

非结构网格上浅水方程的 LU-SGS 隐式算法

杨 彬 汪德

(河海大学环境科学与工程学院 江苏 南京 210098)

摘要 针对浅水数值模拟的特点 ,建立了可以在非结构网格上求解浅水方程的 LU-SGS 隐式算法 .对复杂地形的底坡项进行了修正 ,并利用淹没节点法处理移动边界问题 .利用算例对此隐式算法进行了模拟验证 ,并与 Roe 显式算法进行了比较 .结果表明 隐式算法可以有效地缩短计算时间 ,具有良好的计算和收敛效果 .长江口实际潮流模拟结果也证明了此隐式算法处理实际浅水问题的能力 .

关键词 非结构网格 ;浅水方程 ;LU-SGS 隐式算法 ;复杂地形 ;移动边界

中图分类号 :TV131 **文献标识码** :A **文章编号** :1000-198X(2008)04-0483-05

在计算浅水动力学领域中 ,有结构网格有时难以准确描述计算域边界和复杂地形 ,而非结构网格能够解决复杂边界问题 .但是 ,在非结构网格上采用隐式算法的确比较困难 ,因为很多快速收敛的高效算法都基于有结构网格 .比较典型的隐式算法如交替方向隐格式(ADI)法及近似因子分解法(AF)等 ,较适用于有结构的矩形或曲线网格^[1] .由于非结构网格舍去了网格节点的结构性限制 ,很多结构网格计算中的高效算法都无法适用 .在非结构网格的计算中 ,一些常用的隐式算法往往要进行复杂的矩阵计算 ,需要大量的存储空间 .这对于大型的数值计算问题来说 ,可能无法完成计算 .

由 Jameson 等^[2]提出的基于有结构网格的 LU-SGS(lower-upper symmetric Gauss seidel)隐式算法已成功地应用于非结构网格^[3-5] .LU-SGS 隐式算法通过对隐式算子的近似因式分解 ,完全消除了对矩阵的存储 ,从而使构造的 L ,U 算子具有最大程度的对角占优 ,解的收敛速度和程度有了很大提高 .本文首先建立了可以在非结构网格上求解浅水方程的 LU-SGS 隐式算法 ,然后利用算例对此 LU-SGS 隐式算法和 Roe 显式算法进行了模拟验证 ,最后通过对长江口潮位过程的模拟证明了本文所建 LU-SGS 隐式算法在非结构网格上求解浅水方程的可行性 .

1 控制方程

计算模型采用二维浅水方程组

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial y} = \boldsymbol{S} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{U} = (h ,hu ,hv)^T$ $\boldsymbol{E} = (hu ,hu^2 + gh^2/2 ,huv)^T$
 $\boldsymbol{G} = (hu ,huv ,hv^2 + gh^2/2)^T$ $\boldsymbol{S} = (0 ,ghS_{0x} ,ghS_{0y})^T + (0 , - ghS_{fx} , - ghS_{fy})^T$

式中 : S_{0x} , S_{0y} —— x , y 方向的底坡 ; S_{fx} , S_{fy} —— x , y 方向的摩阻坡度 ; u , v —— x , y 方向的水深平均流速 ; t ——时间 ; h ——水深 ; g ——重力加速度 .

2 LU-SGS 分解

将空间半离散化的方程写成隐式格式 :

$$A_i \frac{\boldsymbol{U}_i^{(n+1)} - \boldsymbol{U}_i^{(n)}}{\Delta t} + \sum_{j=1}^m \boldsymbol{T}^{-1} F(\bar{\boldsymbol{U}}^{(n+1)}) L_j = A_i \boldsymbol{S}(\boldsymbol{U}_i^{(n)}) \tag{2}$$

其中 $\bar{\boldsymbol{U}} = (h ,hU ,hV)^T$

式中 : $\boldsymbol{T}^{-1}$ ——欧拉旋转矩阵的逆矩阵 ; $\boldsymbol{U} = u\cos\theta + v\sin\theta$; $\boldsymbol{V} = - u\sin\theta + v\cos\theta$; θ ——单元边外法方向与 x

轴的夹角(逆时针),方程(2)左边第2项为 $n+1$ 时间步净输出通量之和,LU-SGS隐式算法是将式(2)的隐式部分线性化后,做近似因式分解处理的,具体方法如下:

在方程(2)的两边同时减去 n 次计算净输出通量之和:

$$A_i \frac{\Delta U_i^{(n)}}{\Delta t} + \sum_{j=1}^m [T^{-1} F(\bar{U}^{(n+1)}) - T^{-1} F(\bar{U}^{(n)})] L_j = A_i S_i - \sum_{j=1}^m T^{-1} F(\bar{U}^{(n)}) L_j \quad (3)$$

$$A_i \frac{\Delta U_i^{(n)}}{\Delta t} + \sum_{j=1}^m [T^{-1} F(\bar{U}^{(n+1)}) - T^{-1} F(\bar{U}^{(n)})] L_j = \text{Res}_i^{(n)} \quad (4)$$

其中 $\Delta U_i^{(n)} = U_i^{(n+1)} - U_i^{(n)}$ $\text{Res}_i^{(n)} = A_i S_i - \sum_{j=1}^m T^{-1} F(\bar{U}^{(n)}) L_j$

称为 n 次计算的残值项,式(3)右边第2项一阶数值通量的求解仿照Roe的黎曼间断问题的解法,并对间断处进行熵修正^[6].

$$F(\bar{U}) = F(\bar{U}_i, \bar{U}_j) = \frac{1}{2} [F(\bar{U}_i) + F(\bar{U}_j) - \sum_{k=1}^3 \tilde{\alpha}_k \phi(\tilde{\lambda}_k) \tilde{\gamma}_k] \quad (5)$$

式中 $\tilde{\lambda}_k, \tilde{\gamma}_k$ —— $\tilde{A}$ 的特征值、对应右特征向量; k ——特征值个数; ϕ ——熵修正函数.

对方程(4)左边第2项采用一阶近似,则^[7]

$$\begin{aligned} T^{-1} F(\bar{U}^{(n+1)}) - T^{-1} F(\bar{U}^{(n)}) &= T^{-1} F(\bar{U}_i^{(n+1)}, \bar{U}_j^{(n+1)}) - T^{-1} F(\bar{U}_i^{(n)}, \bar{U}_j^{(n)}) = \\ &= [T^{-1} F(\bar{U}_i^{(n+1)}, \bar{U}_j^{(n+1)}) - T^{-1} F(\bar{U}_i^{(n)}, \bar{U}_j^{(n+1)})] + \\ &+ [T^{-1} F(\bar{U}_i^{(n)}, \bar{U}_j^{(n+1)}) - T^{-1} F(\bar{U}_i^{(n)}, \bar{U}_j^{(n)})] \end{aligned} \quad (6)$$

$$T^{-1} F(\bar{U}^{(n+1)}) - T^{-1} F(\bar{U}^{(n)}) = T^{-1} \frac{\partial F(\bar{U})}{\partial U_i} \Delta \bar{U}_i^{(n)} + T^{-1} \frac{\partial F(\bar{U})}{\partial U_j} \Delta \bar{U}_j^{(n)} \quad (7)$$

LU-SGS因式分解时,一阶数值通量写成如下形式:

$$F(\bar{U}) = F(\bar{U}_i, \bar{U}_j) = \frac{1}{2} [F(\bar{U}_i) + F(\bar{U}_j) - \rho_{ij} (\bar{U}_j - \bar{U}_i)] \quad (8)$$

式中 ρ_{ij} 为通量Jacobian平均矩阵的谱半径^[8].

将式(8)代入式(7)得

$$T^{-1} F(\bar{U}^{(n+1)}) - T^{-1} F(\bar{U}^{(n)}) = T^{-1} \frac{1}{2} \left[\frac{\partial F(\bar{U}_i)}{\partial U_i} + \rho_{ij} I \right] \Delta \bar{U}_i^{(n)} + T^{-1} \frac{1}{2} \left[\frac{\partial F(\bar{U}_j)}{\partial U_j} - \rho_{ij} I \right] \Delta \bar{U}_j^{(n)} \quad (9)$$

将式(9)代入式(4)整理后得

$$\left(\frac{A_i}{\Delta t} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \rho_{ij} L_j \right) \Delta U_i^{(n)} = - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m T^{-1} \left[\frac{\partial F(\bar{U}_j)}{\partial U_j} - \rho_{ij} I \right] L_j \Delta \bar{U}_j^{(n)} + \text{Res}_i^{(n)} \quad (10)$$

因每一个控制体都是闭合的,所以 $\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m T^{-1} \frac{\partial F(\bar{U}_i)}{\partial U_i} L_j = 0$. 令 $D = \left(\frac{A_i}{\Delta t} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \rho_{ij} L_j \right)$, L 与 U 分别对应计算单元编号小和大的邻居单元,那么经过LU-SGS因式分解的完整迭代形式如下:

向前扫描(即按编号从小到大进行计算)

$$\Delta U_i^* = D^{-1} \left\{ \text{Res}_i - \frac{1}{2} \sum_{j \in L} T^{-1} \left[\frac{\partial F(\bar{U}_j)}{\partial U_j} - \rho_{ij} I \right] L_j \Delta \bar{U}_j^* \right\} \quad (11)$$

向后扫描(即按编号从大到小进行计算)

$$\Delta U_i = \Delta U_i^* - \frac{1}{2} D^{-1} \sum_{j \in U} T^{-1} \left[\frac{\partial F(\bar{U}_j)}{\partial U_j} - \rho_{ij} I \right] L_j \Delta \bar{U}_j \quad (12)$$

最后,更新数值解,得第 $n+1$ 时间层上的守恒变量值

$$U_i^{(n+1)} = U_i^{(n)} + \Delta U_i$$

3 地形和动边界的处理

在浅水模型中,地形处理效果直接影响到数学模型的稳定性和合理性.本模型地形处理时采用了斜底模型的概念,地面高程布置在各个节点上,控制体单元各边中点和单元中心的高程通过线性插值得到.因为本模型采用三角形单元,所以节点都在同一平面上.利用单元内部流量守恒确定单元各边法向流速和切向流

速. 对于底坡项的修正, 将方程 (2) 中底坡项的积分表示成

$$\iint_{\Omega} S_0 d\Omega = \left(0, \sum_{j=1}^m \frac{1}{2} gh_i^2 L_j \cos\theta, \sum_{j=1}^m \frac{1}{2} gh_i^2 L_j \sin\theta \right)^T$$

并将其纳入源项后进行显式处理^[9].

移动边界的处理是浅水模拟中的难题. 本文采用淹没节点法^[10], 即根据单元各节点的淹没情况对单元和各界面的平均水深进行修正. 采用修正后的平均水深作为单元是否露滩的标准, 采用修正后的界面平均水深进行界面数值通量的计算, 并通过求解修正单元平均水深达到间接求解实际平均水深的目的.

4 算 例

为了验证 LU-SGS 隐式算法在收敛速度方面的优越性以及本模型所采用的地形处理方法的正确性, 利用 LU-SGS 隐式算法和 Roe 显式算法对缓、急流过渡流动算例进行模拟计算, 并对二者的残值收敛历史及收敛时的计算机总耗时进行比较. 由于显式算法的时间步长受到计算稳定性要求的限制, 显式算法的时间步长取满足稳定性要求的时间步长的最大值, 而 LU-SGS 隐式算法在全场可以采用比较大的时间步长.

设矩形水槽的长为 25 m、宽为 10 m, 地形条件为

$$Z_b = \max\{Z_m - \alpha(x - x_c)^2, 0\}$$

其中 $Z_m = 0.2\text{ m}$ $x_c = 10\text{ m}$ $\alpha = 0.05$

a. 缓流. 边界条件: 上游流量条件 $Q = 4.42\text{ m}^3/\text{s}$, 下游水位条件 $h = 2\text{ m}$. 初始条件: 水位 $h = 2.0\text{ m}$, x 方向流速 $u = 2.21\text{ m/s}$, y 方向流速 $v = 0.0\text{ m/s}$.

b. 激波过渡流动. 边界条件: 上游流量条件 $Q = 0.18\text{ m}^3/\text{s}$, 下游水位条件 $h = 0.33\text{ m}$. 初始条件: 水位 $h = 0.33\text{ m}$, x 方向流速 $u = 0.0\text{ m/s}$, y 方向流速 $v = 0.0\text{ m/s}$. LU-SGS 隐式算法计算达到恒定解时的沿渠道纵向中心线的水位如图 1 所示, 显、隐格式的残值收敛曲线如图 2 所示, 显、隐格式计算耗时比较如表 1 所示.

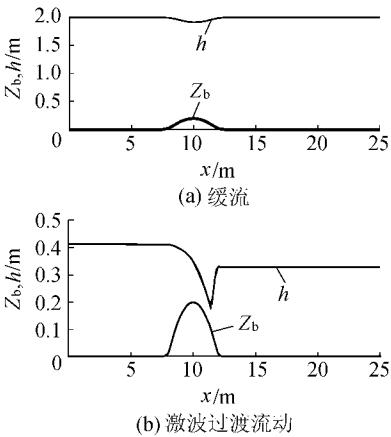


图 1 计算水位
Fig.1 Computed water levels

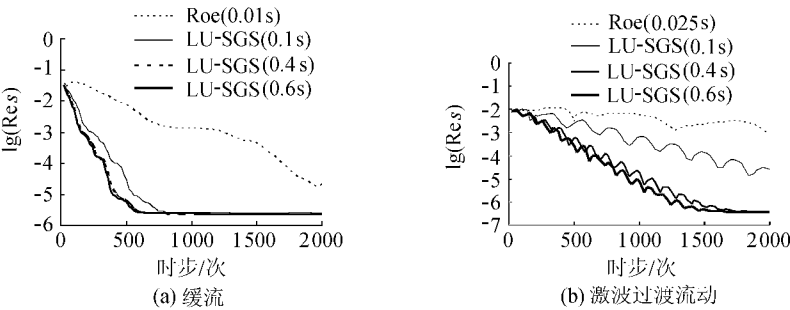


图 2 收敛曲线比较
Fig.2 Comparison of convergence curves

表 1 显式格式与隐式格式计算机耗时比较

Table 1 Comparison of the computation time of the explicit Roe scheme and implicit LU-SGS scheme							
格 式	$\Delta t / (s)$		总计算时步/次		稳定步/次		计算耗时/s
	缓流	激波过渡流动	缓流	激波过渡流动	缓流	激波过渡流动	缓流 激波过渡流动
Roe 显	0.01	0.025	2000	4000	1800	3800	183.5 328.8
	0.1	0.1	2000	2000	490	1400	97.5 256.4
LU-SGS 隐	0.4	0.4	2000	2000	330	620	66.3 116.5
	0.6	0.6	2000	2000	300	540	59.4 99.5

图 1 的计算水位与文献 [8] 中的实验数据相当吻合. 从显、隐式算法的收敛曲线 (图 2) 可以看出, LU-SGS 隐式算法的收敛速度明显优于 Roe 显式算法, 而且随着时间步长的加大, 收敛速度也在提高. 但从收敛曲线

和计算耗时的比较结果可以看出,随着时间步长的加大,残值收敛曲线不再有明显变化,计算耗时也不再明显减少.这说明,对 LU-SGS 隐式算法而言,时间步长也不是越大越好,时间步长也要根据模拟精度要求和计算耗时来选取.

5 长江口潮位验证

长江口是一个中等强度的潮汐河口,全年均为涨、落潮双向往复流.通过对长江口水流现象的模拟,可以很好地检验数学模型的性能.本文利用 LU-SGS 模型模拟长江口 2002-02-28T17:00 至 2002-03-03T17:00 共 72 h 的潮流过程.开边界均采用水位边界条件,全场采用 2 m 的初始水位进行迭代计算.采用三角形网格,计算网格单元为 8 408 个,节点为 4 551 个.最大空间步长约为 10 km,最小空间步长为 300 m,时间步长为 240 s. 2002-03-02T11:00 口门大潮涨急和 2002-03-03T5:00 口门大潮落急 2 个典型瞬时潮流场模拟结果如图 3 所示, 2002-03-01T0:00 至 2002-03-02T24:00 共计 48 h 的高桥二站和连兴港两观测站的潮位验证结果如图 4 所示.

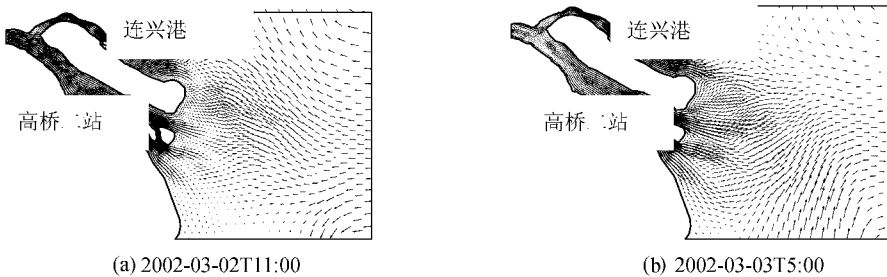


图3 计算表层潮流场
Fig.3 Tidal current field of calculation in the surface layer

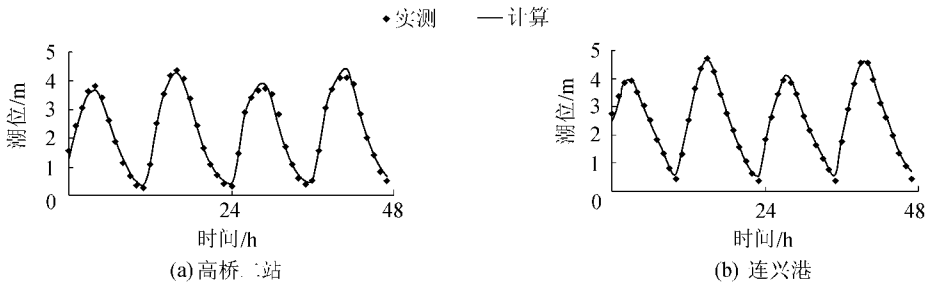


图4 潮位验证结果
Fig.4 Observed and computed tidal levels

从模拟计算结果可以看出,相对于 Roe 显式算法,LU-SGS 隐式算法虽然每时间步存在迭代计算,但时间步长可以取 Roe 显式算法的 10 倍以上,所以总的模拟时间大大减少.两观测站的潮位验证结果表明,计算潮位与实测潮位吻合较好^[10].这说明本文所建立的 LU-SGS 隐式算法能够较好地应用于含复杂地形和动边界的实际工程问题.

6 小 结

- a. 本文根据浅水数值模拟的特点和实际工程问题的需要,建立了在非结构网格上求解浅水方程组的 LU-SGS 隐式算法,并利用算例对 LU-SGS 隐式算法和 Roe 显式算法进行了模拟验证.结果表明,此 LU-SGS 隐式算法具有较好的格式稳定性,可以大幅度地增加时间步长,并且收敛速度远远优于显式算法.
- b. 长江口潮位模拟验证结果表明,本文对模型复杂地形和移动边界的处理是合理有效的,在非结构网格上用 LU-SGS 隐式算法求解浅水问题是切实可行的.

参考文献:

[1] 谭维炎. 计算浅水动力学:有限体积法的应用[M]. 北京:清华大学出版社,1998:201-202.
[2] JAMESON A ,YOON S. Lower-upper implicit schemes with multiple grids for the Euler equations[J]. AIAA Journal ,1987(7) 929-935.
[3] SHAROV D ,NAKAHASHI K. Reordering of 3-D hybrid unstructured grids for vectorized LU-SGS navier-stokes computations[J]. AIAA

Journal ,1997(1) :2102-2106.

- [4] CHEN R F ,WANG Z J. An improved LU-SGS scheme with faster convergence for unstructured grids of arbitrary topology[J]. AIAA Journal ,1999(3) :935-940.
- [5] WILLIAM J C. Efficient real gas Navier-Stokes computations of high flows using an LU-SGS scheme[J]. AIAA Journal ,1990(1) :391-397.
- [6] 王波兰.二维非结构网格 Euler 方程的 LU-SGS 算法[D].南京 :南京航空航天大学 ,2003.
- [7] 王立强.基于动态非结构重叠网格的有限体积法研究[D].南京 :南京航空航天大学 ,2005.
- [8] 于普兵.二维浅水水流数值模拟技术研究[D].南京 :南京水利科学研究院 ,2006.
- [9] 朱德军.处理二维浅水流动中动边界问题的淹没节点法[D].北京 :清华大学 ,2006.
- [10] 周杰.河口黏性泥沙输运数值模拟 :以长江口为例[D].南京 :河海大学 ,2005.

LU-SGS scheme for shallow water equation computation on unstructured grids

YANG Bin , WANG De-guan

(College of Environmental Science and Engineering , Hohai University , Nanjing 210098 , China)

Abstract : An implicit LU-SGS scheme for two-dimensional shallow water equation computation on unstructured grids was presented. A sloping method was employed for topographic treatment. The submerged-node method (SNM) was used to deal with the problems concerning the moving boundary. Two examples were calculated and the results were compared with those computed by the explicit Roe scheme. It is shown that this scheme greatly reduces calculation time and has good efficiency and convergence. The results of a numerical simulation of the Yangtze River Estuary further demonstrate that the scheme is accurate and efficient.

Key words : unstructured grid ; shallow water equations ; implicit LU-SGS scheme ; complex topography ; moving boundary

· 简讯 ·

第 2 届中国水利水电岩土力学与工程学术讨论会 将于 2008 年 11 月召开

由中国水利学会岩土力学专业委员会主办 ,武汉大学、南京水利科学研究院、中国水利水电科学研究院、长江科学院、中科院武汉岩土力学研究所和三峡大学等单位联合承办的“第 2 届中国水利水电岩土力学与工程学术讨论会”将于 2008 年 11 月在湖北省武汉市举行.大会将邀请著名专家介绍水利水电岩土力学与工程领域的最新发展动态 ,组织专家学者和工程技术人员交流如下几个方面的最新研究成果 :岩土的工程性质和测试技术 ;高土石坝工程中的岩土力学问题 ;高坝复杂岩基变形与稳定性分析方法 ;高陡边坡变形机理、稳定性分析和加固新技术 ;深埋超长隧洞和超大地地下洞室稳定性分析 ;评价标准和施工新技术 ;特殊土(黄土、膨胀土、高液限土、冻土)工程技术 ;岩土体安全评价、控制标准与加固支护新技术 ;土动力学与抗震工程 ;岩土体地质灾害致灾机理与防治新技术 ;岩土体安全监测技术与预测预报方法 ;环境岩土工程 ;重大岩土工程实录.

有关大会详情 ,可访问 [http://www. waterlab. cn/academic/showMeeting. aspx ? type = 33&id = 1646](http://www.waterlab.cn/academic/showMeeting.aspx?type=33&id=1646).

(本刊编辑部供稿)