0^t (t-s) \times$$

$$\frac{\alpha_1\int_0^{\xi_1}\varphi_q\left(\int_0^s \lambda\tau |x_0|^{p-1}\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s}{(\beta-1)(1-\alpha_1-\alpha_2)} +$$

$$\frac{\alpha_2\int_0^{\xi_2}\varphi_q\left(\int_0^s \lambda\tau |x_0|^{p-1}\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s}{(\beta-1)(1-\alpha_1-\alpha_2)} +$$

$$\frac{\int_0^1 (1-s)\varphi_q\left(\int_0^s \lambda\tau |x_0|^{p-1}\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s}{(\beta-1)} \geqslant$$

$$M(\lambda\tau)^{q-1}\frac{1}{\beta}\|x_0\| \geqslant x_0\text{。}$$

所以 $x_0 > x_0$,得出矛盾,假设不成立。

由条件($H_3$)可知,存在 $0 < r < R_1$,当$|u| < r$ 时,

$$f(u) < 2f_0^+ |u|^{p-1}\text{。} \qquad (6)$$

令 $\Omega_r = \{x \in C[0,1]: \|x\| < r\}$。假设存在 $x_0 \in P \cap \partial\Omega_r$,$\mu_0 \geqslant 1$,使得 $Tx_0 = \mu_0 x_0$,则 $\|x_0\| = r$。显然 $\mu_0 \neq 1$,因为若 $\mu_0 = 1$,则 $Tx_0 = x_0$,结论已证。

当 $\mu_0 > 1$ 时,由式(6)得

$$\mu_0 x_0 = Tx_0 = x_0(0) + x'_0(0)t + \int_0^t (t -$$

$$s)\varphi_q\left(\int_0^s \lambda f(x_0(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s \leqslant x_0(0) + x'_0(0)t +$$

$$\int_0^1 (t-s)\varphi_q\left(\int_0^s \lambda f(x_0(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s =$$

$$\beta\frac{\alpha_1\int_0^{\xi_1}\varphi_q\left(\int_0^s \lambda f(x_0(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s}{(\beta-1)(1-\alpha_1-\alpha_2)} +$$

$$\beta\frac{\alpha_2\int_0^{\xi_2}\varphi_q\left(\int_0^s \lambda f(x_0(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s}{(\beta-1)(1-\alpha_1-\alpha_2)} +$$

$$\beta\frac{\int_0^1 (1-s)\varphi_q\left(\int_0^s \lambda f(x_0(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s}{(\beta-1)} <$$

$$\beta\frac{\alpha_1\int_0^{\xi_1}\varphi_q\left(\int_0^s \lambda 2f_0^+ |x_0|^{p-1}\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s}{(\beta-1)(1-\alpha_1-\alpha_2)} +$$

$$\beta\frac{\alpha_2\int_0^{\xi_2}\varphi_q\left(\int_0^s \lambda 2f_0^+ |x_0|^{p-1}\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s}{(\beta-1)(1-\alpha_1-\alpha_2)} +$$

$$\beta\frac{\int_0^1 (1-s)\varphi_q\left(\int_0^s \lambda 2f_0^+ |x_0|^{p-1}\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s}{(\beta-1)} =$$

$$M(\lambda 2f_0^+)^{q-1}\beta |x_0| \leqslant x_0\text{。}$$

所以 $\mu_0 x_0 < x_0$,得出矛盾,假设不成立。

所以由引理 2 及注 1 得,BVP 式(1)至少存在一个正解。证毕。

## 3　实例

**例 1**　考虑

$$(\varphi_p(u''(t)))' = \lambda f(u(t));\ t \in (0,1),$$
$$u(0) = 0,\ u'(0) = \alpha_1 u'(\xi_1) + \alpha_2 u'(\xi_2),$$
$$u(1) = \beta u(0) \qquad (7)$$

令 $p = 2, q = 2, \xi_1 = \dfrac{1}{3}, \xi_2 = \dfrac{2}{3}, \alpha_1 = \alpha_2 = \dfrac{1}{3}, \beta = 2$。取 $f(u) = u + 3u^2$。经计算得:$M = \dfrac{4}{9}$。取$R_1 = 3$,$R_2 = 100$,$f_0^+ = 1$,$\tau = 10$。

经验算知条件($H_1$)—条件($H_4$)成立,从而由定理 1 得,当 $\lambda \in \left[\dfrac{9}{20}, \dfrac{9}{16}\right]$时,BVP 式(7)至少存在一个正解。

### 参　考　文　献


1　Shen L, Liu X, Lu Z. Multiplicity of positive solutions for four-point boundary value problems of inpulsive differential equations with p-Laplacian. Electron. J Diff Equa,2010;52:1—10

2　孔祥山,范进军,李海涛. 时间测度链上 p-Laplace 算子型三点边值问题两个正解的存在性. 科学技术与工程,2010;(6):1491—1493

3　Li H, Liu Y. Triple solutions for multi-point boundary-value problem with p-Laplace operator. Electron. J Diff Equa, 2009;150:1—9

4 Wang Y, Hou C. Existence of multiple positive solutions for one-dimensional p-Laplace. J Math Anal Appl, 2006;315: 144—153

5 Ma D, Du Z, Ge W. Existence and iteration of monotone positive solutions for multi-point boundary value problem with p-Laplacian operator. Comput Math Appl, 2005;50: 729—739

6 Lü H, O'Regan D, Zhang C. Multiple positive solutions for the one dimensional singular p-Laplacian, Appl Math Comput, 2002;133: 407—422

7 郭大均. 非线性泛函分析. 济南:山东科学技术出版社,2001

# On Positive Solutions for Third-order Four-point Boundary Value Problem with p-Laplace Operator

KONG Xiang-shan, FAN Jin-jun

(Department of Mathematics, Shandong Normal University, Jinan 250014, P. R. China)

[**Abstract**] The existence of positive solutions for third-order four-point boundary value problem with p-Laplace operator is considered. The main results depend on a parameter, and the conditions are very relaxed. Therefore, it is very convinent to use the results. By constructing a special cone and applying the fixed point index in a cone, a sufficient condition is established. Our results improve on those in the literatures. Finally, an example is worked out to demonstrate our results.

[**Key words**] positive solution p-Laplace operator four-point boundary value problem fixed point index